SOBRE LOS PUNTOS SINGULARES DE LAS FUNCIONES ANALITICAS (*)

por CARLOS BIGGERI (Buenos Aires)

El teorema demostrado en mi nota "Sobre los puntos singulares de las funciones analíticas" (R. U. M. A.; Nº 1, Vol. 1 pág. 5) se puede generalizar a las funciones analíticas definidas por series generales de Dirichlet, a saber: $\Sigma\, a_n\, e^{-\lambda_n}$

Teorema I. *Si se verifican las condiciones siguientes:*

1º) *La parte real del coeficiente* a_n *de la serie de Dirichlet no es negativa (desde un valor de* n *en adelante)*;

2º) *El valor principal* φ_n *del argumento de* a_n *(para los valores de* n *tales que* a_n *no es nulo, es tal que* $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\cos \varphi_n} = 1$,

entonces, el punto real de la recta de convergencia de la serie es singular para la función analítica que define dicha serie.

Este teorema generaliza los teoremas de Fekete (C. R. t. 150, 1910 y t. 151, 1910) y de Landau (Math. Ann., t. 61, 1905).

La condición [2] es susceptible de una pequeña ampliación.

El lema enunciado en mi nota anterior puede servir para generalizar algunos teoremas ya clásicos. Una generalización interesante es la que hemos logrado del teorema enunciado por Lecornu (C. R., t. 104, 1887, p. 349-352) y demostrado por Fabry (Annales scientifiques de l'Ecole Normale Superieure, 3.e série, t. XIII, 1896). En efecto: si llamamos ϱ_n y φ_n al módulo y al argumento, respectivamente, del coeficiente a_n de la serie: $\Sigma\, a_n . z^n$ y R al radio de convergencia de dicha serie, el teorema de Lecornu-Fabry asegura que si se verifica:

a). *existe límite ordinario, para* $n \to \infty$, del cociente $\varrho_n / \varrho_{n+1}$.

b). *existe límite ordinario, para* $n \to \infty$, *de la diferencia* $\varphi_n - \varphi_{n+1}$; *entonces el punto* $z = R$ *es singular para* $f(z)$.

Ahora bien, mediante el lema hemos conseguido ver que:

Teorema II. *Para la validez de la conclusión del teorema de Lecornu-Fabry, no es necesaria la hipótesis* a), *es suficiente* b).

Estos dos teoremas así como la generalización del II a las series de Dirichlet, los demostraremos en notas próximas.

(*) Algunas observaciones críticas sobre esta nota y la anterior del mismo autor aparecerán en otro número. (N. de la Red.).