A. González Domínguez

SOBRE LAS SERIES DE FUNCIONES DE HERMITE

UNIÓN MATEMÁTICA ARGENTINA
Publicación núm. 2

BUENOS AIRES
1938

SOBRE LAS SERIES DE FUNCIONES DE HERMITE (*)

por ALBERTO GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ

Llamaremos serie de Hermite a toda serie de la forma

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \psi_n (x),$$

siendo las $\psi_n (x)$ las funciones de Hermite:

$$(2) \qquad \psi_n (x) = \frac{(-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} D^n e^{-x^2}}{(2^n n! \sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}}}$$

Como es bien sabido, estas funciones constituyen un sistema ortonormal en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Llamaremos *desarrollo* de Hermite de una función $f(t)$, perteneciente a una cierta categoría, a toda serie de la forma (1), cuyos coeficientes a_n tengan la forma (**)

$$(3) \qquad a_n = \int f(t) \psi_n (t) \, dt.$$

El desarrollo se llamará de Hermite-Stieltjes, si los coeficientes a_n vienen dados por las fórmulas

$$(4) \qquad a_n = \int \psi_n (t) \, d\alpha (t),$$

siendo $\alpha (t)$ una función de variación acotada en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

(*) Este trabajo ha sido realizado en el Seminario de Matemáticas de la Facultad de Ciencias Exactas Físicas y Naturales, que dirige el Prof. Julio Rey Pastor, y es para nosotros un agradable deber expresarle aquí nuestro agradecimiento.

(**) Las integrales que no llevan indicación de extremo se entienden extendidas entre $-\infty$ y $+\infty$; y las sumatorias, de 0 a ∞.

Para las series de Hermite valen, como es bien sabido, los teoremas de *Parseval* y de *Riesz-Fischer*.

Teorema de Parseval.—Dada una función $f(x) \varepsilon L^2$, cuyos coeficientes vengan dados por las fórmulas (3), se verifica:

$$\Sigma a_n^2 = \int \left[f(x) \right]^2 d x \quad . \tag{4'}$$

Teorema de Fischer-Riesz.—Dados números $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots a_n \ldots\ldots$, tales que la serie Σa_n^2 sea convergente, existe una función $f(x)$, perteneciente a L^2, tal que se verifican las fórmulas (3).

La validez de los teoremas de Parseval y Riesz-Fischer, permite enunciar inmediatamente la siguiente proposición: Condición necesaria y suficiente para que una serie de Hermite sea un desarrollo de Hermite, de una función de L^2, es que los coeficientes cumplan la condición

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty .$$

El teorema anterior resuelve completamente, para las funciones de L^2, el problema de saber *cuándo un desarrollo es una serie*. En el presente trabajo abordamos el mismo problema para otras categorías de funciones: sumables, acotadas, de variación acotada, de variación acotada y contínuas, y monótonas no decrecientes acotadas. Damos, finalmente, una expresión del *salto* de una función, dada por su desarrollo de Hermite-Stieltjes.

Los resultados originales de este trabajo están constituídos por los teoremas 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7, la fórmula 10', y el teorema cuyas hipótesis son las fórmulas 46.

I.—Antepondremos algunos teoremas que utilizaremos a menudo en lo que sigue.

Teorema A[1].—Para $|t| < 1$ se verifica

$$K(x,r,t) = \Sigma\, r^n \psi_n(x) \psi_n(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-r^2)}}\, exp \left\{ \frac{x^2-t^2}{2} - \frac{(x-rt)^2}{1-r^2} \right\}. \tag{5}$$

La función $K(x, t, r)$ es evidentemente simétrica respecto a x y a t; es además positiva, y goza de las propiedades siguientes, que hacen de ella un *núcleo positivo de una integral singular*.

$$\int K(x,t,r)\, dt = \sqrt{\frac{2}{1+r^2}}\, exp \left(-\frac{1}{2}\, \frac{1-r^2}{1+r^2} x^2 \right) \to 1 \text{ para } r \to 1 \tag{6}$$

(1) Ver Wiener, (1), pág. 64 y 65; ver también Watson, 1. Ver asimismo Titchmarsh, (1), pág. 28.

