EL LUGAR GEOMETRICO Y LUGARES DE PUNTOS AREAS EN EL PLANO

Por V. y A. Fraile y C. Crespo

(Continuación)

Resolver un lugar área de puntos en el plano equivale, pues, a resolver dos lugares sucesivamente: uno de puntos y otro de líneas, siempre que sean dos los entes primitivos que varían, y simplemente infinitos los sistemas que los contienen. En último caso, el segundo de estos lugares se reduce a determinar la envolvente de esas líneas que, en general, limita al lugar área.

Este procedimiento de resolución de los lugares áreas es, sin duda, el más natural. Sin embargo, utilizando siempre los recursos de la Geometría elemental, suele ser más simple y más elegante la solución sintética, prescindiendo de todo proceso de generación.

Por último, las coordenadas de los puntos de un lugar área son funciones

$$x = f(\lambda, \lambda') \qquad\qquad y = \varphi(\lambda, \lambda')$$

de dos parámetros, λ, λ', independientes, no siendo posible, por lo tanto, la eliminación de ellos. Cuando el número de conjuntos-variables excede a dos, las funciones x, y lo son de más de dos parámetros que, de hecho, están sustituídos por dichas funciones.

A continuación exponemos una serie de problemas elementales de lugares de puntos áreas en el plano, en los que hemos utilizado con preferencia la solución sintética.

II. - Aplicaciones

1. — *Superficies medias y baricéntricas de las curvas.* — Tratándose de curvas alabeadas, son ya conocidas las superficies medias: lugar de los centros de las cuerdas de una curva. Si se considera curvas planas, sus superficies medias constituyen lugares áreas de puntos en el plano.

Naturalmente, cuando una curva plana es cerrada y convexa, su superficie media es la región del plano no exterior a la curva. La de una circunferencia es su círculo.

Es sumamente sencillo hallar la superficie media de un arco de circunferencia: En la circunferencia de centro O (fig. 1) consideremos el arco A B' B, y tracemos los arcos A M, B M homotéticos del A B' B respecto de los centros A y B respectivamente, de razón 1/2. La superficie rayada sobre la cuerda A B es el lugar. Basta trazar un radio cualquiera O N y observar que P — punto de intersección de O N y el arco B P M — es centro de la cuerda B B'. Todo punto P' de O N exterior al trozo rayado no es del lugar, por ser centro de una cuerda paralela a la B B' que no puede ya estar inscrita en el arco A B' B. Sí lo están, en cambio, las cuerdas cuyos centros son los puntos del segmento P N.

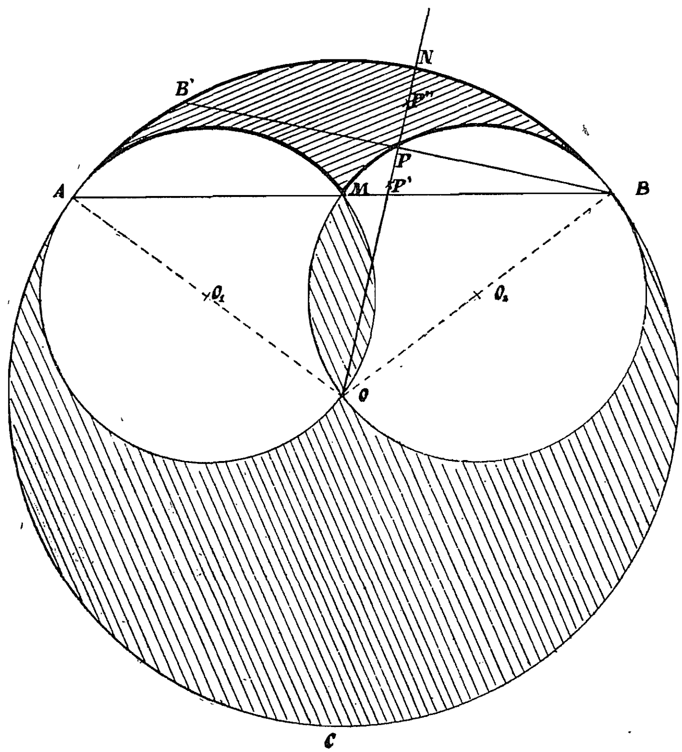

Fig. 1

El recinto rayado debajo de la cuerda A B es la superficie media del arco A C B.

