Conferencias

Cálculo de la multiplicidad de un módulo irreducible en una sucesión de Jordan-Hölder

Jorge Vargas
FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba

En esta conferencia presentaremos ejemplos y problemas sobre la determinación de la multiplicidad de un módulo irreducible en módulos sobre el álgebra universal de un álgebra de Lie semisimple. Usualmente, estas multiplicidades se calculan por medio de evaluación de polinomios o utilizando funciones de partición.

La inconclusa teoría calculadora de Schubert y un nuevo movimiento

Matías Graña
Universidad de Buenos Aires

El anillo de cohomología de variedades de bandera en C^n a coeficientes enteros fue estudiado por Borel a comienzos de los 50. Borel probó que este anillo es isomorfo al cociente $Z[x_1,\dots,x_n]/I$, donde I es el ideal generado por los polinomios simétricos. El anillo de cohomología, por otra parte, está generado sobre Z por los llamados ciclos de Schubert. Via el isomorfismo de Borel, estos ciclos dan lugar a los "polinomios de Schubert", que fueron descriptos por Demazure, Bernstein-Gelfand-Gelfand y Lascoux-Schutzenberger entre otros. En los últimos años se encontró un nuevo contexto para el cálculo de Schubert: las álgebras de Nichols (o álgebras simétricas cuánticas). Dentro de ellas se pueden definir subálgebras isomorfas a los anillos de cohomología de variedades de bandera. Además, esto se ha hecho también para variedades de bandera generalizadas, y para cohomología cuántica. En la charla intentaremos dar cuenta de estos avances y plantearemos posibles continuaciones.

Soluciones de la ecuación cuántica de Yang-Baxter en el contexto de carcaj

Nicolás Andruskiewitsch
FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba

Se presentará la ecuación de trenzas, también conocida como "ecuación cuántica de Yang-Baxter". Se recordarán diversos resultados sobre soluciones de la ecuación de trenzas en los contextos de espacios vectoriales y de conjuntos. Luego se discutirá el caso de los carcaj y se presentarán los resultados de [A], formulados en términos de representaciones de grupoides apareados [AA]. Finalmente se mostrará la construcción de R-matrices universales para los grupoides cuánticos definidos en [AN].

[AA] Marcelo Aguiar y N. Andruskiewitsch. Representations of matched pairs of groupoids and applications to weak Hopf algebras. Aceptado en Contemp. Math., 47 pp. arxiv.org: math.QA/0402118.

[A] N. Andruskiewitsch. On the quiver-theoretical quantum Yang–Baxter equation. Aceptado en Selecta Math., 40 pp. arxiv.org: math.QA/0402269.

[AN] N. Andruskiewitsch y S. Natale. Double categories and quantum groupoids. Publ. Mat. Urug. 10 11-51 (2005). arxiv.org: math.QA/0308228.

Clasificación de álgebras down-up

Andrea Solotar
Universidad de Buenos Aires

Las algebras “down-up” $A(a,b,c)$, donde a, b, c son escalares, fueron definidas por Benkart y Roby en 1998, como generalizaciones de álgebras generadas por un par de operadores “up” y “down” que actúan en el espacio vectorial kP, donde P es un conjunto parcialmente ordenado. Entre los ejemplos de este tipo de álgebras mencionamos al álgebra envolvente de $\mathrm{sl}_2(\mathrm{C})$ y ciertas deformaciones de la misma definidas por Woronowicz y Witten.

Kirkman, Musson y Passmann probaron que un álgebra de este tipo es noetheriana si y sólo si b es distinto de a. En el caso noetheriano, Carvalho y Musson describieron las clases de isomorfismo de estas álgebras.

En esta charla trataremos la clasificación en términos de equivalencia Morita, es decir, equivalencias de categorías de módulos.

Homotopía algebraica estable

Gabriel Minian
Universidad de Buenos Aires

En la primera parte de esta charla, contaré cómo definir una teoría de homotopía en contextos algebraicos o combinatorios. Luego mostraré algunas construcciones básicas de esta teoría homotópica, que pueden ser utilizadas para desarrollar, en estos contextos, una teoría estable. Por último, basándome en algunas ideas introducidas por Segal, May y Thomason en los setenta y en los ochenta, desarrollaré una “máquina de lazos infinitos” y veremos algunas de sus aplicaciones.

La parte de izquierda y la parte de derecha de una categoría de módulos

Ibrahim Assem
Université de Sherbrooke, Québec, Canada

En esta charla, definiremos la parte de izquierda y la parte de derecha de una categoría de módulos, enunciaremos sus propiedades principales, y después veremos cómo se pueden emplear para resolver un problema concreto de teoría de representaciones de álgebras: la caracterización de las álgebras que tienen componentes de Auslander-Reiten quasi-dirigidas.

Álgebra, sesión I

Módulos inclinantes y las subcategorías C_i^M

Nilda Isabel Pratti
Universidad Nacional de Mar del Plata

Trabajo en colaboración con María Inés Platzeck, UNS.

Sea A un álgebra de artin y mod$A$ la categoría de A-módulos finitamente generados a derecha. Consideramos para un A-módulo M y cada $n \geq 0$ la subcategoría llena C_n^M de mod$A$ que consiste de los módulos X tal que existe una sucesión exacta $M_n \to \cdots \to M_1 \to M_0 \to X \to 0$ con $M_i \in \text{add}M$, y tal que la sucesión inducida $\text{Hom}_A(M,M_n) \to \cdots \to \text{Hom}_A(M,M_1) \to \text{Hom}_A(M,M_0) \to \text{Hom}_A(M,X) \to 0$ es exacta [2], generalizando la subcategoría C_1^M definida por M. Auslander en [1].

Los módulos inclinantes M satisfacen $C_0^M = C_1^M$. La recíproca no es verdadera, aún asumiendo que $DA \in C_0^M$. Sin embargo nosotros caracterizamos los módulos inclinantes en términos de las subcategorías C_i^M. Sea $B = \text{End}(M_A)$. El módulo M es inclinante si y sólo si $DA \in C_0^{M_A}$, $C_0^{M_A} = C_1^{M_A}$ y $C_0^{{}_BM} = C_1^{{}_BM}$. Obtenemos también relaciones entre la validez de algunos propiedades de la definición de módulo inclinante y las condiciones $C_0^{M_A} = C_1^{M_A}$ y $C_0^{{}_BM} = C_1^{{}_BM}$.

Finalmente, estudiamos cuáles de estos resultados para módulos inclinantes pueden ser extendidos a módulos inclinantes generalizados y probamos que si M es módulo inclinante generalizado de dimensión proyectiva n satisface que $DA \in C_{n-1}^{M_A}$, $C_{n-1}^{M_A} = C_n^{M_A}$ y $C_{n-1}^{{}_BM} = C_n^{{}_BM}$, pero la recíproca no es verdadera.

Referencias

[1] M. Auslander. *Notes on representation theory*. Brandeis Univ., (1973).