Análogamente

$$(7) \quad \int K(x,t,r)dx = \sqrt{\frac{2}{1+r^2}}\, exp\left(-\frac{1}{2}\ \frac{1-r^2}{1+r^2}\ t^2\right).$$

$$(8) \qquad \lim_{r\to 1} K(x,t,r) = 0,$$

uniformemente para todo x y todo t tal que $|x-t| > \varepsilon$.

Se verifica también, para $r \to 1$:

$$(9) \qquad \lim \int_{-\infty}^{x-\varepsilon} K(x,t,r)\, dt = 0 \quad ,$$

$$(10) \qquad \lim \int_{x+\varepsilon}^{\infty} K(x,t,r)\, dt = 0 \quad .$$

Sea $f(t)$ una funión perteneciente a L^1. Se verifica, para $r \to 1$,

$$(10') \qquad \lim \int K(r,x,t)\, f(t)\, dt = f(x)$$

en todo punto en el que se verifique

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t) - f(x)|\, dt = 0.$$

Estos resultados nos serán muy útiles, sobre todo para la demostración del teorema 7.

Otro resultado que utilizaremos repetidamente en lo que sigue es el siguiente:

TEOREMA 1.—*Los coeficientes de una serie de Hermite o de Hermite-Stieltjes, tienden a cero para* n→∞.

La demostración es inmediata; tomemos el caso de una función de L^1:

$$(10'') \qquad a_n = \int \psi_n(x)\, f(x)\, dx$$

Utilizando la conocida acotación

$$H_n(x) = O\left[\, e^{\frac{x^2}{2}} \sqrt{2^n n!}\; n^{-\frac{1}{4}}\right]$$

(2) Kogbetlianz, p. 153.

resulta, para las funciones de Hermite, en virtud de 2, la acotación siguiente:

$$\psi_n(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n}}\right). \tag{11}$$

Como la función $f(x)$ es sumable, y por lo tanto absolutamente sumable, resulta fácilmente, dividiendo el intervalo de integración en 10'' en 3 partes, y utilizando (11), que $a_n \to 0$, para $n \to \infty$. El razonamiento es válido para coeficientes de un desarrollo de Fourier-Stieltjes:

$$a_n = \int \psi_n(x)\, d\,\alpha(x),$$

siendo la función $\alpha(x)$ de variación acotada en $(-\infty, \infty)$.

II.—Condiciones características para que una serie de Hermite sea el desarrollo de Hermite-Stieltjes de una función de variación acotada en $-\infty, \infty$.

TEOREMA 2.—*La condición necesaria y suficiente para que una serie de Hermite cuyos coeficientes tienden a cero, sea el desarrollo de Hermite-Stieltjes de una función de variación acotada en $(-\infty, \infty)$, es que se verifique:*

$$\int |\sigma(r, x)|\, d\,x < M \qquad (0 \leqq r < 1) \tag{12}$$

$$\text{con} \quad \sigma(r, x) = \Sigma\, a_n\, \psi_n(x)\, r^n \qquad (0 \leqq r < 1) \tag{13}$$

Demostración.—La condición es necesaria. En efecto, si

$$\Sigma\, a_n\, \psi_n(x) \tag{14}$$

es un desarrollo de Hermite-Stieltjes de una función $\alpha(x)$ de variación acotada en $(-\infty, \infty)$, esto es, si verifican las infinitas igualdades

$$a_n = \int \psi_n(t)\, d\,\alpha(t), \qquad (n = 0, 1, 2, ...) \tag{15}$$

se verifica también

$$\sigma(r, x) = \int K(r, x, t)\, d\,\alpha(t) \tag{16}$$

siendo $K(r, x, t)$ el *núcleo de Hermite,* cuyas propiedades hemos estudiado en la introducción.

