COMUNICACIONES

Conservation de l'énergie et expérience de Shankland [1]

Par Felix Cernuschi

(Paris)

Dirac [2] a interprété le résultat de l'expérience de Shankland [3] sur la base de la théorie de Bohr-Kramers-Slater, c'est-à-dire en supposant que la simultanéité entre le quantum de la radiation diffusée et l'électron correspondant dans la radiation électronique secondaire n'existe pas quand nous utilisons une source de rayons γ de haute fréquence, et en conséquence que le principe de la conservation de l'énergie serait inaplicable dans les processus atomiques de grande énergie. L'experience de Bothe [4] et Geiger a montré que la simultanéité existe pour les rayons X. Dernièrement Bothe a fait de nouvelles expériences avec les rayons γ et a présenté les résultats au dernier Congrès de Physique à Copenhague en démontrant que la simultanéité existe aussi pour les radiations très dures. Par conséquent nous devons abandonner définitivement la théorie Bohr-Kramers Slater Dirac.

Peierls [5] a fait noter qu'une explication satisfaisante des résultats de Shankland pouvait être donnée en supposant que la simultanéité existe, mais que le principe de la conservation de l'énergie ne reste pas valable pour les processus élémentaires.

Nous voulons faire remarquer que les résultats, supposés exacts,

[1] Note présentée par M. Jean Perrin à l'Academie des Sciences de Paris (Séance du 12 oct. 1936).

[2] *Nature*, 137, 1936, page 296.

[3] *Phys. Rev.*, 49, 1936, page 8.

[4] *Zeits. f. Phys.*, 22, 1925, page 639.

[5] *Nature*, 137, 1936, page 904.

obtenus par Shankland, n'impliquent pas nécessairement l'abandon des lois de conservation.

Nous admettrons que la simultanéité et la conservation de l'énergie et du moment s'appliquent aux processus élémentaires, mais que, pour des énergies plus hautes qu'un million de volts, les électrons peuvent être excités au moment de la collision. Notre connaissance sur les particules élémentaires est pour le moment très insuffisante, et probablement quelques curieux résultats expérimentaux, qui paraissent ne pas confirmer le principe de la conservation de l'énergie, peuvent avoir une explication d'accord avec ce principe, mais en modifiant nos idées sur la nature des particules élémentaires. Quelques expérimentateurs ont trouvé, par exemple, des valeurs différentes pour la masse du neutron; il est possible que ces différences ne soient pas dues entièrement aux erreurs expérimentales, sinon produites par des états différents d'excitation des neutrons. En regard des électrons il n'y a pour le moment aucun fait expérimental qui prouve que les électrons ne peuvent avoir des états d'excitation. Nous croyons donc utile de donner une explication du phénomène de Shankland, sans supposer la non-validité du principe de la conservation de l'énergie, qui a été si fructueux pour la Physique, en partant de l'hypothèse des états d'excitation des électrons.

Dans cette hypothèse, l'équation de la conservation de l'énergie sera

$$h\nu - h\nu'' = h\nu' + (m_0c^2 + h\nu'')\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) \qquad [1]$$

et celle de la conservation de l'impulsion en coordonnées cartésiennes

$$\left\{\begin{aligned} \frac{h\nu}{c} &= \frac{h\nu'}{c}\cos\theta + \frac{m'}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\mathrm{V}\cos\varphi, \\ o &= \frac{h\nu'}{c}\operatorname{sen}\theta - \frac{m'}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\mathrm{V}\operatorname{sen}\varphi, \end{aligned}\right. \qquad [2]$$

ou ν, ν' sont les fréquences de la radiation incidente et diffusée et ν'' la fréquence qui correspondrait a l'énergie absorbée par l'électron au moment de la collision. En combinant [1] et [2],

$$\frac{\nu'}{\nu} = \frac{\left(\frac{\nu''}{\nu} - \frac{\nu'\nu''}{\nu^2}\right) + \frac{m'c^2}{h\nu}\left(1 - \frac{\nu''}{\nu}\right)}{1 - \cos\theta + \frac{m'c^2}{4\nu}}, \qquad [3]$$

ou

$$m' = m_0 + \frac{h\nu''}{c^2}.$$

Quand $\nu'' = 0$, l'équation [3], comme il est très facile de le voir, se réduit a la formule connue de l'effet Compton.