[2] M. I. Platzeck and N. I. Pratti. *On a theorem of Auslander and applications*. Comm. in Algebra, 28(6), 2817-2835, (2000)

Biálgebras conformes

José I. Liberati
Universidad Nacional de Córdoba

Estudiamos álgebras conformes como dual conforme de coálgebras de Lie clásicas. Definimos y estudiamos la noción de biálgebra conforme de Lie y con los mapas lineales conforme y de vértice clarificamos la construcción del algebra de Lie asociada a un álgebra conforme y una vertex algebra.

Algebras laura, nuevos conceptos equivalentes

M. Lanzilotta Mernies
Universidad de la República, Uruguay

Se analizará el concepto de álgebras laura, y conceptos equivalentes, pasando por las componentes casi-dirigidas y la medida de Gabriel–Roiter.

Sobre una conjetura de Vogan

Tim Bratten
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires

En un trabajo reciente [1], D. Vogan hace una conjetura relacionada con ciertos grupos de cohomología de álgebra de Lie (Conjetura 10.3). En nuestro trabajo probaremos un caso especial de su conjetura. En particular, sean G_0 un grupo de Lie conexo, complejo reductivo y $K_0 \subseteq G_0$ un subgrupo compacto maximal. Indicamos con $\mathfrak{g}$ la complexificación del álgebra de Lie de G_0. La eleción de K_0 nos da la posibilidad definir el concepto de una subálgebra de Borel de $\mathfrak{g}$ que es $\theta-$estable. Entonces sea $\mathfrak{b}$ una subálgebra de Borel $\theta-$estable y supongamos que $\mathfrak{n} \subseteq \mathfrak{b}$ es el radical nilpotente de $\mathfrak{b}$. Sean M un módulo de Harish-Chandra y M_{glob} una globalización de M (este indica que M_{glob} es una representación admisible de G_0 cuyas módulo de Harish-Chandra es isomorfo con M). Entonces, para cada $p = 0, 1, 2, \ldots$, probaremos que existe un isomorfismo natural

$$H^p(\mathfrak{n}, M) \cong H^p(\mathfrak{n}, M_{\text{glob}})$$

donde $H^p(\mathfrak{n}, M)$ y $H^p(\mathfrak{n}, M_{\text{glob}})$ indican los respectivos grupos de $\mathfrak{n}-$cohomología.

[1] Vogan, D.; Unitary representations and complex analysis. Disponible en su sitio de web: `http://www-math.mit.edu/~dav/paper.html`.

Álgebra, sesión II

Cohomología de la construcción de Grothendieck

María Julia Redondo
Instituto de Matemática, CONICET – Universidad Nacional del Sur

Trabajo en colaboración con Teimuraz Pirashvili.

Dada una categoría pequeña $\mathbf{K}$ y $\mathrm{L} : \mathbf{K} \to \mathbf{CAT}$ un funtor, consideramos la categoría $\int_{\mathbf{K}} \mathrm{L}$ conocida como la construcción de Grothendieck del funtor L.

Sea $\mathrm{H}^n(\int_{\mathbf{K}} \mathrm{L}, \mathrm{D})$ la cohomología de la construcción de Grothendieck de L con coeficientes en un sistema natural D, en el sentido de Baues y Wirsching. Mostraremos la existencia de una sucesión espectral definida en función de $\mathbf{K}$ y de $\mathrm{L}(k)$, con k un objeto de $\mathbf{K}$, que converge a $\mathrm{H}^n(\int_{\mathbf{K}} \mathrm{L}, \mathrm{D})$.

Representaciones de las subálgebras de Lie clásicas del álgebra de pseudo operadores diferenciales cuánticos

Carina Boyallian
Ciem–FAMAF, Universidad Nacional de Córdoba
boyallia@mate.uncor.edu

Las álgebras W-infinito surgen naturalmente en diversas teorías de la física, tales como la teoría de campos conformes, la teoría de efecto cuántico de Hall, etc. El estudio de la teoría de representaciones del álgebra $\mathcal{W}_{1+\infty}$, que es la extensión central del algebra de operadores diferenciales en el círculo, fue comenzada por V. Kac y A. Radul en 1993 (Comm. Math. Phys. **157**). Al final de este artículo, ellos desarrollan brevemente los correspondientes resultados análogos para el álgebra de Lie $\widehat{\mathcal{S}_q}$, que es la extensión central del algebra de Lie de operadores pseudo diferenciales cuánticos.

En nuestro trabajo, clasificamos, salvo por conjugación, la familia de anti-involuciones de esta álgebra de Lie, la $\mathcal{S}_q$, que preservan la graduación principal, familia que denotamos por $\sigma_{\varepsilon,k}$ ($\varepsilon = \pm 1$ y $k \in \mathbb{Z}$). Luego, clasificamos los módulos irreducibles quasifinitos de peso máximo sobre las subálgebras de Lie de $\mathcal{S}_q$, fijas por menos $\sigma_{\varepsilon,k}$, y los realizamos en términos de las representaciones irreducibles de peso máximo del álgebra de Lie de matrices infinitas con una cantidad finita de diagonales no nulas y sus subálgebras de Lie clásicas. Este es un trabajo en colaboración con J. Liberati.

Una forma normal en grupos de trenzas de tipo B_n

Sebastián Freyre
FCEyN, Universidad de Buenos Aires
sfreyre@bigua.dm.uba.ar

Presentaremos primero algunas definiciones y propiedades de los grupos de trenzas de tipo A_n (o clásicos), definiremos una forma normal en ellos y usaremos una relación entre éstos y los grupos de tipo B_n para recuperar una forma normal en los últimos.

Ext-proyectivos en categorías suspendidas contravariantemente finitas

Sonia Trepode
Universidad Nacional de Mar del Plata

Trabajo conjunto con Ibrahim Assem y María José Souto Salorio

En este trabajo estudiamos la noción de Ext-proyectivos en subcategorías suspendidas contravariantemente finitas (alas) de una categoría triangulada. Consideramos alas en la categoría derivada acotada de un categoría hereditaria ext-finita con objeto inclinante. En este contexto nuestro teorema principal es el siguiente:

Teorema: Sea $\mathcal{H}$ una categoría hereditaria con objeto inclinante, y $\mathcal{U}$ un ala en $\mathcal{D}^b(\mathcal{H})$. Entonces:

a) Los Ext-proyectivos indescomponibles en $\mathcal{U}$ pueden ser ordenados de tal manera que formen una sucesión excepcional.

b) El número de clases de isomorfismo de Ext-proyectivos indescomponibles está acotado por el rango r del grupo de Grothendieck de $\mathcal{H}$.

c) Si $M_1, \ldots, M_r$ es una lista completa de los Ext-proyectivos no isomorfos de $\mathcal{U}$. Entonces M es un generador de $\mathcal{D}^b(\mathcal{H})$ y el ala $\mathcal{U}$ está generada por M como subcategoría suspendida de $\mathcal{D}^b(\mathcal{H})$.

Álgebra, sesión III

Acciones globales y homología

Matías del Hoyo
FCEyN, Universidad de Buenos Aires

Trabajo en colaboración con Gabriel Minian

En esta charla definiré la noción de acción global y contaré alguna de sus aplicaciones y su relación con los complejos simpliciales y los espacios topológicos.

Mostraré distintas variantes para la construcción de un espacio clasificante de estos objetos, y analizaré la información que revelan sus grupos de homología en grados bajos.