Se verificará, pues:

$$|\sigma(r,x)| \leqq \int |K(r,x,t)|\,|d\alpha(t)| \quad . \tag{17}$$

Integrando esta desigualdad entre límites *finitos* a y — **a**, obtenemos

$$\int_{-a}^{a} |\sigma(r,x)|\,dx \leqq \int_{-a}^{a} dx \int K(r,x,t)\,d\alpha(t) \tag{18}$$

Es fácil ver que en el segundo miembro es lícito invertir el orden de integración. Para ello basta observar que, en virtud de la forma exponencial del núcleo $K(r,x,t)$, las dos integrales

$$\int_{-a}^{a} dx \int_{N}^{\infty} K(r,x,t)\,d\alpha(t), \quad \text{y} \quad \int_{-a}^{a} dx \int_{-\infty}^{-N} K(r,x,t)\,d\alpha(t)$$

pueden hacerse tan pequeñas como se quiera eligiendo $|N|$ suficientemente grande. En la integral

$$\int_{-a}^{a} dx \int_{-N}^{N} K(r,x,t)\,d\alpha(t), \tag{19}$$

siendo la función $K(u)$ contínua, y los límites de integración finitos, no hay ningún inconveniente para invertir el orden de integración, y obtenemos así

$$\int_{-a}^{a} |\sigma(r,x)|\,dx \leqq \int_{-a}^{a} |d\alpha(t)| \int K(r,x,t)\,dx \tag{20}$$

Tomando ahora límites para $|a| \to \infty$, obtenemos

$$\int |\sigma(r,x)|\,dx \leqq \int |d\alpha(t)| \int K(r,x,t)\,dx \tag{21}$$

En virtud de la acotación uniforme de la integral

$$\int |K(r,x,t)|\,dx \ ,$$

indicada en la Introducción (fórmula 7), obtenemos de (21)

$$(22)\qquad \int |\sigma(r,x)\, dx \leqq c \int |d\,\alpha(t), \qquad (0 \leqq r < 1),$$

con lo que queda demostrada la necesidad de la condición.

La condición es *suficiente*. Consideremos, en efecto, la función

$$(23)\qquad F(r,x) = \int_{-\infty}^{x} \sigma(r,x)\, dx\ .$$

Las funciones $F_r(x)$ son, en virtud de la hipótesis, de variación uniformemente acotada con respecto a r, y por lo tanto constituyen, en virtud de un conocido teorema de Helly [3], un conjunto *compacto*; es decir, que existe una sucesión parcial $F_{r_j}(x)$, tal que

$$(24)\qquad \lim_{j\to\infty} F_{r_j}(x) = g(x),$$

donde $g(x)$ es una función de variación acotada, y la igualdad se verifica en todos los *puntos de continuidad* de $g(x)$.

Consideremos ahora las integrales

$$(25)\qquad \int \psi_m(x)\, dF_{r_j}(x) \qquad [j = 1, 2, ...]\ .$$

Aplicando un clásico teorema de Helly [4] sobre paso al límite bajo el signo de integral, resulta

$$(26)\qquad \lim_{j\to\infty} \int \varphi_m(x)\, dF_{r_j}(x) = \int \psi_m(x)\, dg(x)\ .$$

Por otra parte

$$(27)\qquad \int \psi_m(x)\, dF_{r_j}(x) = \int \psi_m(x)\sigma_{r_j}(x)\, dx,$$

en virtud de (23), y la segunda integral es igual a

$$(28)\qquad \int \psi_m(x) \left[\Sigma\ a_n\, \psi_n(x)\, r_j^{\,n}\right] dx\ .$$

---

(3) Helly, 1.

(4) Helly, 1.

Demostraremos que es lícito integrar esta expresión término a término, es decir, que es exacta la igualdad

$$(29) \quad \int \psi_m(x)\left[\Sigma\, a_n\, \psi_n(x)\, r_j{}^n\right] dx = \Sigma \left[a_n r_j{}^n \int \psi_m(x)\psi_n(x)\,dx\right].$$

Para ello es condición suficiente, en virtud de un clásico teorema, que converja la serie de *módulos*, es decir, que se verifique

$$(30) \qquad \Sigma\,(|\,a_n\,|\,r_j{}^n \int |\,\psi_m(x)\,|\,|\psi_n(x)\,|\,d\,x) < \infty .$$

Acotemos la integral que figura dentro del signo Σ.

