SOBRE LOS PUNTOS SINGULARES DE LAS FUNCIONES ANALITICAS

POR CARLOS BIGGERI
(Buenos Aires)

El clásico teorema de Dienes (generalización del de Vivanti) afirma que el punto en el cual la circunferencia de convergencia de la serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad [1]$$

corta al semieje real y positivo del plano z, es singular para la función analítica definida por dicha serie, cuando se cumplen las dos hipótesis siguientes :

1ª) parte real de $a_n \geq 0$;

2ª) $|\text{Arg.}\, a_n| \leq \tau < \frac{\pi}{2}$, (siendo τ un valor fijo).

Nos proponemos en la presente nota generalizar este teorema, obteniendo el siguiente, que permite al afijo del coeficiente a_n moverse a lo largo de un camino tangente al eje imaginario de su plano.

TEOREMA I. — *Si se verifican las dos condiciones siguientes :*

1º) *La parte real del coeficiente a_n de la serie [1] no es negativa.* 2º) *El valor principal φ_n del argumento de a_n (para los valores de n tales que a_n es positivo), es tal que :*

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\cos \varphi_n} = 1, \qquad [2]$$

entonces, el punto en el cual la circunferencia de convergencia de la serie [1] corta al semieje real y positivo del plano z, es un punto singular para la función analítica, $f(z)$, definida por dicha serie.

Demostración : Sin restringir, en absoluto, la generalidad podemos suponer que el radio, R, de convergencia de la serie [1] es igual a la *unidad : demostraremos, entonces, que el punto $z = 1$ es singular para* $f(z)$. La demostración se basa en el siguiente lema, cuya demostración será el tema de una próxima nota.

Lema. — Si ponemos :

$$Y_n \equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \sum_{m=n}^{m=2n} a_m \cdot m^n \cdot e^{-\frac{2}{3}m},$$

se tiene :

a) es condición necesaria y suficiente para que el punto $z = 1$ sea singular para $f(z)$, que se verifique :

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|Y_n|} = 1;$$

b) es condición necesaria y suficiente para que el punto $z = 1$ sea regular para $f(z)$, que se verifique :

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|Y_n|} < 1.$$

Ahora bien, llamemos ρ_n al módulo de a_n y pongamos :

$$K_n \equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \sum_{m=n}^{m=2n} \rho_m \cdot m^n \cdot e^{-\frac{2}{3}m}.$$

En virtud del teorema de Vivanti y del lema se tiene :

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{K_n} = 1. \qquad [3]$$

Si llamamos $\cos \varphi_\xi$ al menor (en sentido amplio) de los valores de $\cos \varphi_m$, para $m \leq n \leq 2n$, tendremos :

$$|Y_n| \geq \cos \varphi_\xi \cdot K_n. \qquad [4]$$

Puesto que $\sqrt[n]{\cos \varphi_\xi} = \left(\sqrt[\xi]{\cos \varphi_\xi}\right)^{\frac{\xi}{n}}$ está comprendido entre $\sqrt[\xi]{\cos \varphi_\xi}$ y $\left(\sqrt[\xi]{\cos \varphi_\xi}\right)^2$, en virtud de la segunda hipótesis, se tiene :

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\cos \varphi_\xi} = 1. \qquad [5]$$

De [3], [4] y [5] se deduce :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\mathrm{Y}_n|} \geq 1,$$

y como $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\mathrm{Y}_n|}$ no puede ser mayor que 1, se verifica necesariamente :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|\mathrm{Y}_n|} = 1.$$

Si existiese *límite ordinario de* $\sqrt[n]{\rho_n}$, para $n \to \infty$, la condición [2] podría sustituirse por la siguiente condición más general :

$$\overline{\lim_{\xi\to\infty}} \sqrt[\xi]{\cos \varphi_\xi} = 1, \qquad [2']$$

siendo φ_ξ el argumento cuyo valor absoluto es *mayor* (en sentido amplio) que los valores absolutos de φ_n, para $n \leq m \leq 2n$.

En efecto, razonando como en el caso de una función analítica definida por una integral determinante se tiene : si existe *límite ordinario* de $\sqrt[n]{\dfrac{|f^{(n)}(\alpha)|}{n!}}$ (para algún α positivo y menor que la unidad), si $n \to \infty$, existe también *límite ordinario* de $\sqrt[n]{|\mathrm{Y}_n|}$, cuando el punto $z = 1$ es *singular;* por lo tanto, aplicando esta conclusión y el lema a la función $\dfrac{1}{1-z}$, se tiene :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathrm{H}_n} = 1 \qquad [6]$$

poniendo :

$$\mathrm{H}_n \equiv \left(\frac{2e}{3n}\right)^n \cdot \sum_{m=n}^{m=2n} m_n \cdot e^{-\frac{2}{3}m}.$$

Si llamamos ρ_μ al menor (en sentido amplio) de los valores de ρ_n, para $n \leq m \leq 2n$, tendremos :

$$|\mathrm{Y}_n| \geq \cos \varphi_\xi \cdot \rho_\mu \cdot \mathrm{H}_n. \qquad [7]$$

Puesto que : $\sqrt[n]{\rho_\mu} = \left(\sqrt[\mu]{\rho_\mu}\right)^{\frac{\mu}{n}}$ está comprendido entre $\sqrt[\mu]{\rho_\mu}$ y $\left(\sqrt[\mu]{\rho_\mu}\right)^2$, se tiene :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\rho_\mu} = 1. \qquad [8]$$

Por otra parte, razonando como más arriba, se deduce :

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\cos \varphi_\xi} = 1. \tag{9}$$

De [6], [7], [8], [9] y el lema, se infiere que el punto $z = 1$ es *singular* para $f(z)$.

Si $|\varphi_n|$ tiende a $\frac{\pi}{2}$, para $n \to \infty$, la condición [2] es equivalente a la siguiente :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\pi}{2} - |\varphi_n|} = 1. \qquad [2'']$$

Claro está, que si $|\varphi_n|$ tiene límite *distinto* de $\frac{\pi}{2}$, la condición [2] también es equivalente a la [2″], pero entonces nuestro teorema no da nada nuevo : se cumplen las condiciones del teorema de Dienes.

RÉSUMÉ

Sur les points singuliers des fonctions analytiques. — Je généralise dans la présente note le théorème de Dienes, en démontrant que : Si la partie réelle du coefficient a_n de la série [1] n'est pas négative, et si la valeur principale, φ_n, de l'argument de a_n, satisfait à la condition [2], alors, le point où la circonférence de convergence de la série [1] coupe le demi-ax réel et positif du plan z, est un point singulier pour la fonction analytique définie par cette série.

Je généralise ensuite ce dernier résultat, en remplaçant la condition [2] par [2′], pourvu qu'elle existe de la limite ordinaire de $\sqrt[n]{\rho_n}$.

Voici, à grands traits, la démonstration de ce théorème. On pose d'abord un lemme. En vertu du théorème de Vivanti et de ce lemme on a [3]. En appelant $\cos \varphi_\xi$ à la plus petite des valeurs de $\cos \varphi_m$, pour $m \leq n \leq 2n$, on a [4]. De [2] on déduit [5]. De [3], [4], [5] et du lemme on tire le théorème en question.

Dans une note prochaine, je démontrerai un résultat analogue à celui-ci pour les fonctions analytiques définies par des séries générales de Dirichlet.