Caminos casi-seccionales y las potencias del radical

Claudia Chaio
Universidad Nacional de Mar del Plata

Trabajo conjunto con: Flavio Coelho y Sonia Trepode

La noción de morfismo irreducible tiene un papel central en el estudio de la categoría de módulos finitamente generados sobre un álgebra de artin. La conexión con el radical de esta categoría está dada por el hecho que un morfismo f entre módulos indescomponibles es irreducible si y sólo si f pertenece al radical y no al radical al cuadrado. Una pregunta interesante es cuándo la composición de n morfismos irreducibles pertenece a la potencia $n+1$ del radical.

Igusa y Todorov probaron que si n morfismos irreducibles forman parte de un camino seccional entonces su composición pertenece a la potencia n del radical y no a potencia $n+1$. Liu generalizó este resultado a caminos preseccionales.

En esta charla, analizaremos el caso de la composición de n morfismos irreducibles entre módulos indescomponibles, donde $n-1$ de ellos pertenecen a un camino seccional. A dichos caminos los llamaremos caminos casi-seccionales.

Bajo ciertas hipótesis, daremos condiciones necesarias y suficientes para que la composición de estos n morfismos irreducibles sea un morfismo no nulo en la potencia $n+1$ del radical.

Regularidad lineal para variedades absolutamente irreducibles

Antonio Cafure
FCEyN, Universidad de Buenos Aires
Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento
acafure@dm.uba.ar

Una noción importante en la teoría de sistemas de ecuaciones polinomiales sobre *cuerpos finitos* y algunos de sus problemas (estimaciones sobre la cantidad de soluciones racionales, resultados de existencia, cálculo de puntos racionales, etc) es la noción de *regularidad*. Esta noción surge de forma natural al trabajar en estos problemas y consiste en dar condiciones sobre la cantidad de elementos del cuerpo finito para que los resultados encontrados sean válidos. La regularidad es una función de varios parámetros: la dimensión de la variedad que define el sistema de ecuaciones dado, el grado de la variedad, el grado de las ecuaciones que definen la variedad, la dimensión del espacio ambiente, etc. Es importante entonces proporcionar resultados de regularidad baja a fin de ampliar y extender la validez de los resultados que se tienen a disposición.

Sea $\mathbb{F}_q$ el cuerpo finito de q elementos y $\overline{\mathbb{F}}_q$ su clausura algebraica. Una variedad afín $V \subset \overline{\mathbb{F}}_q^n$ se dice $\mathbb{F}_q$–definible si V es el conjunto de ceros comunes en $\overline{\mathbb{F}}_q^n$ de polinomios $F_1, \ldots, F_m \in \mathbb{F}_q[X_1, \ldots, X_n]$.

En este trabajo presentamos una estimación con *regularidad lineal* en el grado de la variedad para la cantidad de puntos q–racionales de una variedad absolutamente irreducible $\mathbb{F}_q$–definible de dimensión $r > 0$. Tenemos el siguiente resultado:

Teorema 1 *Sea V una variedad afín $\mathbb{F}_q$–definible absolutamente irreducible de dimensión r y grado δ. Si $q > 3\delta$ entonces se tiene la siguiente estimación:*

$$|\#(V \cap \mathbb{F}_q^n) - q^r| \leq (\delta - 1)(\delta - 2)q^{r-1/2} + 10\delta^{13/3}q^{r-1}$$

La demostración de este resultado utiliza una versión efectiva del clásico teorema del elemento primitivo debida a [BG04], métodos de eliminación geométrica efectiva y estimaciones sobre la cantidad de puntos racionales de una hipersuperficie absolutamente irreducible de [CM05].

Referencias

[BG04] J. Brawley and S. Gao. On density of primitive elements for field extensions. Available at www.math.clemson.edu/ sgao/

[CM05] A. Cafure and G. Matera. Improved explicit estimates for the number fo solutions of equations over finite fields. To appear in Finite Fields and their Applications.

Grupoides trenzados

J. M. Mombelli
Universidad Nacional de Córdoba

El estudio de la ecuación de trenzas o equivalentemente de la ecuación cuántica de Yang-Baxter (QYBE) ha sido muy fructífero en muchas áreas de matemática.

A principios de los '90 Drinfeld propone el estudio de la ecuación de trenza en la categoría de conjuntos, lo que lleva a la noción de "*soluciones conjuntistas de la QYBE*". Dicho estudio ha sido llevado a cabo, principalmente, por dos grupos de algebristas: Etingof-Schelder-Soloviev y Lu-Yan-Zhu.

En un trabajo del 2004 Andruskiewitsch inicia el estudio de la ecuación de trenzas en la categoría de carcajs sobre un conjunto fijo $\mathcal{P}$. En dicho trabajo aparece la noción de *grupoide trenzado*, el cual juega un papel central en la descripción de soluciones no degeneradas de la ecuación de trenzas.

El propósito de esta charla es dar una descripción de grupoides trenzados en términos de teoría de grupos. Y a partir de dicha descripción la construcción explícita de ejemplos.

Referencias

[A] N. ANDRUSKIEWITSCH, *On the quiver-theoretical quantum Yang-Baxter equation*, Selecta Math.(N.S.) to appear, `math.QA/0402269`.

[MM] C. MALDONADO and J.M. MOMBELLI, *On Braided Groupoids*, preprint (2005), `math.QA/0504108`.

[EGS] P. ETINGOF, R. GURALNIK and A. SOLOVIEV, *Indecomposable set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation on a set with prime number of elements*, J. Algebra **242** 2 (2001), 709–719.

[ESS] P. ETINGOF, T. SCHEDLER and A. SOLOVIEV, *Set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation*, Duke Math. J. **100** (1999), 169–209.

[LYZ] JIANG-HUA LU, MIN YA and YONG-CHANG ZHU, *On the set-theoretical Yang-Baxter equation*, Duke Math. J. **104** (2000), 1–18.

Algunas caracterizaciones de las álgebras soportadas a izquierda

J. A. Cappa
Universidad Nacional del Sur

Esta comunicación está basada en un trabajo conjunto con I. Assem, S. Trepode y M. I. Platzeck.

Sea L_A la parte izquierda de la categoría *modA* de módulos finitamente generados sobre el álgebra de Artin A [HRS]. Entonces decimos que A es soportada a izquierda si $add(L_A)$ es contravariantemente finita en *modA*, donde $add(L_A)$ es la subcategoría llena aditiva de *modA* generada por L_A [ACT].

Damos aquí diversas caracterizaciones de las álgebras con esta propiedad. Por ejemplo, A es soportada a izquierda si, y sólo si, todo módulo en L_A es predecesor de un *Ext*-inyectivo en $add(L_A)$.

Sea *indA* el esqueleto de *modA*. Introducimos las subcategorías llenas R_0 y L_0 de *indA*, que tienen intersección finita con L_A y R_A respectivamente, y estudiamos algunas de sus propiedades. En particular, mostramos que $add(L_A)$ es contravariantemente finita en *modA* si, y sólo si, $add(R_0)$ es covariantemente finita en *modA*. Finalmente caracterizamos las álgebras A tales que R_0 es cofinita en *indA* y las álgebras laura tales que $L_0 \cup R_0$ es cofinita en *indA*.