Aplicando la acotación de Kogbetlianz [5], consignada en la introducción, o aun la menos precisa de Cramer [6]:

$$(31) \qquad |\,H_n(x)\,| < K\sqrt{n\,!}\;2^{\frac{n}{2}}\,e^{\frac{x^2}{2}} ,$$

o lo que es lo mismo

$$(32) \qquad |\,\psi_n(x)\,| < \frac{K}{\sqrt[4]{\pi}} \quad (K = 1{,}086435, \text{ ver Charlier [7]}),$$

resulta

$$(33) \qquad \int |\,\psi_m(x)\,|\;|\,\psi_n(x)\,|\,d\,x < K\,\pi^{-\frac{1}{4}} . \int |\,\psi_m(x)\,|\,d\,x = C\,.$$

En la segunda integral, m es fija, y la integral es por lo tanto convergente, dado que ψ_m es el producto de un polinomio por el factor $e^{-\frac{x^2}{2}}$

Resulta pues,

$$(34) \qquad \Sigma\,(|\,a_n\,|\,r_j{}^n \int |\,\psi_m(x)\,|\,|\,\psi_n(x)\,|\,d\,x) < C\,\Sigma\,|\,a_n\,|\,r_j{}^n$$

Como por hipótesis los coeficientes $|\,a_n\,|$ tienden a cero, y $r_j < 1$, también por hipótesis, la serie de potencias del segundo miembro es convergente, y por lo tanto también es convergente la serie del primer miembro, con lo que queda demostrada nuestra aserción, y por consiguiente la exactitud de la fórmula (29).
Volvamos a considerar esta misma fórmula. En el segundo miembro de la misma figura la integral

$$(35) \qquad \int \psi_m(x)\,\psi_n(x)\,d\,x,$$

(5) Kogbetlianz, 1, p. 153.
(6) Cramer, 1. — Ver Charlier, pp. 52 y 57.
(7) Charlier, 1, pp. 52 y 57.

que, en virtud de la ortogonalidad y normalidad de las funciones de Hermite, es igual a *cero* para $m \neq n$, y a *uno* para $m = n$. La fórmula (29) nos da, pues

$$(36) \quad \int \psi_m(x)\,[\,\Sigma\, a_n \psi_n(x) r_j{}^n] = \Sigma\,(a_n r_j{}^n \int \psi_m(x)\psi_n(x)dx = a_m r_j{}^m.$$

Substituyendo este valor en la fórmula (26), obtendremos:

$$(37) \quad \lim_{j\to\infty} \int \psi_m(x) dF^{r_j}(x) = \lim_{j\to\infty} a_m r_j{}^m = a_m = \int \psi_m(x) dg(x),$$

$$(38) \qquad a_m = \int \psi_m(x)\, d\, g\,(x),$$

con lo que queda demostrada la segunda parte de nuestro teorema.

TEOREMA 3.—*Condición necesaria y suficiente para que un desarrollo de Hermite cuyos coeficientes tienden a cero, sea la serie de Hermite-Stieltjes de una función monótona no decreciente y acotada en* $(-\infty, \infty)$, *es que se verifique*

$$(39) \qquad \begin{array}{ll} \sigma\,(r, x) \geq 0 & 0 \leq r < 1, \\ \int \sigma\,(r, x)\,|\,d\,x < M & [0 \leq r < 1]\,. \end{array}$$

Este teorema es fácil corolario del anterior.

Las condiciones son necesarias. En efecto, si

$$(40) \qquad \Sigma\, a_n\, \varphi_n\,(x)$$

es una serie de Hermite-Stieltjes de una función acotada no decreciente, se verifica

$$(41) \qquad \sigma\,(r, x) = \int K\,(r, x, t)\; d\, \alpha\,(t)\quad .$$

Siendo $K\,(r, x, t)$ *positivo*, y la función $\alpha\,(x)$ *no decreciente*, el integrando es positivo, y obtenemos

$$(42) \qquad \sigma\,(r, x) \geqq 0.$$

La segunda condición se verifica también, en virtud del teorema anterior, pues $\alpha\,(x)$, monótona no decreciente, y acotada, es de variación acotada.