En donnant dans [2] différentes valeurs a ν', ν'' qui satisfassent a [1], nous obtenons une relation entre les angles θ et φ qui peut interpréter les résultats négatifs obtenus par Shankland. Le nombre des états d'excitation, et en conséquence les différentes valeurs de ν'' doivent être très limités.

Quelques expériences faites par Skobelzyn (1) paraissent prouver que l'effet Compton est vrai aussi pour de grandes énergies. En utilisant la formule de Debye-Compton, qui donne l'énergie des électrons après le choc en fonction de la fréquence de la radiation première, et en déterminant expérimentalement les valeurs $H_{\rho\,\max}$, il a obtenu avec une approximation suffisante le spectre de la radiation γ du Ra*C*. Nous croyons que cette expérience n'est pas définitive, étant donné qu'il a utilisé seulement les résultats expérimentaux correspondant a $\varphi = 0$, et d'un autre côté que la formule de l'énergie pourrait avoir une valeur statistique sans que soit nécessairement vraie la relation de Compton pour les processus élémentaires. Nous considérons que la meilleure solution pour éclaircir ce problème serait de déterminer directement au moyen d'intenses champs électrique et magnétique, si les électrons de la radiation secondaire peuvent avoir des différentes valeurs de masse.

Skobelzyn (2) a fait aussi des expériences avec des rayons γ très durs et très homogènes du T*h*C' pour étudier la répartition angulaire de l'émission β secondaire accompagnant la diffusion des rayons γ par l'effet Compton. La courbe expérimentale qu'il a trouvée n'est pas tout a fait d'accord avec la courbe correspondant a la formule Klein-Nishina. Il est possible que dans ce cas aussi une reconstruction de la théorie de Klein-Nishina, en tenant compte d'états d'excitation des électrons, donne des résultats théoriques plus concordants avec les faits expérimentaux.

(1) *Zeits. f. Phys.*, 43, 1927, page 354.

(2) *Comptes rendus*, 194, 1932, page 1914.

Sur un théorème de M. Glivenko [1]

Par Alberto González Domínguez
(Buenos Aires)

M. Paul Lévy [2] a démontré le théorème limite : soit une suite de lois de probabilités $\{ U_n(t) \}$ et une loi $U(t)$. Pour que l'on ait

$$\lim_{n \to \infty} U_n(t) = U(t)$$

en tout point t où $U(t)$ est continue, il suffit que la convergence de

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d U_n(t) \qquad \text{vers} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d U(t)$$

soit uniforme dans tout intervalle fini de la variable x.

M. V. Glivenko [3] a tout récemment démontré le théorème suivant, qui complète d'une façon bien intéressante celui de M. Lévy :

Soient une suite de lois de probabilités $\{ U_n(t) \}$ et une loi $U(t)$. Pour que l'on ait

$$\lim_{n \to \infty} U_n(t) = U(t),$$

en tout point t où $U(t)$ est continue, il faut et il suffit que

$$\lim_{n \to \infty} U(t) = U(t).$$

Comme on le voit, la condition que la convergence soit uniforme est superflue [4].

(1) Note transmise à l'Academie des Sciences de Paris par M. Emile Borel (Séance du 14 sept. 1936).

(2) *Comptes rendus,* 175, 1922, pages 854-856 ; *Calcul des Probabilités,* París, 2925, page 197.

(3) *Giornale dell'Instituto Italiano degli Attuari,* 1936, pages 160-167.

(4) *Des condition nécessaires et suffisantes d'une autre nature avaient été déjà données par M. M. Jacob, Comptes rendus,* 188, 1929, pages 754-755.

Nous donnons ici une démonstration très brève de ce théorème, fondée sur la remarque qu'il peut être considéré comme le corrélatif, pour les intégrales de Fourier-Stieltjes, d'un théorème de M. Carathéodory [1] sur les séries de Fourier des fonctions monotones.