Referencias

[ACT] I. Assem, F. U. Coelho y S. Trepode: *The left and the right part of a module category*, J. Algebra vol. 281, no. 2 (2004) pp. 518-534.

[HRS] D. Happel, I. Reiten y S. O. Smalø: *Tilting in abelian categories and quasitilted algebras*, Memoirs Amer. Math. Soc. 575 (1996).

Cohomología de pares trenzados de Galois

M. Suárez–Alvarez
Universidad de Buenos Aires

En este trabajo determinamos completamente la cohomología de un par trenzado de un álgebra y una coálgebra en caso que el par satisfaga la condición de Galois. El resultado obtenido muestra que la teoría de cohomología considerada, introducida por Brzezinski, captura la información esperada, cuando uno considera a los pares trenzados galoisianos como la versión no conmutativa de los fibrados principales.

Análisis

Avances sobre un problema de Sawyer

Sheldy Ombrosi
Universidad Nacional del Sur
sombrosi@uns.edu.ar

Carlos Peréz Moreno
Universidad de Sevilla

Estamos interesados en caracterizar los pesos $v(x)$ para los cuales se cumple la desigualdad de tipo débil:

$$wv\{x : Mf(x) > tv(x)\} < C/t \int f(x)Mw(x)dx, \tag{1}$$

donde M denota la maximal de Hardy-Littlewood.

Si w pertenece a A_1, la desigualdad anterior implica que,

$$wv\{x : Mf(x) > tv(x)\} < C/t \int f(x)w(x)dx. \tag{2}$$

Encontrar los buenos pesos $v(x)$ (siempre asumiendo que $w(x)$ está en A_1) para los cuales esta desigualdad es cierta ya es un problema interesante, de hecho este problema se puede estudiar considerando en lugar del operador M, una integral singular o también una integral fuertemente singular.

Este tipo de desigualdad en primer lugar fue estudiada por E. Sawyer en [Sa], él probó que si $w(x)$ y $v(x)$ son pesos en A_1 entonces vale la desigualdad (2) en dimensión 1. Recientemente, D. Cruz-Uribe, J. Martell y C. Pérez generalizaron el resultado de Sawyer a más dimensiones y además dieron una condición independiente de la de Sawyer, concretamente, probaron que si w está en A_1 y el producto $vw \in A_\infty$, entonces también vale (2) y más aún vale cambiando la maximal M por un operador de Calderón-Zygmund. Sin embargo, si bien las condiciones anteriores sobre el peso v son suficientes, no son necesarias. Precisamente en [OP] hemos probado que si $v(x)$ es en peso potencia de la forma $1/|x|^{rn}$, con $r > 1$ (en dimensión n), también vale la desigualdad (1) (este será el principal resultado que presentaremos en la comunicación). Este tipo de peso es singular (ni siquiera es localmente integrable) y Además es muy sencillo ver que no pueden cumplir ninguna de las condiciones anteriores. Evidentemente la clase de pesos que caracteriza cuales son los buenos pesos $v(x)$ para que se cumpla (1) tiene que ser mucho más amplia que A_1 y de hecho tiene que permitir un alto grado de singularidad de los pesos. Ahora, que esta clase de pesos sea amplia, no implica que contenga a cualquier peso, de hecho no es díficil ver que si estamos en dimensión n el peso $1/|x|^n$ no es un buen peso para la desigualdad (1).

Referencias

[CMP] D. Cruz-Uribe, J. Martell y C. Pérez, *Extrapolation results for non $A\_\{\infty\}$ weights and a problem by Sawyer.* Enviado.

[OP] S. Ombrosi y C. Pérez, *Advances in weak weighted inequalities.* En redacción.

[Sa] E. Sawyer, *A weighted weak type inequality for the maximal function*. Proc. Amer. Math. Soc. 93 (1985), 610-614.

The convolution product of n-dimensional ultrahyperbolic operator of $(\frac{n}{2}-k-1)$-th derivative of Dirac's delta in hypercone

Manuel A. Aguirre T.
Núcleo Consolidado Matemática Pura y Aplicada(NuCOMPA)
Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro
maguirre@exa.unicen.edu.ar

In this paper we obtain a relation between the distribution $\delta^{(\frac{n}{2}-l-1)}(u)$ and the n-dimensional ultrahyperbolic operator iterated $s-times$. As consequence we give a sense to convolution distributional product of $L^s\left\{\delta^{(\frac{n}{2}-k-1)}(u)\right\} * L^t\left\{\delta^{(\frac{n}{2}-l-1)}(u)\right\}$. Our convolution product result in a generalization of the convolution product $\delta^{(\frac{n}{2}-k-1)}(u) * \delta^{(\frac{n}{2}-l-1)}(u)$ due to M.Aguirre T. (cf. [1])

[1] Manuel A. Aguirre T., Two Special Convolution Products of $(\frac{n}{2}-k-1)$-th Derivatives of Dirac Delta in Hypercone, Applied Mathematics E-Notes, 1 (2001), 34-39.

Un caso de bifurcación de Hopf

Ana Torresi
Universidad Nacional del Sur
atorresi@criba.edu.ar

En este trabajo se determina la existencia de órbitas periódicas locales que nacen de una solución estacionaria de un sistema uniparamétrico de ecuaciones diferenciales ordinarias en $\mathbb{R}^n$ de la forma

$$\frac{du}{dt}+Au+B(\lambda)u=F(u,\lambda). \tag{3}$$

El parámetro de bifurcación λ varía en $\mathbb{R}$, la matriz A tiene un autovalor imaginario puro $\pm i\mu_0$ simple y un múltiplo entero de éste $\pm i\mu_0\kappa$, de multiplicidad algebraica $r>1$ y multiplicidad geométrica uno. $F(u,\lambda)$ es un operador C^∞, que verifica $F(0,\lambda)=0$ y $(\partial F/\partial u)(0,\lambda)=0$.

Se prueba la existencia de al menos una curva (u,λ) de soluciones no triviales periódicas del sistema que nace de la solución estacionaria $u=0$ en el punto $(0,0)$ bajo ciertas condiciones. Se obtiene la ecuación reducida y el número de ramas de bifurcación.

Derivaciones H-S: un teorema de estructura y aplicaciones

Ana L. Barrenechea y Carlos C. Peña
UNCentro - FCExactas - NuCoMPA - Dpto. de Matemáticas
ccpenia@exa.unicen.edu.ar, analucia@exa.unicen.edu.ar

Consideramos derivaciones sobre el espacio de operadores de Hilbert-Schmidt en un espacio de Hilbert separable. Adoptando un punto de vista matricial, considerando matrices infinitas con la métrica de Frobenius, determinamos la estructura de las mismas. Se establece que no toda derivación es interna, probando la existencia de derivaciones *cuasi-internas*. En particular, se analiza la existencia y se caracterizan derivaciones de tipo Hadamard. Finalmente se consideran algunas aplicaciones, en particular al espacio de operadores nucleares.