Las condiciones son suficientes. En efecto, todos los razonamientos que hemos hecho para demostrar el teorema anterior subsisten. Pero, en el caso actual, las funciones

$$(43) \qquad F(r, x) = \int_{-\infty}^{x} \sigma(r, x)\, dx,$$

dado que el integrando es positivo, son, no sólo de variación uniformemente acotada, sino también *no decrecientes, y uniformemente acotadas*. La función límite $g(x)$, que en el teorema anterior resultaba de variación acotada, es en este caso *no decreciente y acotada*. Repitiendo todos los pasos del razonamiento anterior, se demuestra finalmente que

$$(44) \qquad a_m' = \int \psi_m(x)\, d\, g(x)$$

con $g(x)$ acotada no decreciente, con lo que queda demostrada la segunda parte del teorema.

TEOREMA 4.—*Condición necesaria y suficiente para que un desarrollo de Hermite cuyos coeficientes tienden a cero sea la serie de Hermite-Stieltjes de una función contínua de variación acotada*, es que se verifique

$$(45) \qquad \begin{array}{ll} \text{a)} & \int |\sigma(r, x)|\, dx < M \qquad 0 \leq r < 1 \\ \text{b)} & \lim \pi^{1/2} (1 - r^2)^{1/2} \sigma(r, x) = 0 \quad (r \to 1) \end{array}$$

Este teorema es fácil corolario del teorema (3). En efecto, la condición (a) nos dice que la serie dada es el desarrollo de Hermite-Stieltjes de una función de variación acotada. Veremos que la condición b, determina que esa función de variación acotada, es contínua. Para ello, nos valdremos del siguiente teorema, muy anólogo a un teorema de Khintchine [8].

Sea una función $S(x, r, t)$, que satisfaga a las condiciones

$$(46) \qquad \begin{array}{ll} 1) & |S(x, r, t)| < M \\ 2) & \lim\limits_{r \to 1} S(x, r, t) = 0, \text{ para todo } x \text{ tal que } |x - t| > \delta \\ 3) & \lim\limits_{r \to 1} S(x, r, t) = 1 \quad \text{para} \quad x = t. \end{array}$$

(8) Khintchine, 1.

Se verificará, entonces, para $r \to 1$:

$$lim \int S(r, x, t)\, d\,\alpha(t) = \alpha(x+0) - \alpha(x-0)$$

siendo $\alpha(t)$ de variación acotada en $(-\infty, \infty)$.

Comprobemos que la expresión

$$(47) \qquad \pi^{1/2} (1 - r^2)^{1/2} K(r, x, t)$$

satisface a las condiciones del teorema anterior.

La condición 1) se satisface evidentemente, en virtud de la fórmula (5'). También está satisfecha la condición 2), pues pues

$$(48) \qquad \pi^{1/2}(1-r^2)^{1/2}K(r,x,t) = exp\left(\frac{x^2 - t^2}{2} - \frac{(x - r\,t)^2}{1-r^2}\right)$$

Para $|x - t| > \delta$, el exponente tiende a $-\infty$, para $r \to 1$, y por lo tanto,

$$(49) \qquad \lim_{r \to 1} \pi^{1/2} (1 - r^2)^{1/2} K(r, x, t) = 0, \text{ para } |x - t| > \delta.$$

Para $x = t$, la expresión (48) se reduce a

$$(50) \qquad \pi^{1/2} (1 - r^2)^{1/2} K(r, x, x) = exp\left(-\frac{x^2 (1 - r)^2}{1 - r^2}\right) =$$

$$= exp\left(-\frac{x^2 (1 - r)(1 - r)}{(1 - r)(1 + r)}\right) \to 1.$$

Se verificará, pues, en virtud del teorema recién enunciado:

$$(51) \quad lim\, \pi^{1/2} (1-r^2)^{1/2} \int K(r,x,t) d\alpha(t) = \lim_{r \to 1} \pi^{1/2} (1-r^2)^{1/2} \sigma(r,x) =$$

$$= \alpha(x+0) - \alpha(x-0).$$

Si en todo punto x se verifica que $\alpha(x+0) - \alpha(x-0) = 0$, quiere decir que la función $\alpha(x)$ es *continua*, ya que su salto es nulo para todo x.

