SOBRE LA INVERSION DE INTEGRALES DE LAPLACE ABSOLUTAMENTE CONVERGENTES

por A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ

Sean las integrales de Laplace y de Laplace-Stieltjes respectivamente:

$$(1) \quad F(x) = \int_0^\infty e^{-xt} f(t)\, dt \qquad (f(t) \in L^p,\ 1 \leqq p < \infty),$$

$$(2) \quad F(x) = \int_0^\infty e^{-xt}\, d\alpha(t) \qquad \left(\int_0^\infty |d\alpha(t)| < \infty\right),$$

y consideremos la función

$$(3) \qquad g(r, x) = \Sigma\, a_n\, \varphi_n(x)\, r^n,$$

en la cual $\varphi_n(x)$ es la función de Laguerre de orden n, y a_n tiene el valor:

$$a_n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{k}{n} {}^1/_{k!}\, D^k F(1/2)\,.$$

En esta nota enunciamos algunos teoremas acerca de las integrales (1), y (2), cuya demostración daremos en un trabajo de próxima publicación.

Teorema 1.—Dada una integral de Laplace (1), con $f(t)$ sumable, se verifica, para $r \to 1$:

$$\lim g(r, x) = f(x),$$

$$\lim g'(r, x) = f'(x)$$

en casi todos los puntos de $(0, \infty)$.

Teorema 2.—En las mismas hipótesis del teorema anterior se verifica, para $r \to 1$:

$$\lim \int_0^\infty |g(r, x) - f(x)|\, dx = 0,$$

de lo cual se deduce inmediatamente, en virtud de una propiedad conocida de la convergencia en promedio:

$$\lim \int g\,(r, x)\; d\,x = \int_0^x f\,(x)\; d\,x,$$

$$\lim \int_0 |\, g\,(r, x)\; d\,x = \int |\, f\,(x)\,|\; d\,x.$$

Teorema 3.—Dada una integral de Laplace (1), con $f\,(t)$ perteneciente a la categoría $\overset{p}{L}$, $(1 < p < \infty)$, se verifica para $r \to 1$:

$$\lim \int_0^\infty |\, g\,(r, x) - f\,(x)\,|\; d\,x = 0.$$

Los teoremas siguientes se refieren a integrales de Laplace-Stieltjes de la forma (2), con $\alpha\,(t)$ de variación acotada en $(0, \infty)$, y tal que $\alpha\,(0) = 0$, $\alpha\,(t) = \frac{1}{2}\,(\alpha\,(t + 0) + \alpha\,(t - 0))$.

Teorema 4.—Para $r \to 1$ se verifica

$$\lim \int_0^x g\,(r, t)\; d\,t = \alpha\,(x)$$

Teorema 5.—Para $r \to 1$ se verifica

$$\lim g\,(r, x) = \alpha'\,(x)$$

en casi todos los puntos del intervalo $(0, \infty)$.

Teorema 6.—Para $r \to 1$ se verifica:

$$\lim \int_0^\infty |\, g\,(r, x)\,|\; d\,x = \int |\, d\,\alpha\,(t)\,|.$$

Teorema 7.—Para $r \to 1$ se verifica

$$\lim\; 2\,(\pi\, x)^{\frac{1}{2}}\,(1 - r)^{\frac{1}{2}}\, g\,(r, x) = \alpha\,(x + 0) - \alpha\,(x - 0).$$

Expondremos en pocas palabras el método que nos ha conducido a estos resultados, y su relación con las fórmulas de inversión conocidas. La mayoría de éstas se han establecido formando, a partir de la determinante, una integral singular en la que aparece, dentro del signo integral, precisamente la función generatriz incógnita. Esta se obtiene entonces como límite de esta integral singular. Así, la fórmula de inversión de Riemann (o de Mellin), expresa la función generatriz como límite de una integral singular de Dirichlet, y Widder llega, por derivaciones sucesivas de la determinante, a una integral singular de núcleo positivo; lo cual le permite, no sólo obtener las fórmulas de inversión más generales conocidas hasta la fecha, sino también "clasificar" las funciones determinantes, esto es, formular condiciones características para que una función sea determinante con generatriz perteneciente a una categoría dada.

Nuestro método ha consistido en formar, por medio de una combinación lineal de las derivadas sucesivas de la determinante en el punto $\frac{1}{2}$, una integral singular que no es otra que la resultante de aplicar el método de sumación de Abel-Poisson a la serie de Laguerre de la función generatriz. El estudio sistemático del núcleo de esta integral singular nos ha permitido comprobar que le son aplicables muchos de los teoremas generales de Lebesgue y de Hahn y otros nuevos, y así hemos podido establecer los teoremas enunciados. Cabe observar que nuestro método permite también, como el de Widder, clasificar las funciones determinantes, según hemos establecido en nuestra nota aparecida en los *Comptes Rendus de l' Academie des Sciences*, T. 205, p. 1035, 1937.

Damos a continuación un teorema de este último tipo:

Teorema 8.—Sea $F(s)$ $[s = x + iy]$, una función analítica acotada en el semiplano de la derecha que toma valores reales para s real. La condición necesaria y suficiente para que $F(s)$ sea una integral de Laplace-Stieltjes:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st}\, d\,\alpha(t)$$

con $\int_0^\infty |d\,\alpha(t)| \leqq 1$, es que, para todo conjunto finito de números μ_n se verifique:

$$\left|\sum_1^r \mu_n F(n)\right| \leqq \max \left|\sum_1^r \mu_n e^{-nx}\right|$$

para $0 \leqq x < \infty$.

El anterior teorema es consecuencia fácil de ciertos teoremas generales de F. Riesz, sobre cálculo funcional, convenientemente generalizados para intervalo infinito. En un trabajo próximo volveremos sobre este tema, es decir, la aplicación sistemática de los teoremas del cálculo funcional, a la teoría de las integrales de Laplace. Ello permite obtener con facilidad interesantes resultados, lo cual no es sino natural, pues el problema de la representabilidad de una función por medio de una integral de Laplace es el correlativo del problema de los momentos, en intervalo finito; y de este último ha dado F. Riesz, valiéndose precisamente de clásicos teoremas, a él mismo debidos, sobre representabilidad de funcionales lineales, solución completa para extensas categorías de funciones.

La demostración detallada de los teoremas contenidos en esta nota aparecerá en un trabajo de próxima publicación.

Buenos Aires, Seminario de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, julio de 1938.