Geometría, sesión I

The Lagrange-d'Alembert-Poincaré equations and integrability for the rolling disk

Hernán Cendra and Viviana Díaz
Universidad Nacional del Sur and CONICET
uscendra@criba.edu.ar, vividiaz@criba.edu.ar

Classical nonholonomic systems are described by the Lagrange-d'Alembert principle. The presence of symmetry leads, upon the choice of an arbitrary principal connection, to a reduced variational principle and to the Lagrange-d'Alembert-Poincaré reduced equations. The case of rolling bodies has a long history and it has been the purpose of many works in recent times, in part because of its applications to robotics. In this work we study the classical example of the rolling disk. We consider a natural abelian group of symmetry and a natural connection for this example and obtain the corresponding Lagrange-d'Alembert-Poincaré equations written in terms of natural reduced variables. One interesting feature of this reduced equations is that they can be easily transformed into a single ordinary equation of second order, which is a Heun's equation.

References

Abraham, R. and J.E. Marsden [1978] *Foundations of Mechanics.* Second Edition, Addison-Wesley.

Bloch, A.M., P.S. Krishnaprasad, J.E. Marsden, and R. Murray [1996] Nonholonomic mechanical systems with symmetry, *Arch. Rat. Mech. An.*, **136**, 21–99.

Borisov, A.V., I.S. Mamaev and A.A. Kilin [2002] Dynamics of rolling disk, *Regular and Chaotic Dynamics*, **8**, 201-212.

Cendra, H., J.E. Marsden and T.S. Ratiu [2001a] Lagrangian reduction by stages, *Memoirs of the AMS*, **152**, no **722**.

Cendra, H., Marsden J. E. and Ratiu, T.S. [2001b] Geometric Mechanics, Lagrangian reduction and Nonholonomic Systems, *Mathematics Unlimited, 2001 and Beyond*, Springer.

Cushman, R., J. Hermans and D. Kemppainen [1995] The rolling disk, *Nonlinear dynamical systems and chaos*, Groningen, 21–60. [1996] *Prog. Nonlinear Differential Equations Appl.*, **19**, Birkhäuser, Basel.

Eta invariants and class numbers of quadratic fields

Ricardo A. Podestá
FaMAF–CIEM, Universidad Nacional de Córdoba
podesta@mate.uncor.edu

Let D be a self-adjoint elliptic differential operator of order d acting on a compact Riemannian manifold M. Then, M has a discrete spectrum, $Spec(M)$, of real eigenvalues with finite multiplicity. To study the asymmetry of $Spec(M)$, Atiyah, Patodi and Singer introduced the series

$$\eta(s) = \sum_{0 \neq \lambda \in Spec(M)} sign(\lambda)\,|\lambda|^{-s}, \qquad Re(s) > \tfrac{n}{d}.$$

This series has a meromorphic continuation to $\mathbb{C}$ that is finite at $s = 0$. The number $\eta = \eta(0)$ is called the η-*invariant*.

Let p be an arbitrary fixed prime. For every compact flat manifold M having holonomy group isomorphic to $\mathbb{Z}_p$ and with an arbitrary spin structure ε defined on TM, we compute the eta series $\eta(s)$ associated to the Dirac operator D and the corresponding η-invariant. We show that for those spin $\mathbb{Z}_p$-manifolds having asymmetric Dirac spectrum, that is $\eta(s) \not\equiv 0$, the η-invariant is a rational multiple of the class number h_p of the quadratic number field $\mathbb{Q}(i\sqrt{p})$.

Integrales de camino en grupos de Lie

Guillermo Capobianco
Universidad Nacional del Sur y CONICET
capobian@criba.edu.ar

Walter Reartes
Universidad Nacional del Sur
reartes@uns.edu.ar

En este trabajo se estudia la evolución dinámica de la función de onda de la mecánica cuántica definida en un grupo de Lie compacto G y en un G–espacio homogéneo. Se propone un formalismo similar al de integrales de camino de Feynman, calculadas en base a una discretización temporal y poniendo énfasis en el propagador infinitesimal de un paso. El tratamiento propuesto tiene la ventaja de ser intrínseco al no recurrir a un “embedding” en un espacio euclidiano. Se aplica la teoría desarrollada a un par de ejemplos sencillos.

Geometría, sesión II

Algunas generalizaciones del conocuneus de Wallis

Graciela S. Birman
CONICET – NUCOMPA – Fac. de Ciencias Exactas, UNCPBA
gbirman@exa.unicen.edu.ar

El conocuneus de Wallis o cuña cónica es un sólido encerrado por una superficie dada por la ecuación $(xz)^2 = a^2(x^2 - y^2)$. Tomando $x = a$, se obtiene una circunferencia de radio a, es decir, que ubicando el sistema de referencia de modo que el eje x esté determinado por los puntos $(0,0,0)$ y $(a,0,0)$, esta superficie es similar a un "tubo" que a distancia a del origen es un círculo y cada punto de este círculo se une al eje z linealmente, tomando todos los valores entre a y $-a$.

En este trabajo se presentan varias generalizaciones del conocuneus de Wallis, tanto en su expresión cartesiana como paramétrica.

A partir de la expresión de sus respectivos volúmenes se obtienen distintas fórmulas integrales.

Control óptimo de la esfera elástica rodante

Sebastián José Ferraro
Universidad Nacional del Sur

En este trabajo se estudia el sistema que consiste en una esfera elástica sujetada entre dos placas horizontales paralelas. La placa inferior está fija, mientras que la superior puede desplazarse horizontalmente. En la literatura de control se lo llama usualmente el sistema *ball-plate*. Al hacer rodar la esfera a lo largo de una trayectoria, sin que se deslice o gire sobre el punto de contacto, se obtiene finalmente una traslación y una reorientación de la misma. El control óptimo del sistema consiste en encontrar la trayectoria más corta entre aquéllas que den lugar a una traslación y reorientación dadas. Poniendo el problema en un marco geométrico adecuado, se obtiene un *problema isoholonómico* en un fibrado principal. Mediante técnicas de reducción Lagrangiana se pueden escribir las ecuaciones de las trayectorias óptimas, y caracterizar las soluciones completamente en términos de funciones elípticas. Se encontró además una analogía entre el control óptimo de este sistema y la dinámica de un péndulo simple.

Curvatura total central de curvas en el espacio tridimensional de Lorentz

Graciela M. Desideri
NUCOMPA – Facultad de Ciencias Exactas, UNCPBA
gmdeside@exa.unicen.edu.ar

Thomas F. Banchoff [Duke Math. Journal (1969), 281-289] define el concepto de curvatura total central para curvas espaciales contenidas en una esfera euclídea. Aunque este concepto fue extendido a curvas en ciertas variedades riemannianas, no ha sido tratado en espacios con métrica indefinida. En este trabajo estudiamos la generalización de la curvatura total central a curvas en los espacios Lorentzianos de dimensión 2 y 3. Además, mostramos la relación de dicha curvatura con la curvatura total absoluta por medio de fórmulas integrales.