Superficie baricéntrica es el lugar de los centros de gravedad de los arcos de una curva alabeada. Si la curva fuese plana, dicha superficie baricéntrica constituiría un lugar área de puntos en el plano.

Ambas clases de superficies son lugares por generación, cuyos puntos quedan unívocamente determinados eligiendo arbitrariamente dos en la curva. Esta es, pues, conjunto-variable común a los dos entes primitivos.

Puede generalizarse la superficie media estableciendo el lugar de los puntos que dividen a las cuerdas de una curva en segmentos que están en una relación λ.

Si se trata de un arco de circunferencia (fig. 2) A V' B el lugar es la superficie rayada sobre la cuerda A B. Está limitada por el arco dado y cuatro arcos más: dos de ellos pertenecen a las circunferencias de centros O_1, O_2 homotéticas de la dada de razón

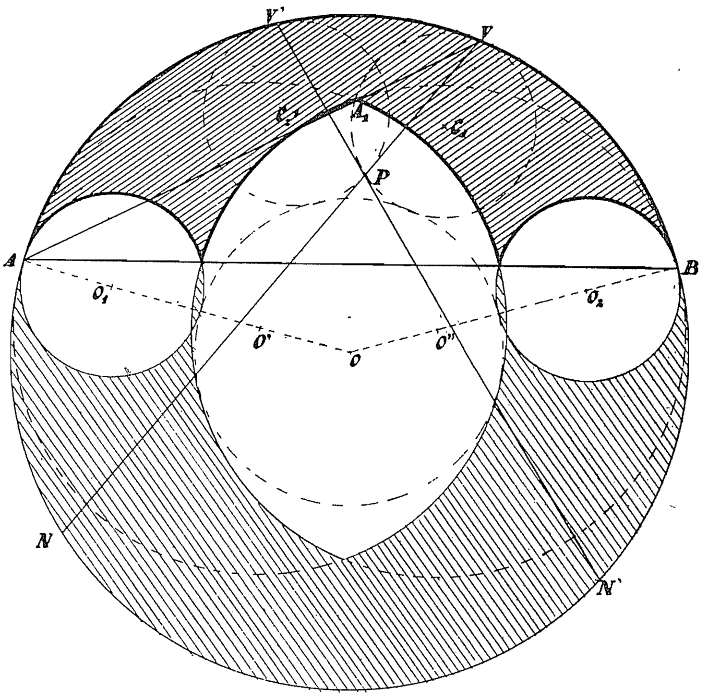

Fig. 2

λ respecto de los centros A y B; los otros dos arcos pertenecen a las circunferencias de centros O', O'', homotéticas de la dada de razón $\frac{1}{\lambda}$ respecto de A y B como centros de homotecia.

Se desprende, desde luego, que todo punto no contenido en la corona circular limitada por la circunferencia dada y la que es tangente exterior a las O_1, O_2 no es del lugar. Ahora bien: un punto P de esta corona, pero exterior a la superficie rayada, tampoco es del lugar. Basta observar que este punto pertenece a dos circunferencias C_1, C_2 inscritas en la corona. Sea V el punto de tangencia de C_1 con el arco dado, y A_1 el de contacto con el arco de circunferencia de centro O'. La recta VA_1 ha de pasar por A y es $\frac{A_1 V}{A_1 A} = \lambda$. La recta VP produce una cuerda VN tal que es $\frac{PV}{PN} = \lambda$; pero que no está, pues, inscrita en el arco dado. Tampoco puede estarlo la cuerda V' N' que resulta de considerar la circunferencia C_2. Del mismo modo se comprende que los puntos comunes a las circunferencias C y a la superficie rayada pertenecen a cuerdas inscritas en el arco AVB y las dividen en segmentos cuya razón es λ.

El mismo lugar para el arco AN' B lo indica el rayado inferior.