La validez de la condición a) de 45, nos aseguraba que la función $\alpha(t)$ es de variación acotada. Acabamos de ver que el verificarse de la condición b), de (45), es necesario y suficiente para que la función $\alpha(t)$, de variación acotada, sea continua. El teorema 5 queda así completamente demostrado.

TEOREMA 5.—*Condición necesaria y suficiente para que una serie de Hermite cuyos coeficientes tienden a cero, sea el desarrollo de Hermite de una función de* $\overset{p}{L}$, ($p \geqq 2$), *es que se verifique*

$$\int |\sigma(r, x)|^p \, dx < M \quad (0 \leqq r < 1) \tag{52}$$

La condición es necesaria. En efecto, si la serie

$$\Sigma \, a_n \, \psi_n(x) \tag{53}$$

es el desarrollo de Hermite de una función $f(t) \, \varepsilon \, \overset{p}{L}$, se verificará:

$$a_n = \int \psi_n(t) \, f(t) \, dt \; , \tag{54}$$

$$\sigma(r, x) = \int K(r, x, t) \, f(t) \, dt \tag{55}$$

siendo $K(r, x, t)$ el varias veces mencionado núcleo de Hermite.

Aplicando la clásica desigualdad de Hölder a la fórmula (55), obtenemos:

$$|\sigma(r, x)| \leqq \left[\int |K(r, x, t)| \, |f(t)|^p \, dt\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int K(r, x, t) dt\right]^{\frac{1}{p'}}, \tag{56}$$
$$\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\right) .$$

Elevemos ambos miembros a la potencia p e integremos:

$$\int |\sigma(r, x)|^p \, dx \leqq \int dx \left[\left\{\int K(r, x, t) |f(t)|^p \, dt\right\} \times \left\{\int K(r, x, t) \, dt\right\}^{\frac{p}{p'}}\right] . \tag{57}$$

Pero

$$\left(\int K(r, x, t) \, dt\right)^{\frac{P}{P'}} < A^{\frac{P}{P'}} \quad (0 \leqq r < 1) , \tag{58}$$

en virtud de la fórmula (10) varias veces citada de la introducción. De (57) y (58) deducimos

$$\int |\sigma(r, x)| \, dx \leqq A^{p/p'} \int dx \int K(r, x, t) \, |f(t)|^P \, dt \tag{59}$$

La integral doble del segundo miembro (de integrando positivo), cumple las condiciones del clásico teorema de Fubini, y por lo tanto es lícito invertir el orden de integración, con lo que obtenemos:

$$(60)\qquad \int dx \int K(r,x,t)\,|f(t)|^{p} dt = \int |f(t)|^{p} dt \int K(r,x,t)\,dx \leqq$$

$$(61)\qquad \leqq A \int |f(t)|^{p} d\,t.$$

Substituyendo este resultado en la fórmula (59), obtenemos en definitiva:

$$(61)\qquad \int |\sigma(r,x,t)|^{p} dx \leqq A^{\left(\frac{P}{P'}+1\right)} \int |f(t)|^{p} dt = BA^{\frac{P}{P'}+1} = M,$$

con lo que queda demostrada la primera parte del teorema.

La condición es *suficiente*. Supongamos, en efecto, que se cumpla la hipótesis, esto es

$$(62)\qquad \int |\sigma(r,x)|^{p} d\,x < M \qquad (0 \leqq r < 1).$$

Entonces, en virtud de un clásico teorema de Riesz [9], el conjunto de funciones $\sigma_r(x)$ contiene una sucesión parcial débilmente convergente $\sigma(r_j, x)$; es decir, tal que para toda función $g(t) \varepsilon L^{p'}$ $\left(1/_{p} + 1/_{p'} = 1\right)$, se verifica:

$$(63)\qquad \lim_{j\to\infty} \int \sigma(r_j,x)\,g(t)\,d\,t = \int f(t)\,g(t)\,d\,t,$$

siendo $f(t)$ una función de $\overset{p}{L}$. Ahora bien, las funciones $\psi_n(x)$ son acotadas e integrables en $(-\infty, \infty)$, y por lo tanto pertenecen a la categoría $\overset{p}{L}$, cualquiera que sea $p \geqq 1$. Por lo tanto

$$(64)\qquad \lim_{j\to\infty} \int \psi_m(x)\,\sigma(r_j,x)\,dx = \int \psi_m(x) f(x)\,dx$$