Differential algebraic equations

Hernán Cendra
Universidad Nacional del Sur and CONICET
uscendra@criba.edu.ar

The basic questions about existence and uniqueness of solutions for differential-algebraic systems are still not completely answered. The so called *reduction algorithm* gives a partial answer but it requires some regularity condition to be satisfied at each step of the algorithm. The theory under this kind of now standard assumption has reached a point where the basic facts are well established and new ideas seem to be needed. In recent works the regularity assumption has been eliminated at the cost of working with a limited class of functions, like complex polynomials. In this communication a new approach is proposed, which relies on the theory of subanalytic sets, including the usage of some desingularization results. As an example, a problem of integrability of a system with rolling constraints in mechanics is briefly explained.

Lógica, sesión I

Observaciones sobre congruencias en álgebras de Ockham

Sergio Celani y Leonardo Cabrer
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires

En este trabajo describiremos el retículo de las congruencias de un álgebra de Ockham cuyas álgebras cocientes pertenecen a las classes de Urquhart $\mathbf{P}_{m,n}$. Esta descripción se obtiene utilizando la dualidad para las álgebras de Ockham desarrollada por Urquhart en [2] Este trabajo es una generalización natural de algunos resultados obtenidos por Rodriguez y Silva en [3].

Referencias

[1] Blyth, T.S. & Varlet, J.C. Ockham Algebras. Oxford University Press. (1994).

[2] Urquhart, A. Distributive Lattices with a Dual Homomorphic operation. Studia Logica, 38 (1979) 201-209.

[3] Rodriguez, P.J.V. & Silva, H.J. Ockham Congruences Whose Quotient Algebras are Boolean. Communications in Algebra, 31, 11 (2003) 5391-5404.

$(0,1)$-matrices booleanas de orden n simétricas con diagonal nula

Luiz F. Monteiro[1], Aída Kremer[2] y Agustín Claverie[3]
[1]INMABB-CONICET-Universidad Nacional del Sur, [2]Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur, [3]Laboratorio de Matemática, Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur
luizmont@criba.edu.ar, akremer@uns.edu.ar, claverie@uns.edu.ar

Si $\mathbf{2}$ denota el álgebra de Boole $\{0,1\}$ y $n \in \mathbf{N}$, sea $M_n^s(\mathbf{2})$ el conjunto de todas las matrices de orden n simétricas con diagonal nula. A cada $A \in M_n^s(\mathbf{2})$ le corresponde una sucesión de n términos formada por la suma de los elementos de cada una de sus filas. Bajo una cierta relación de equivalencia $\sim$ definida sobre $M_n^s(\mathbf{2})$ el cardinal del conjunto cociente $M(n) = M_n^s(\mathbf{2})/\sim$ es igual al cardinal del conjunto de todos los grafos simples no isomorfos con n vértices. Indicamos una fórmula recursiva para determinar $|M(n)|$.

Álgebras de Łukasiewicz de clausura trivalentes libres

L. Rueda y A. M. Suardíaz
Universidad Nacional del Sur

Las álgebras de Łukasiewicz de clausura trivalentes son álgebras de Łukasiewicz con un operador de clausura tales que el conjunto de los elementos abiertos es un álgebra de Heyting trivalente. La clase de estas álgebras forma una variedad, a la que notaremos con $\mathcal{C}_T\mathcal{L}_3$. En este trabajo probamos que si $(3^m, C)$ es un álgebra de esta variedad, entonces $C(3^m)$ es una subálgebra de Łukasiewicz de 3^m y que todo elemento finito de $\mathcal{C}_T\mathcal{L}_3$ es producto directo de un álgebra de Boole de clausura por un álgebra de Łukasiewicz trivalente monádica.

Además, mostramos que las álgebras directamente indescomponibles finitas de $\mathcal{C}_T\mathcal{L}_3$ son las álgebras finitas cuyo reticulado de congruencias tiene un único coátomo, esto es, las álgebras tales que el reticulado de los elementos abiertos es de la forma $\{0\} \oplus B$, con B un álgebra de Boole finita. Obtenemos la factorización del álgebra libre finitamente generada de $\mathcal{C}_T\mathcal{L}_3$ en producto directo de factores directamente indescomponibles. Determinamos la estructura de cada factor y la cardinalidad del álgebra libre.

Medidas booleanas

Carlos E. Scirica
Universidad de Buenos Aires y Universidad Nacional de General Sarmiento

Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto, $(U, \cap, \Delta)$ un anillo de subconjuntos de X. Decimos que $\mu : (U, \Delta, \cap) \to (Z_2, +, \cdot)$ es una medida booleana (medida) si es una función $\sigma - aditiva$ en el sentido de Kolmogoroff, es decir μ es una función aditiva que verifica: si $A = \cup_{n \in N} A_n$ es una unión disjunta, con $A \in U$ y $A_n \in U$ para todo $n \in N$, entonces $\mu(A_n) = 0$ salvo finitos n y $\mu(A) = \Sigma_{n \in N} \mu(A_n)$.

Con esta definición, analizamos el comportamiento de la medida sobre sucesiones monótonas convergentes y a través de las mismas damos condiciones necesarias y suficientes para que una función $\mu : (U, \Delta, \cap) \to (Z_2, +, \cdot)$ aditiva sea una medida.

Sea $H \subset R^n$ localmente finito. La función μ_H que a cada subconjunto acotado S de R^n le asigna 1 si $|S \cap H|$ es impar, y 0 si $|S \cap H|$ es par, es una medida.

Una medida μ se dice *derivable* en x si $(\exists \varepsilon > 0)\,(\exists\, a \in Z_2)\ (\forall B)(B$ acotado, $x \in B\ y\ diam\,(B) < \varepsilon)$ $\Rightarrow \mu(B) = a$. El valor a se denomina el *diferencial* de μ en x, notado $d_\mu(x)$.

La medida μ_H definida anteriormente resulta derivable en todo R^n y demostramos que esa es la única medida derivable. Demostramos:

- Si μ es derivable y A es acotado, $sop(d_\mu) \cap A$ es finito. Además, $\mu(A) = \Sigma_{x \in A} d_\mu(x)$.
- Si μ es derivable y A es acotado, se define $\int \chi_A \, d_\mu = \mu(A)$.

Se define $\int f d_\mu = \mu(sop(f))$. Se dirá que $f = g\ a.e.$ si

$$\mu(\{x \in X \ / \ f(x) \neq g(x)\}) = \mu(\ sop\ (f)\ \triangle\ sop\ (g)) = 0$$

Sean $f_n,\ f, g$ medibles. La función definida por $f\ \hookrightarrow\ \int f \cdot\ d\mu$ satisface:

- es lineal
- si f_n converge monótonamente a f (i.e. $sop(f_n)$ es una sucesión monótona de conjuntos que converge a $sop(f)$), entonces $(\int f_n \cdot d\mu \longrightarrow \int f \cdot d\mu)$
- $(f = g\ a.e.) \Longleftrightarrow (\int f \cdot d\mu = \int g \cdot d\mu)$

Con Sym^- notamos al anillo de conjuntos generado por los intervalos de R de la forma $[a,b)$. Si $f : R^n \to Z_2$ es continua a izquierda, entonces la función $\mu_f : Sym^- \to Z_2$ definida por

$$\mu([a_1,b_1) \triangle [a_2, b_2) \triangle \cdots \triangle [a_n, b_n)) = f(a_1) \oplus f(b_1) \oplus f(a_2) \oplus f(b_2) \oplus \cdots \oplus f(a_n) \oplus f(b_n)$$

es una medida, denominada *medida de Lebesgue-Stieltjes* asociada a f.