La condition est nécessaire. La démonstration de cette partie du théorème ayant été déja donnée par M. Lévy [2], il est inutile de la reproduire ici. La condition est suffisante. Supposons en effet qu'elle soit vérifiée, et qu'il existe un point ξ, pour lequel $U(t)$ soit continue, et où $U_n(\xi)$ ne converge pas vers $U(\xi)$. Il y aura alors une suite partielle $\{ U_{n_i}(t) \}$, telle que $\lim U_{n_i}(\xi) = L \neq U(\xi)$. D'après un théorème connu de M. Helly [3], de la suite $\{ U_{n_i}(t) \}$, de fonctions non décroissantes, uniformément bornées, on peut extraire une suite partielle $\{ U_{n_{i_j}}(t) \}$ convergeant vers une fonction bornée no décroissante $g(t)$, dans tous les points où celle-ci est continue. Il est facile aussi de voir que la fonction $g(t)$ peut être choisie de manière à avoir

$$g(t) = \frac{1}{2} \{ g(t+0) + g(t-0) \}.$$

La suite des fonctions caractéristiques $\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dU_{n_{i_j}}(t) \right\}$ tend, en vertu de l'hypothèse, vers une fonction continue $\left(\text{à savoir la fonction } \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dU(t)\right)$. Cette suite remplit donc les conditions exigées dans un théorème de M. Bochner [4], d'où l'on peut conclure que l'on a l'égalité

$$\lim_{j \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dU_{n_{i_j}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dg()t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dU(t).$$

Donc, d'après le théorème d'unicité bien connu de M. Bochner [5] pour cette classe d'intégrales, appliqué a notre cas, on doit avoir

$$g(t) \equiv U(t).$$

(1) *Sitzungsberichte der Berl. Akad. der Wisss.* 30, 1920, pages 559-573.

(2) *Loc. cit.*, 1(*b*), page 195-196.

(3) *Sitzungsberichte der Akad. der Wiss. Wien*, 121, 1912, pages 265-297.

(4) *Vorlesungen ueber Fouriersche Integrale*, 1932, página 71 ; Cf. aussi Vitali-Sansone, *Moderna Teoria delle Funzioni di Variabile Reale*, Bologna, 1935, page 284.

(5) *Loc. cit.*, page 67.

On a donc

$$\lim_{j \to \infty} U_{n_{i_j}}(t) = U(t)$$

dans tous les points de continuité de U (t) et, en particulier,

$$\lim_{j \to \infty} U_{n_{i_j}}(\xi) = U(\xi).$$

Mais, $\{ U_{n_{ij}}(t) \}$ étant une suite partielle de $\{ U_{n_i}(t) \}$, on a aussi

$$\lim_{j \to \infty} U_{n_{i_j}}(\xi) = \lim_{i \to \infty} U_{n_i}(\xi) = L \neq U(\xi).$$

Mais cela est en contradiction avec l'égalité antérieure. Le théorème est donc démontré.

REMARQUE SUR LA NOTE PRÉCÉDENTE

Les mots « la condition que la convergence soit uniforme est superflue », qui figurent dans la note ci-dessus, remplacent les suivants, de la note originale publiée dans les *Comptes rendus*. « Tandis que le théorême de M. Lévy donne une condition suffisante, celui de M. Glivenko donne une condition nécessaire et suffissante ». Ces mots, en effet, pourraient être interprétés dans le sens que nous contestons la priorité de M. Lévy, ce que nous n'avons pas nullement voulu faire. L'eminent géomètre a été, en effet, le premier a donner des conditions caracteristiques pour la validité du théorème limite, comme il l'affirme dans sa note des *Comptes rendus* du 19 octobre 1936. Notre intention a été seulement de souligner que son théorème continue à être valable sans postuler l'uniformité de la convergence.

