SOBRE ALGUNOS LUGARES GEOMETRICOS

por ALEJANDRO TERRACINI

1. La lectura de una interesante Nota *El lugar geométrico y lugares de puntos áreas en el plano* por los señores V. y A. FRAILE y C. CRESPO (¹) me ha sugerido la cuestión siguiente que, aunque muy elemental, quizás pueda tener algún interés, y que se presta a generalizaciones de varios tipos.

En el plano π en el cual (aquí y a continuación) supongo que actuamos, imagino fijado una vez por todas un *triángulo muestra* $A_0B_0P_0$ (cuyos vértices sean todos puntos propios). Entonces a cada par ordenado de puntos A, B podemos asociar de manera perfectamente determinada un punto P definido como vértice del triángulo ABP directamente semejante al triángulo muestra $A_0B_0P_0$. Si ahora dejamos variar los puntos A, B respectivamente sobre dos líneas a, b, «en general» el punto P viene a describir una región del plano. La cuestión es la siguiente: *¿para cuáles pares de líneas* (²) a, b, *y cuáles triángulos muestras, el lugar del punto* P *se reduce tan sólo a una línea* p? Se trata de encontrar *todas* las soluciones del problema así planteado.

Supondré el plano π real, y buscaré en el mismo las soluciones reales o imaginarias. Por lo tanto también el triángulo muestra puede tener vértices reales o imaginarios. Sin embargo, para que tenga sentido hablar del triángulo ABP directamente semejante al $A_0B_0P_0$, construído a partir de dos puntos genéricos A, B del plano π, como de un triángulo perfectamente determinado, supondremos que los dos vértices A_0, B_0 del triángulo muestra no pertenezcan a una misma recta isótropa.

2. La cuestión elegida es una de las más sencillas que pueden plantearse en relación con la eventualidad de que se rebaje la dimensión de un lugar geométrico. Podrían plantearse cuestiones parecidas al suponer que, al variar los puntos A, B sobre las líneas a, b, la posición del punto P quede definida a partir de ellos de otras maneras; p. e. que en la defi-

(¹) Esta *Revista*, vol. VII (1940-41), n.os 2, 3.

(²) Aquí y a continuación, al hablar de líneas, entenderemos que se trate de líneas analíticas.

nición del punto P intervengan también otros elementos o bien que esa definición no sea invariante en el grupo de las semejanzas, sino sólo en el de las igualdades. También podría suponerse que el punto P se construya a partir de más de dos puntos variables sobre otras tantas líneas.

Hé aquí por ejemplo un problema cuyo estudio me parece interesante: imagino repartidos los triángulos de un plano π en clases de triángulos iguales, y, extrayendo un ejemplar $A_0B_0C_0$ de cada clase, supongo prefijado a priori de manera arbitraria un punto P_0 que vinculo rígidamente con el mismo triángulo. Entonces a cada terna de puntos A B C no alineados del plano podemos hacer corresponder de manera única el punto P que corresponde al punto P_0 en la igualdad (directa) entre el propio triángulo ABC y el correspondiente triángulo muestra $A_0B_0C_0$ igual a ABC. Entonces: ¿para cuáles leyes de definición del punto P_0 y cuáles líneas a, b, c ocurre que, al variar los puntos A, B, C sobre las líneas a, b, c el correspondiente punto P tenga como lugar, al máximo, una línea? Una solución particular es p. e. aquella en que a cada triángulo $A_0B_0C_0$ se vincula como punto P_0 el ortocentro del triángulo $A_0B_0C_0$, y se toman las líneas a, b, c coincidentes en una misma hipérbola equilátera, la cual por consiguiente resulta lugar del punto P: aún más trivial es el caso en que el punto P_0 se define como centro del círculo circunscripto al triángulo $A_0B_0C_0$, y se toman las líneas a, b, c coincidentes en una misma circunferencia, en cuyo caso el punto P no describe ni siquiera una línea, sino que queda fijo.

Cuestiones parecidas pueden estudiarse con respecto a grupos fundamentales distintos del de las congruencias o de las semejanzas. Además podría p. e. el punto A intervenir junto con un elemento de orden uno o mayor de la curva a. También podría plantearse problemas análogos para envolventes. Por supuesto, de cualquier manera que se plantee el problema, lo interesante consiste en encontrar *todos* los casos en los que se rebaja la dimensión de la variedad descrita por el punto, o la recta, etc. variable.

3. Volviendo a la cuestión como está planteada en el n. I, podemos indicar a priori las soluciones siguientes.

a) Las líneas a, b son dos rectas no paralelas (cuyo punto de intersección llamaré O): el ángulo $a\,b$ (como ángulo menor de dos rectos formado por dos rectas no orientadas en un plano orientado) es igual al ángulo formado por las dos rectas P_0A_0, P_0B_0. En efecto, si tomamos un triángulo ABP directamente semejante a $A_0B_0P_0$ cuyos vértices A, B estén sobre a, b, los cuatro puntos A, B, O, P resultan concíclicos, y por consiguiente el ángulo de las rectas OA, OP queda constantemente igual al de las rectas B_0A_0, B_0P_0. Por lo tanto al variar A, B sobre a, b, el lugar del punto P es la recta pasante por O determinada por la condición de formar con OA el ángulo constante mencionado.