Una vez en posesión de este resultado, el resto es fácil. En efecto, sólo queda por demostrar que la integral del primer miembro de la igualdad anterior es igual a $a_m\,r_j^{m}$. Pero los razonamientos que hemos hecho para demostrar idéntico resultado en el teorema (3), siguen siendo válidos sin modificación alguna en el caso actual. Nos queda, pues

$$(65)\qquad \lim_{j\to\infty} \int \psi_m(x)\,\sigma(r_j,x)\,d\,x = \lim_{j\to\infty} a_m\,r_j^{m} = a_m = \\ = \int \psi_m(x)\,f(x)\,d\,x$$

con lo que queda demostrada la 2ª parte del teorema.

(9) Riesz, 1.

TEOREMA 6.—*Condición necesaria y suficiente para que una serie de Hermite*

(66) $$a_n \Sigma \psi_n (x)$$

cuyos coeficientes tienden a cero, sea el desarrollo de Hermite de una función acotada e integrable en $(-\infty, \infty)$, *es que se verifique*

(67) $$| \sigma (r, x) | < M \qquad 0 \leqq r < 1$$

La condición es necesaria. En efecto, razonando como en los teoremas anteriores, resulta que si el desarrollo (66) es la serie de Hermite de una función acotada, se verifica

(68) $$\sigma (r, x) = \int K (r, x, t) f (t) d t$$

Ahora bien, como por hipótesis, $| f (t) < K_1$, se verificará

(69 $$| \sigma (r, x) | < M \int K (r, x, t) d t < M \ A ,$$

en virtud de la propiedad fundamental del núcleo de Hermite, que tantas veces hemos utilizado. La necesidad de la condición queda así demostrada.

La condición es *suficiente.* El razonamiento es idéntico que en los teoremas anteriores. En el caso actual, la hipótesis

(70) $$| \sigma (r, x) | < M,$$

nos permite asegurar, en virtud de otro conocido teorema de Riesz [10], que el conjunto de funciones $\sigma_r (x)$ contiene una sucesión parcial débilmente convergente.

Una vez asegurado este punto fundamental de la demostración, la parte restante es idéntica a la de los teoremas anteriores.

TEOREMA 7.—*Condición necesaria y suficiente para que una serie de Hermite,*

(71) $$\Sigma a_n \psi_n (x)$$

cuyos coeficientes tienden a cero, sea el desarrollo de Hermite de una función sumable, es que se verifique para $r \to 1$, $\varrho \to 1$:

(72) $$lim \int | \sigma (r, x) - \sigma (\varrho, x) | d x = 0$$

(10) Riesz, 1.

La condición es suficiente. En efecto, si la hipótesis se verifica, existe, en virtud del teorema fundamental sobre convergencia en promedio, debido a Riesz [12], una función $g(x)$ tal que para $j \to \infty$:

$$(73) \qquad lim \int | \sigma(r_j, x) - f(x) | \, dx = 0.$$

Pero, según es bien sabido, la convergencia fuerte lleva aparejada la convergencia débil [11]; por lo tanto se verificará para $j \to \infty$:

$$(74) \qquad lim \int g(x) \, \sigma(r_j, x) = \int g(x) \, f(x) \, dx$$

para toda función $g(x)$ sumable acotada; y, en particular

$$(75) \qquad \lim_{j \to \infty} \int \psi_m(x) \, \sigma(r_j, x) \, dx = \int \psi_m(x) \, f(x) \, dx.$$

La demostración de la suficiencia sigue ahora idénticamente que en casos anteriores.

La condición es necesaria. En efecto, si la serie

$$(76) \qquad \Sigma \, a_n \, \psi_n(x)$$

es el desarrollo de Hermite de una función sumable, se verifica

$$(77) \qquad \sigma(r, x) = \int K(r, x, t) \, f(t) \, dt.$$

Recordando las propiedades 6, 7, 9, 10, y 10' del núcleo $K(x, t, r,)$, consignadas en la introducción, se comprueba que el mismo satisface a todas las condiciones del siguiente teorema de Hahn [12].