Nous ajoutons que cette même remarque (a savoir, que l'uniformité de la convergence est superflue), s'applique aussi a l'énoncé du théorème limite donné par M. Jacob (*loc. cit.*, p. 755). comme nous le démontrerons dans une prochaine note. — *A. G. D.*

Métrica e integración en los espacios abstractos

Por J. Rey Pastor
(Buenos Aires)

1. Desde el punto de vista físico el objeto del Cálculo integral es la medida de las magnitudes *compuestas por producto,* mientras que el Cálculo diferencial mide las magnitudes *compuestas por cociente* ([1]). Esta simple observación elemental, frecuentemente olvidada, nos condujo hace tiempo, de modo natural, a un concepto de integral en los espacios abstractos que contenía como casos particulares a todos los conocidos hasta entonces y en el cual, levemente modificado, quedan también contenidos los publicados posteriormente ([2]).

En contraste con la amplísima generalidad de conceptos con que se desarrolla la teoría de funciones a partir de Fréchet, Hausdorff, Hahn..., las más amplias teorías de la integración suelen limitarse al campo real, cuando no sólo es factible, sino indispensable, tanto desde el punto de vista aritmético, como físico ([3]), incluir las funciones vectoriales, siquiera las del espacio elemental E_n.

Análoga observación puede hacerse respecto del concepto de medida. Encariñados los analistas con la Geometría euclidiana, muchas de las teorías modernas adolecen de tal estrechez de perspectiva geométrica; pero después de las sistematizaciones de Riemann, Lie, Klein, resulta anacrónica la exclusividad de la métrica euclidiana; toda función vectorial aditiva merece igual título y aun dentro del campo real todas ellas, con condiciones muy amplias, son equivalentes por simple deformación.

Cabe, todavía, generalizar el concepto de métrica, adoptando funciones no aditivas; pero en virtud de un teorema de equivalencia,

([1]) *Curso cíclico de Matemáticas,* 1929. — *Notas críticas,* 1926.

([2]) Excluímos la *totalización* de Denjoy y teorías derivadas de ella, que son generalizaciones del cálculo de *primitivas* y no de la *integral* en el sentido de Leibniz.

([3]) Hay, en efecto, magnitudes físicas que vienen expresadas por integrales vectoriales en E_3. La ley de Biot-Salvat da una expresión integral vectorial del campo magnético. El potencial vectorial viene también expresado por integrales de este tipo. La integral del vector de Pointing expresa el flujo de energía electro magnética.

que comprende al de Kolgomoroff, demostramos que así no se logra aumentar la potencia del concepto de integral.

2. *Familias de conjuntos.* — La clasificación de las familias de conjuntos abstractos respecto de sus operaciones invariantes, no ha sido agotada. Además, en vista de la variedad de significados con que suelen usarse las palabras: cuerpo, familia aditiva, etc., conviene poner en claro las relaciones entre las operaciones elementales que conducen a los conjuntos siguientes: *suma* S, *suma estricta* Σ (o sea de conjuntos desunidos); *diferencia* D; *diferencia estricta* Δ (sustraendo contenido en el minuendo); *producto* P [1].

Las familias de conjuntos caracterizados por las operaciones que admiten, las cuales sirven además para engendrarlas, partiendo de ciertos conjnntos generadores son : P, Σ, $\Sigma\Delta$, ΣC, SP, SD; designando por C la operación de tomar complementarios respecto de un conjunto base perteneciente o no a la familia. Las familias fundamentales en la teoría de la integración son las P, SP y SD.

Def. 1. — Recordemos algunas definiciones conocidas: una descomposición $\varkappa'$ de un conjunto X en suma de conjuntos de una familia (P), se dice *posterior* a otra $\varkappa$, y se escribe $\varkappa < \varkappa'$, cuando cada elemento de $\varkappa'$ es parte de un elemento de $\varkappa$. *Producto* de dos descomposiciones es la que tiene como elementos los productos de los elementos de una y otra.

Se facilita la teoría de las descomposiciones introduciendo la noción de *indivisible.*

Def. 2. — El conjunto C de un familia (P) cuya suma es A se dirá *indivisible,* si ninguna parte de C pertenece a la familia.