Demostramos que si $\mu : Sym^- \to Z_2$ es una medida, entonces la función $f(t) = \mu([a,t))$ resulta continua a izquierda y $\mu = \mu_f$.

Referencias

[1] Halmos, P. R. *Lectures on Boolean Algebras*, D. Van Nostrand Company Inc., 1963

[2] Halmos, P. R. *Measure Theory*, Graduate Texts in Mathematics, 1974

[3] Kolmogorov A. N. y Fomin S. V. *Elementos de la Teoría de Funciones y Análisis Funcional*, Editorial Mir, 1975

[4] Vlad, S. E. *Introductory Topics in Binary Set Functions*, Analele Universitatti Din Oradea. Fascicola Matematica, Tomo VI, 1997-1998

Lógica, sesión II

Representation of cubic lattices by symmetric implication algebras

Manuel Abad and José Patricio Díaz Varela

In this paper a cubic lattice $L(S)$ is endowed with a symmetric implication structure and it is proved that $L(S) \setminus \{0\}$ is a power of the three-element simple symmetric implication algebra. The Metropolis–Rota's symmetries are obtained as partial terms in the language of symmetric implication algebras.

Relaciones asociadas a homomorfismos en álgebras de Hilbert finitas

Sergio Celani y Leonardo Cabrer
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires

En el VII Congreso Dr. Antonio Monteiro mostramos que cada álgebra de Hilbert tiene asociada una estructura $\langle X, \leq, \mathcal{S} \rangle$ llamada espacio de Hilbert (**H**-espacio). Recíprocamente todo **H**-espacio tiene asociada un álgebra de Hilbert. En esta ocasión concluiremos la descripción de la dualidad, dotando a los **H**-espacios de una estructura de categoría mediante relaciones binarias llamadas **H**-funcionales.

A su vez caracterizaremos por medio de esta dualidad aquellas álgebras de Hilbert que poseen ínfimo y supremo para el orden natural.

La inversión del cálculo clásico de predicados de primer orden

Juan Fernando Pendino
Universidad Nacional del Sur
`jpendino@uns.edu.ar`

En este trabajo proponemos un método para generar conjuntos de fórmulas que excluyan cualquier teorema del cálculo clásico de predicados de primer orden. Dicho método consiste en obtener conjuntos de fbf.s a los cuales llamamos, por oposición, *conjuntos inversamente-saturados*. Primero desarrollamos el método para el cálculo clásico de enunciados, y luego ampliamos los resultados al cálculo clásico de predicados de primer orden.

Matemática aplicada

Sobre la cantidad de equilibrios de Nash de un juego

Gabriela Jeronimo, Daniel Perrucci y Juan Sabia
FCEyN, Universidad de Buenos Aires

Uno de los conceptos más relevantes en teoría de juegos no cooperativos es el de equilibrio de Nash. Un *equilibrio de Nash* de un juego es una situación en la cual ningún jugador puede cambiar su estrategia unilateralmente y obtener un beneficio. Dado que en este modelo los distintos jugadores no se comunican entre sí para acordar un cambio simultáneo de estrategias, esto implica que en un equilibro de Nash el juego se estabiliza. J. Nash (1950) probó que todo juego tiene al menos un equilibrio, pero su demostración no es constructiva y no provee información acerca de la existencia de más de un equilibrio para un juego dado.

En esta comunicación, presentaremos un método simbólico que permite estimar la cantidad de equilibrios de Nash de un juego con n personas.

Los equilibrios de Nash de un juego pueden caracterizarse como el conjunto de las soluciones reales no negativas de un sistema de ecuaciones polinomiales en varias variables. Teniendo en cuenta la estructura particular de los polinomios que dan estas ecuaciones, construimos un algoritmo basado en técnicas de eliminación provenientes de la geometría algebraica, que obtiene una descripción de los equilibrios de Nash de un juego por medio de ecuaciones polinomiales univariadas. Finalmente, utilizando métodos simbólicos que trabajan con sistemas de ecuaciones y desigualdades polinomiales sobre los reales, estimamos la cantidad de equilibrios a partir de la descripción hallada.

Minimización de una función lineal sujeta a una restricción cuadrática convexa

T.I. Gibelli
Universidad Nacional del Sur–CONICET
tgibelli@uns.edu.ar

El problema de minimización de una función lineal sujeta a restricciones cuadráticas convexas aparece en varias aplicaciones, entre ellas, algunos problemas de optimización topológica tales como problemas de barras y optimización de material libre. Este tipo de problema usualmente se resuelve con algoritmos basados en métodos de punto interior y métodos de penalización.

En este trabajo se analiza la solución del problema de minimización de una función lineal sujeta a una única restricción cuadrática. En primer lugar se considera el caso en que la restricción cuadrática es estrictamente convexa. Luego se analiza el caso con restricción cuadrática convexa. En ambos casos, la solución del problema se obtiene considerando las características geométricas del mismo y una descomposición de la matriz asociada a la restricción cuadrática. Para el primer caso se utiliza descomposición de Cholesky y para el segundo, descomposición en valores singulares.

Polinomios eliminantes y codificación

Gabriela Jeronimo y Juan Sabia
FCEyN, Universidad de Buenos Aires

Es un hecho conocido que la teoría de primer orden de los cuerpos algebraicamente cerrados admite eliminación de cuantificadores. Muchos problemas asociados a sistemas de ecuaciones polinomiales pueden resolverse por medio de dicha eliminación; de allí el interés en obtener algoritmos efectivos de baja complejidad que la efectúen.

Al intentar diseñar dichos algoritmos se debe tener en cuenta por un lado, la forma en que se codificarán los polinomios de entrada y de salida y, por otro, la cantidad de operaciones involucradas en los procedimentos (llamada la complejidad del algoritmo en cuestión). Si la codificación se hace por medio de los vectores de coeficientes de los polinomios en cuestión (forma densa), la complejidad de los algoritmos es necesariamente exponencial en el cuadrado de la cantidad de variables involucradas. Una forma de evitar esta complejidad tan alta es cambiando la codificación de los polinomios. Un método que probó ser efectivo fue el de codificar polinomios como *straight-line programs* (es decir, por medio de programas que permitan evaluarlos). Hace tiempo ya, se conocen algoritmos de eliminación efectivos que utilizan la codificación de polinomios como straight-line programs con complejidades menores a los que utilizan la codificación densa.

Una pregunta que surge es qué sucede con los polinomios eliminantes clásicos (determinantes, resultantes, etc.). Son polinomios que pueden evaluarse fácil por un programa o no? En esta comunicación respondemos parcialmente esta pregunta: Mostramos que existe un straight-line program tanto para la resultante clásica como para la multihomogénea cuya complejidad es polinomial en el número de Bezout correspondiente al sistema genérico asociado a la resultante y en el número de variables de estos polinomios. Más aún, mostramos un algoritmo efectivo para calcular dicho programa de evaluación.