2. — *Lugar de los centros de los segmentos inscritos en dos segmentos dados* AB, CD. (*Superficie media de dos segmentos*). —

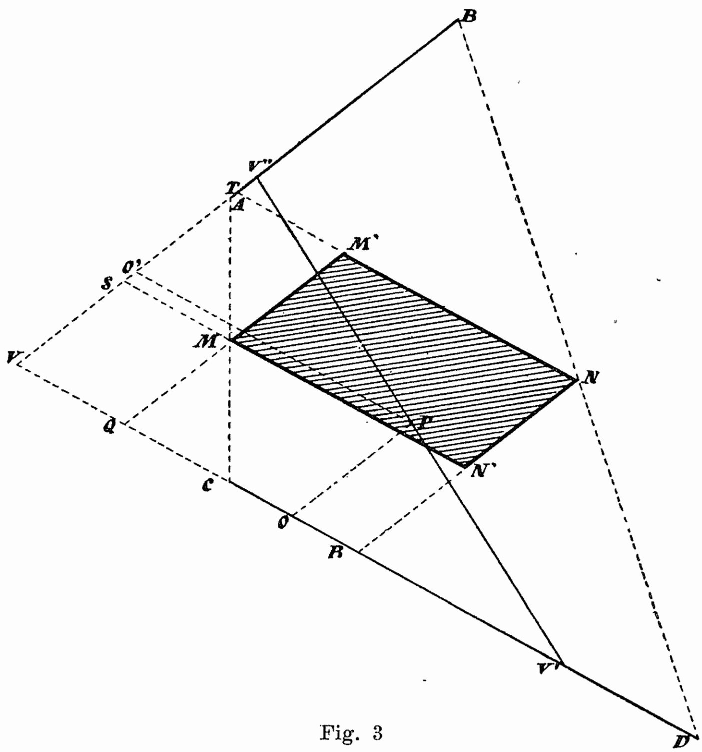

Fig. 3

Conviene antes recordar cómo se inscribe un segmento en los lados de un ángulo dado $B V D$ de manera que su centro sea un punto P también dado (fig. 3). Sabemos que basta trazar, por ejemplo, $P O$, paralela al lado $V B$, tomar V', simétrico de V respecto de O y unir P y V'. $V' V''$ es la solución.

En la misma figura, $A B$ y $C D$ son los segmentos dados. Construyamos el paralelogramo $M M' N N'$ cuyos lados son paralelos a dichos segmentos y donde M y N son centros, respectivamente, de $A C$ y $E D$. Este paralelogramo es el lugar: Todo punto P de él es centro de un segmento inscrito en $A B$ y $C D$, y no lo es cualquier punto que no pertenece al paralelogramo. Para probarlo prolongaremos los lados $M' M$ hasta Q, $N N'$ hasta R y tracemos $P O$ paralela a ellos. C es simétrico de V respecto de Q, y D lo es también respecto de R. El punto simétrico de V respecto de O está, pues, en $C D$. De igual modo, si trazamos $P O'$, paralela a $V D$, el simétrico de V respecto de O' está en $A B$.

Si se trata de un punto que no pertenece al paralelogramo, alguno de los centros de simetría O, O', o ambos, no están respectivamente en $Q R$ y $S T$, y dicho punto no es, por lo tanto, del lugar.

(Continuará).

V A R I A

6. *Definición matemática de Emile Borel*

''Si me fuera necesario resumir en una fórmula la impresión que conservo de vos estaría en situación muy embarazosa. Los elementos que caracterizan vuestra personalidad son tan numerosos que sería necesario otro Borel para resumirlos con exactitud y precisión.

Veo sin embargo en vuestra vida caracteres que le confieren una notable unidad. Estos caracteres son lo suficientemente numerosos, persistentes y precisos para que ella aparezca no como una función analítica, condicionada y determinada a través de un dominio de existencia muy simple por el comportamiento tenido en una parte infinitesimal de ese dominio; no como una función de variable real totalmente desarticulada, y cuyos valores en partes distintas del dominio de existencia no tienen relación alguna los unos con los otros; sino más bien como una función cuasianalítica, cuyo comportamiento global, claro está, está determinado por lo que es en una parte infinitesimal del dominio de existencia, pero que por otra parte es tan complicada en su trayectoria y en su recinto que sería necesaria otra función de la misma clase para seguirla en todos sus meandros.''

(Del discurso pronunciado por Gastón Julia en el jubileo de Emil Borel en enero de 1940.)