Si los puntos de A pertenecen a la familia, son los indivisibles de ésta; pero pertenezcan o no, se verifica:

[1] Aunque no necesitamos manejar tales relaciones, he aquí el cuadro sinóptico que las compendia :

$$\begin{tikzcd}
S\,(\dot{+}) \arrow[d] \arrow[dr, dash] & D\,(\dot{-}) \arrow[d] \arrow[r] & P \\
\Sigma\,(+) \arrow[ur, dash] & \Delta\,(-) \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}$$

De las relaciones evidentes

$$A \dot{-} B = (A \dot{+} B) - B \qquad A \dot{+} B = A + (B \dot{-} A) \qquad AB = A - (A \dot{-} B),$$

resulta esta regla práctica : Cada operación comprende a sus inferiores señaladas por las flechas; cada par diagonal ligado por un trazo comprende a la operación superior que ocupa el vértice opuesto.

Nótese que introducimos el signo $\dot{-}$, análogo al $\dot{+}$ de Carathéodory, para la diferencia general entre conjuntos cualesquiera.

TEOR. 1. — *Dos conjuntos indivisibles son desunidos. La suma (estricta) de todos los indivisibles de* A *en una familia* (P) *es* A.

La descomposición de A en sus indivisibles la representaremos por ∞.

DEF. 3. — Una sucesión de descomposiciones de A tiende al límite $\varkappa_0$ ($\varkappa_r \to \varkappa_0$) si cada par de puntos de A separados en $\varkappa_0$ lo están también en alguna descomposición $\varkappa_r$ y por tanto en las siguientes. La notación $\varkappa \to \infty$ expresa que el límite de $\varkappa$ es la descomposición de A en sus indivisibles.

3. *Métricas vectoriales.* — Como los valores de las funciones consideradas son elementos (puntos o números) de espacios vectoriales, y en la teoría clásica de ellos no se admiten elementos excepcionales, es forzoso, a fin de dar mayor amplitud a la teoría de la integración, ampliarlos con la introducción de elementos impropios que no satisfacen a los postulados de la suma, siendo en cambio:

$$x + \omega = \omega + x = \omega \qquad (x \text{ elemento propio arbitrario})\ (^1)$$

DEF. 4. — La función μ (X) definida para cada conjunto X de una familia (SP), con valor finito o infinito, se llama *aditiva (infinitamente aditiva)* si el valor de cada conjunto suma de varios (de infinitos) conjuntos desunidos, coincide con alguna de las sumas de valores en estos conjuntos, que tenga sentido, si tal existe. Si todas estas sumas tienen el mismo valor finito, la aditividad se dirá *incondicional;* y *condicional* en caso contrario.

Una *métrica* (μ) está definida por una familia (SP) de conjuntos, llamados *medibles* y una función aditiva en él.

DEF. 5. — La sucesión (X_n) se dirá *finita* (μ) (o finita respecto de esta métrica) si todo conjunto X_n tiene medida finita. La sucesión creciente (X_n) se dirá *semifinita* (μ) si todos sus conjuntos desde uno X_h en adelante tienen medidas infinitas, pero los conjuntos $X_{i+1} - X_i = D_i$ ($i \geq h$) tienen medidas finitas y la serie $\sum_1^\infty \mu\,(D_i)$ converge. La sucesión decreciente (X_n) se dirá *semifinita* si todos sus conjuntos tie-

(1) No cabe en este resumen la exposición de la teoría completa; baste enunciar algunos resultados: la suma de dos números no opuestos es cualquiera de los puntos del segmento impropio que determinan; el cual se reduce a un punto si ambos coinciden. La suma de dos números opuestos es cualquier número. La suma de tres puntos impropios tales que ninguno es opuesto a los comprendidos entre los otros dos, es cualquier punto del triángulo que determinan.

nen medida infinita pero los conjuntos $X_i - X_{i=1} = \Delta_i$ tienen medidas finitas y converge la serie $\Sigma\mu(\Delta_i)$.

Teor. 2. — *Si la sucesión monótona* (X_n) *es finita o semifinita* (μ) *se verifica*

$$\lim_n \mu(X_n) = \mu(\lim_n X_n).$$

4. *Generación de métricas.* — El ejemplo de la longitud de un arco de curva sobre un espacio abstracto (y como caso particular la *variación total* de las funciones reales) sugieren inmediatamente la formación de funciones métricas, partiendo de funciones no aditivas, siendo este método preferible al de Haar, por su carácter constructivo.