Existencia y unicidad de las soluciones estacionarias de la ecuación del calor semi-lineal por medio de homotopías

Ezequiel Dratman[1], Guillermo Matera[2]

[1]FCEyN, Universidad de Buenos Aires, [2]Instituto de Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento, y CONICET

edratman@dc.uba.ar, gmatera@ungs.edu.ar

Esta comunicación trata con las aproximaciones numéricas de las soluciones estacionarias simétricas de la ecuación del calor semi-lineal con condiciones de borde de tipo Neumann no lineales, es decir, las soluciones del problema:

$$\left\{\begin{array}{rcll} u'' & = & u^p & \text{en } (0,l), \\ u'(0) & = & 0, & \\ u'(l) & = & u^q(l). & \end{array}\right. \tag{4}$$

En [3] se demuestra que si $p > 2q-1$ entonces existe una única solución positiva de (4). A pesar de esto, muy poco se conoce acerca de las soluciones de las correspondientes discretizaciones.

Nosotros demostramos que la discretización de (4) que se obtiene considerando un esquema de diferencias finitas de segundo orden, es decir, el sistema de ecuaciones polinomiales:

$$\left\{\begin{array}{rcll} 2(lh)^{-2}(u_2-u_1) & = & u_1^p, & \\ (lh)^{-2}(u_{k+1}-2u_k+u_{k-1}) & = & u_k^p, & (2 \leq k \leq n-1) \\ 2(lh)^{-2}(u_{n-1}-u_n)-2(lh)^{-1}u_n^q & = & u_n^p, & \end{array}\right. \tag{5}$$

con $h := (n-1)^{-1}$, tiene una única solución real positiva. Cabe destacar que este tipo de sistemas posee una cantidad exponencial de soluciones complejas, y por ende está "mal condicionado" desde el punto de vista de la resolución semi-numérica mediante algoritmos universales (cf. [1], [2]).

La demostración de existencia y unicidad se basa en el análisis de una deformación "suave" de (5), que proviene a su vez de una deformación de (4). Creemos que dicha homotopía puede ser útil a efectos de diseñar un método de continuación eficiente que permita aproximar la única solución positiva de (5).

Referencias

[1] D. Castro, M. Giusti, J. Heintz, G. Matera, L.M. Pardo. The hardness of polynomial equation solving. *Found. Comput. Math.*, 3(4):347–420, 2003.

[2] E. Dratman, M. De Leo, G. Matera. Numeric vs. symbolic homotopy algorithms in polynomial system solving: A case study. Aparecerá en *J. Complexity*, 2005.

[3] M. Chipot, M. Fila, P. Quittner. Stationary solutions, blow up and convergence to stationary solutions for semilinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, 60(1):35–103, 1991.

Geometry of the euclidean hamiltonian suboptimal and optimal paths in the $\mathcal{N}(K_n(\sqrt[n]{1}),D)$'s networks

Blanca I. Niel
Universidad Nacional del Sur
biniel@criba.edu.ar

Let us consider the network $\mathcal{N}=\{K_n(\sqrt[n]{1}),D\}$, where $K_n(\sqrt[n]{1})$ is the complete graph with vertices on the n^{th} roots of the unity and $D=(d_{ij})$ is the $n\times n$ matrix of the euclidean distance between nodes. The outcomes envisage the pathways yielded by greedy (nearest neighbor), antigreedy (farthest neighbor) and exhaustive optimum strategies of exploration on the euclidean hamiltonian cyclic and non cyclic paths which belong to the network. Worthy of acclaim are the ancillary details that become clarified. On account of them there is the possibility to enumerate the reflective euclidean hamiltonian cyclic paths by using the Euler function and the resolution of specific non cyclic euclidean hamiltonian path problems by the application of Huygens' principle.

The aims of this disclosure are reached by *two main results*. The first one comes from geometric optics circumstances at the spherical mirror which undergo Hamilton's principle and the second one from geometric arguments over the whole traversed lengths of the euclidean hamiltonian suboptimal on the network.

First Main result: Let $T(\alpha_i,\beta)_{1\leq i\leq n-1}$ be the overall travelled length of the geometric paths that start up at $C=(-R,0)$ on the surface of a spherical mirror when they touch at $P(\alpha_i)=(R\cos\alpha_i,R\sin\alpha_i)$ the miraged surface $n-1$ times and end up at $B=(R\cos\beta,R\sin\beta)$ with $-\pi<\beta<0$. $T(\alpha_i,\beta)$ is a continuous function everywhere and has n stationary critic points all of them relative maxima. The singular critic points embrace trajectories with less than n's piecemeal linear segments. Each stationary critic point evolves one n's piecemeal linear reflective trajectory. Moreover, these n different feasible reflective paths have distinct lengths as their specific counter or clockwise circulations. What is more, the overall lengths of them are ordered in a precise and strictly increasing chain of inequalities [4,5]. The geometric optics instances with $\beta=-\pi$ forecast the euclidean hamiltonian optimal in the $\mathcal{N}=\{K_{2p+1}(\sqrt[2p+1]{1}),D\}$'s networks as well as the natural bounds for the euclidean hamiltonian optima in $\mathcal{N}=\{K_n(\sqrt[n]{1}),D\}$'s networks.

Second Main result: The configuration of the euclidean hamiltonian cyclic maxima in the $\mathcal{N}=(K_{2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}),D)$'s networks with $n\geq 6$ are confirmed by the following chains of inequalities of feasible traversed overall lengths of euclidean cyclic hamiltonian suboptimal paths. Let $l_{\max},l_{\text{q.max}},l_{\min}$ be respectively $l_{\max}=2R$, $l_{\text{q.max}}=2R\cos(\frac{\pi}{n})$, $l_{\min}=2R\sin(\frac{\pi}{n})$, then the ensuing inequalities hold on:

$$\frac{n}{2}\,l_{\max}+(\frac{n}{2}-1)l_{\text{q.max}}+l_{\min}\;<2\,l_{\max}+(n-2)\,l_{\text{q.max}}\;<n\,l_{\max}\;;$$

$$\frac{n}{2}\,l_{\max}+(\frac{n}{2}-1)l_{\text{q.max}}+l_{\min}<n\,l_{\text{q.max}}\;<2\,l_{\max}+(n-2)\,l_{\text{q.max}}\;<n\,l_{\max}\;;$$

$$(\frac{n}{2}-k)\,l_{\max}+(\frac{n}{2}+k-1)\,l_{\text{q.max}}+l_{\max}\sin\left[(k+1)\frac{\pi}{n}\right],\quad k=0,1,2,\cdots,\frac{n}{2}-2\;;$$

each one of these terms forms a chain of strictly increasing whole length of euclidean cyclic hamiltonian configurations with respect to k. The latter ends up at $2\,l_{\max}+(n-2)\,l_{\text{q.max}}$ with $k=\frac{n}{2}-2$. It accomplishes the absolute maximum of the euclidean hamiltonian cycles on the $\mathcal{N}=(K_{2p+2}(\sqrt[2p+2]{1}),D)$'s networks.
Moreover, the length of the n-stargon of maximum density, when there is a euclidean hamiltonian cycle over the $\sqrt[2p+2]{1}$'s nodes that attains this overall length, i.e. $2p+2\neq 4m+2$, is located between the terms corresponding to $k=\frac{n}{2}-4$ and $k=\frac{n}{2}-3$.