Sea $\varphi(\xi, x, n)$ medible en todo el plano ξ, x, para todo n. Sea $\varphi(\xi, x, n)$ integrable con respecto a ξ, en $(-\infty, \infty)$, para todo x, con excepción cuando más de un conjunto de medida nula; igualmente sea integrable con respecto a x en $(-\infty, \infty)$, para todo ξ, con excepción cuando más de un conjunto de medida nula; además satisfaga $\varphi(\xi, x, n)$ a las siguientes condiciones:

1) Existe un M tal que, para casi todo x y todo n, se verifica

$$\int | \varphi(\xi, x, n) | \, d\xi < M;$$

(11) Riesz, 1.

(12) Hahn, 1, pág. 667.

2) Existe un M tal que, para casi todo ξ y todo n se verifica

$$\int |\varphi(\xi, x, n)| \, d\, x < M;$$

3) $$f(x) = \lim \int \varphi(\xi, x, n) \, f(\xi) \, d\, \xi$$

para $n \to \infty$, en todo punto donde se verifique para $h \to 0$:

$$\lim \frac{1}{h} \int_0^h |f(x+t) - f(x)| \, d\, t = 0.$$

4) Para todo $h > 0$ y todo ξ se verifica

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\xi - h} |\varphi(\xi, x, n)| \, d\, x = 0,$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\xi + h}^{\infty} |\varphi(\xi, x, n)| \, d\, x = 0.$$

Entonces se verifica, para toda función $f(x)$ sumable en $(-\infty, \infty)$, la relación

$$\lim_{n \to \infty} \int \left| f(x) - \int \varphi(\xi, x, n) \, f(\xi) \, d\, \xi \right| d\, x = 0.$$

Del anterior teorema de Hahn, aplicado a nuestro caso, se deduce:

(78) $$\lim_{r \to 1} \int |f(x) - \sigma(r, x)| \, d\, x = 0.$$

es decir, que la función $\sigma(r, x)$ converge en promedio de primer orden, hacia $f(x)$. En virtud del teorema fundamental sobre convergencia en promedio, se verificará también, en virtud de la relación anterior:

(79) $$\lim \int |\sigma(\varrho, x) - \sigma(r, x)| \, d\, x = 0$$

para $r \to 1$, $\varrho \to 1$.

Nuestro teorema queda así finalmente demostrado.

Seminario de Matemáticas

(Original recibido en Abril de 1938)

BIBLIOGRAFIA

1) *Charlier C. V. L.*—Les aplications de la théorie des probabilités aux sciences mathématiques et aux sciences physiques; application de la théorie des probabilités á l'astronomie. - Paris, 1930; pp. 52 y 57.

2) *Cramer H.*—Valeurs Maxima des Polynomes d'Hermite. (Ver Charlier, pp. 50-53).

3) *Hahn H.*—Über die Darstellung gegebener Funktionen durch singuläre Integrale. Denkschriften der Kais. Akad. der Wissenschaften, Math. Naturwissenchaftliche Klasse. Tomo 93. - Viena, 1916.

4) *Helly E.*—Über lineare Funktionaloperationen. Wiener Berichte, 121, (1912), pp. 265-297.

5) *Khintchine A.*—The Method of sepectral reduction in classical dynamics. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 19, pp. 567-573, (1933).

6) *Kogbetlianz E.*—Recherches sur la sommabilité des series d'Hermite. Annales de l'École Normale Supérieure, 49, (1932), pp. 136-221.

7) *Riesz F.*—Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen. Math. Ann. 69, (1910), pp. 449-497.

8) *Titchmarsh, E. C.*—Introduction to the Theory of Fourier integrals.—Oxford, 1937.

9) *Watson, G. N.*—Notes on generating functions of polynomials. II, Hermite polynomials. - Journal of the London Math. Soc., 8, 194-199, (1933).

10) *Wiener, N.*—The Fourier Integral and some of its applications. - Cambridge, 1933.