Def. 6 — *Familia generatriz* de conjuntos en E_x es toda clase (P) de conjuntos G_i y *función generatriz* es toda función $g(X)$ definida en ella.

Partiendo de una familia generatriz $[G_i]$ se forman familias (SP) y (SD) por los métodos usuales; y mediante una función cualquiera $g(X)$ definida sobre la familia generatriz vamos a engendrar una métrica sobre ella, susceptible de ampliación a dichas familias (SP) o (SD).

Def. 7. — Un conjunto X se llama *medible* respecto de la generatriz $g(X)$ si las sumas $s = \Sigma g(X_i)$ correspondientes a las descomposiciones de X convergen para $\varkappa \to \infty$ hacia un límite $\mu(X)$ (1), es decir, si se verifica la condición de Cauchy

$$|s_m - s_n| < \varepsilon \qquad \text{para} \qquad m > \nu,\ n > \nu$$

Teor. 3. — Se demuestra fácilmente esta condición: *si* X *es medible respecto de la generatriz* $g(X)$ *lo son también todos sus conjuntos parciales.*

Teor. 4. — *La función métrica* $\mu(X)$ *tiene las propiedades de aditividad infinita respecto de* X, *y de linealidad respecto de la generatriz* $g(X)$. *Si la generatriz es aditiva, la métrica engendrada coincide con ella misma.*

5. *Funciones medibles.* — Como el concepto de función medible, según Lebesgue, solamente es aplicable a las funciones reales, puede edificarse la teoría de la integración de las funciones no reales sobre el concepto de función escalonada, abandonaudo el método besguiano. Cabe, sin embargo, proseguir éste, mediante la siguiente

Def. 8. — Diremos que la función $f(X)$ definida en el conjunto A

(1) En el lenguaje de Cavalieri y Kepler se enunciaría: « La medida de un conjunto es la suma de valores de la generatriz en sus indivisibles ».

es *medible* (M, N) si los conjuntos X correspondientes a los conjuntos Y de la familia N pertenecen a la famila M.

Para que la familia de las funciones medibles tenga propiedades interesantes y se pueda operar cómodamente dentro de ella, exigiremos que las familias M y N sean (SP) y con esta hipótesis resulta:

TEOR. 5. — *La suma y diferencia de funciones medibles* (M, N) *es también medible* (M, N).

Obsérvese que fijar la familia M es fijar una clase de conjuntos medibles en E_x; pero el concepto de función medible no sólo depende de él sino de la familia N, y al variar ésta se modifica la clase de las funciones medibles.

En cuanto al producto de funciones medibles carece de sentido si no se hacen hipótesis especiales sobre el espacio E_y.

Las funciones medibles más sencillas son las que llamamos *escalonadas*.

DEF. 9. — Función *escalonada* en el conjunto A es toda función de punto que solamente toma un número finito o sucesión numerable de valores distintos, con la condición de que todo conjunto $f(x) = a$ [1] pertenece a la familia M.

Brevemente: las funciones escalonadas son las funciones medibles (M, N′), siendo N′ un conjunto finito o numerable de puntos de E_y.

La relación anunciada está expresada así:

TEOR. 6. — *Si el conjunto* B *de valores de* $y = f(x)$ *sobre* A *es compacto en sí, la condición necesaria y suficiente para que la función sea medible* (M, N) *es que sea límite de una sucesión uniformemente convergente de funciones escalonadas* (M, N′).

6. *La integración.* — Mientras la integral (R) prefija la descomposición del conjunto básico A y solo es apta, por ende, para las funciones poco oscilantes, en cambio la convergencia de las sumas por defecto y por exceso en la integral (L) está asegurada, puesto que la oscilación es arbitrariamente pequeña en cada uno de los conjuntos medibles en que se descompone A, por resultar éstos como consecuencia de la descomposición efectuada en el contradominio Y y haber efectuado ésta dividiéndolo en intervalos iguales, arbitrariamente pequeños.

Ya en los casos más elementales se tropieza con el inconveniente de esta rigidez sistemática de entrambas teorías; funciones muy sencillas con uno o varios puntos de infinitud $\left(\text{p. ej. } 1 : \sqrt{x}\right)$ serían integrables

[1] La notación usual $E(f(x) = a)$ es innecesaria; la nuestra se justifica como las frases corrientes: *curva* $f(x, y) = 0$; *grupo* de puntos $f(x) = 0$.

(R) sin más que adoptar la descomposición del conjunto básico en infinitos intervalos; y funciones elementales que no son integrables (L), por tener medida infinita el conjunto base, siendo necesario recurrir al clásico proceso de convergencia de integrales, serían directamente integrables (L) sin más que adoptar una descomposición en infinitos intervalos decrecientes para el intervalo Y.

He aquí, pues, una primera generalización que se presenta con apremio ineludible, y que sólo ha sido emprendida parcialmente por algún autor : se impone adoptar un método de descomposición, no ya del campo X o del Y, sino del par (X, Y), que sea dependiente de la función a integrar y dotado de suficiente elasticidad para abarcar categorías extensas de funciones.

Otra generalización, que simplifica extraordinariamente la teoría de la integración, radica en abandonar el prejuicio euclidiano, adoptando métricas más generales; la teoría se unifica así y la integral ordinaria o euclidiana, así como la de Stieltjes, son casos particulares de la integral general, cuya teoría resulta mucho más sencilla por desligarse en cierto modo de la teoría de la medida. Los trabajos de Radon, Vallèe-Poussin y Fréchet pertenecen a este campo de ideas, que hemos desarrollado sistemáticamente con más amplia generalidad, en más de una ocasión [1].

Finalmente, resulta sorprendente que mientras el campo de variabilidad se considera por Fréchet y otros tratadistas con la más vasta generalidad imaginable, todos se mantienen dentro del estrecho campo real para la función, quedando excluídas hasta las modestísimas funciones analíticas, de estas teorías trazadas con tales pretensiones de potencia. Parece impostergable, pues, que ellas y en general las funciones vectoriales, deban quedar incluídas en toda teoría que aspire a una mayor eficacia.

Desde el punto de vista más abstracto, el problema céntrico del Cálculo integral a que conduce la idea física enunciada en la introducción, puede ser enunciado en formas diversas, pero en esencia equivalentes :

DEF. 10. — Definida una métrica en el espacio E_x y otra métrica en el espacio E_y engendrar una métrica en el espacio compuesto $E_x \times E_y$.

DEF. 11. — Dada una función $f(x)$ de *punto* en un conjunto A y una métrica (μ) sobre una clase (P) de subconjuntos de A, engendrar

[1] Escuetamente en *Notas críticas,* y didácticamente en nuestro curso autografiado sobre *Teoría general de funciones*.

funciones *aditivas* de conjunto sobre dicha clase, que sean *lineales* respecto de $f(x)$.

Cada conjunto C del espacio $E_z = E_x \times E_y$ está definido por una función *punto → conjunto*, que designaremos así : $Y = Y(x)$ [1] y diremos que ésta es medible (μ, ν) si el conjunto X definido por la condición $y = y_0$ es medible (μ), es decir, pertenece a la clase M para casi todos los puntos y_0 y el conjunto $Y(x = x_0)$ es medible (ν) para casi todos los puntos x_0.

Expresado geométricamente :

DEF. 12. — *Un conjunto es medible si casi todas sus secciones $x = x_0$, $y = y_0$ son medibles.*

Para establecer la métrica de E_z consideremos las infinitas descomposiciones del conjunto base A en conjuntos de la clase M, descomposiciones que expresaremos así : $A = \Sigma\Delta X$; y a cada punto de ΔX corresponde un conjunto $Y_i = Y_i(x)$ de la clase N y por tanto una medida $\nu(Y_i)$. Si para un cierto sistema de descomposiciones $\varkappa \to \infty$ existe el límite del segundo miembro, cualquiera que sea el punto elegido de cada conjunto, la función de conjunto buscada con la misma notación de Leibniz, queda definida así :

$$\mu\nu(Z) = \lim_{\varkappa} \Sigma\mu(\Delta_i X) \times \nu(Y_i) = (\mu, \nu)\int_A Y \times dY. \qquad [1]$$

resultando otra integral con los factores permutados si la multiplicación $\times$ no es conmutativa.

Las funciones μ, ν pueden ser reales o vectoriales, pero en este caso debe estar definida la multiplicación y la convergencia; como acontece, por ejemplo, con los vectores de E_3, donde resultan dos tipos distintos de integral, escalar y vectorial; y como sucede también en E_2, donde la fórmula [1] conduce a la integral compleja ordinaria.

Nótese que la mayor amplitud del concepto definido por [1] respecto de la integral de función numérica (real o vectorial) sobre conjunto abstracto, es más aparente que efectiva, puesto que se verifica evidentemente:

$$(\mu, \nu)\int_A Y \times dX = (\mu)\int_A f(x) \times dX, \qquad [2]$$

siendo $f(x)$ la medida (ν) del conjunto $Y = f(x)$.

Sin especiales dificultades técnicas se demuestran las propiedades : *Aditividad* (infinita) respecto del conjunto básico ; *linealidad* respecto

[1] Los cuatro tipos posibles de funciones los representamos así :

$$y = f(x), \qquad Y = F(x), \qquad y = f(X), \qquad Y = F(X).$$

de la función integrando; *linealidad* respecto de la métrica, *integración por partes :*

$$(\mu, \nu) \int_A Y \times dX = (\nu, \mu) \int_B dY \times X$$

que expresa la permutabilidad de los dos conjuntos componentes (¹).

Refiriéndonos especialmente a la forma aritmética (2) se demuestra igualmente, mediante el criterio de Cauchy, el teorema fundamental de existencia de la integral en los dos casos clásicos que suelen estudiarse en la integral de Stieltjes; cuando la función integrando es *continua* y la métrica de *variación acotada*, o bien inversamente.

La integral de la función de variable compleja, así como como las integrales escalares y vectoriales de E_3 quedan incluídas en este criterio elemental; pero el análisis completo de los tipos de funciones integrables presenta dificultades que aquí no vamos a abordar.

Quedaría por analizar una generalización posible, admitiendo métricas no aditivas; el ejemplo clásico de la longitud del arco de curva sugirió sin duda a Kolgomoroff la idea de extender el concepto de integral, con el inevitable sacrificio de la linealidad, que parece ser la propiedad esencial de todo concepto digno de este nombre; pero en realidad tal proceso coincide con el que nos condujo a engendrar métricas por suma de indivisibles, y no es preciso proseguirlo más allá; en efecto, se demuestra mediante un sencillo principio de equivalencia, que toda integral en el sentido de Kolgomoroff, obtenida con el proceso (4) partiendo de una función g (X) no aditiva, se reduce a una integral en nuestro sentido estricto, sustituyendo dicha función g (X) por su equivalente μ (X) que es aditiva (²) quedando, por tanto, incluída la teoría de Kolgomoroff, como todas las otras, dentro del concepto que apenas hemos esbozado y en breve desarrollaremos didácticamente. Quede para entonces la justificación de nuestro punto de vista, discrepante del eminente matemático ruso: objeto del cálculo integral es la formación de funciones aditivas de conjunto partiendo de funciones de punto.

(¹) En la teoría elemental de la integral queda oculto este importante significado geométrico de la integración por partes, a causa de usar funciones de punto en vez de funciones de conjunto.

(²) La idea no tiene nada de sorprendente; baste recordar que los momentos de arcos de curva respecto de ejes o centros cualesquiera pueden definirse como límites de sumas de productos de una cierta función de punto (distancia o potencia de distancia al centro o eje) por las longitudes de las cuerdas (función no aditiva); o bien se pueden sustituir éstas por los elementos de arco, es decir, por infinitésimos uniformemente equivalentes, que forman función aditiva.