Otras soluciones necesariamente imaginarias son las siguientes *b*) y *c*).

b) Observo previamente que, dado un ángulo μ, a cada par genérico de puntos A, B del plano podemos asociar un punto P de la manera siguiente. Llevo por A la recta isótropa de un sistema, que llamo *primer sistema,* individualizado al elegir uno determinado I de los dos puntos cíclicos I, J, y la corto en P con el segundo lado de un ángulo directamente igual al ángulo μ que tenga vértice en B y primer lado coincidente con la recta BA. Es claro que el triángulo ABP sigue manteniéndose directamente semejante a sí mismo (es suficiente pensar en una semejanza directa en el plano como en una homografía que tiene los dos puntos cíclicos como puntos unidos) y por lo tanto a un triángulo muestra $A_0B_0P_0$ que tiene ahora la particularidad de tener el lado A_0P_0 a lo largo de una recta isótropa del primer sistema.

Conviene notar que con la construcción expuesta la cuaterna de las rectas que unen el punto B a los puntos A, P, I, J se mantiene constantemente proyectiva a una cuaterna fija, y por lo tanto, al llamar B' el punto AI.PJ, la doble razón (APIB') se mantiene igual a una constante h (3), de modo que P viene a coincidir con el punto correspondiente de A en la homología que tiene centro en I, eje coincidente con la recta isótropa del segundo sistema que pasa por B, e invariante absoluto h.

Después de lo dicho es claro sin más que otra solución

(3) Aunque no es preciso aplicarla, recuerdo la fórmula de Laguerre que relaciona entre sí los valores de μ y de h:

$$h = e^{-2i\mu}$$

del problema planteado es la siguiente: si salimos de una línea genérica a y de una recta isótropa del segundo sistema b, el conjunto de los puntos P logrados a partir de los puntos A, B variables respectivamente sobre a y b mediante la construcción arriba indicada, resulta una línea, y más precisamente la línea p transformada de la línea a con la homología que tiene como centro el punto cíclico I, como eje la recta isótropa b (con la cual ahora coinciden las rectas isótropas del segundo sistema que pasan por los varios puntos B) e invariante absoluto h.

Para que tenga sentido lo que acabo de decir hay que suponer que, mientras el lado A_0P_0 del triángulo muestra pertenece a una recta isótropa del primer sistema, el lado B_0P_0 del mismo *no* pertenece a una recta isótropa del segundo sistema ,porque de no ser así no podríamos hablar del ángulo μ como formado por las rectas B_0A_0, B_0P_0. No sólo esto, sino que la homología considerada dejaría de existir como homología no degenerada.

Sin embargo, la tercera solución c) de la cuestión que vamos a indicar, en la cual las dos rectas A_0P_0 y B_0P_0 son ambas isótropas, puede considerarse como caso límite de la b) cuando aquella homología degenere al tender a cero su invariante absoluto.

c) Si tomo como línea a una línea genérica, como línea b una recta isótropa del segundo sistema, y como triángulo $A_0B_0P_0$ un triángulo cuyos lados A_0P_0 y B_0P_0 pertenezcan a rectas isótropas respectivamente del primero y del segundo sistema, es claro que el punto P logrado a partir de cualquier par genérico de puntos A, B pertenecientes respectivamente a las líneas a, b está siempre situado sobre la misma recta b: por lo tanto en este caso el lugar del punto P es una recta p que coincide con la recta b.

Para tener en cuenta también los posibles casos límites del problema considerado, conviene admitir la posibilidad de que el triángulo muestra $A_0B_0P_0$ «degenere» en una terna de puntos alineados distintos $A_0B_0P_0$; y entonces, de acuerdo con el punto de vista adoptado, entenderemos que la configuración ABP se mantenga semejante a $A_0B_0P_0$; esto es, a cada par de puntos A B hacemos corresponder aquel punto de la recta A B tal que la razón simple (ABP) es igual a la $(A_0B_0P_0) = k$, siendo k una constante no nula ni infinita de acuerdo con el hecho de que A_0, B_0, P_0 se suponen distintos. En este caso existe la solución siguiente:

d) Las líneas a y b son dos rectas paralelas, el triángulo muestra está degenerado, siendo arbitrario el valor de la constante k: el lugar de P se reduce a una recta paralela a las a, b.

4. Pues bien, vamos a demostrar que *las cuatro soluciones indicadas* a), b), c), d), *junto con otra solución* e) *que se indicará más adelante* (n. 5) *agotan la cuestión,* es decir, *constituyen las únicas soluciones del problema considerado.*

Me refiero en primer lugar al caso en que el triángulo $A_0B_0P_0$ es degenerado; suponiendo el problema resuelto, salgo de un par de puntos A, B genéricos sobre las líneas a, b, y del correspondiente punto P, y varío el par de manera que el punto P quede fijo: claro está que así se establece una homotecia Ω que transforma a en b. Repito la misma consideración para otro par A' B, siendo A' un punto genérico de la línea a, y para el correspondiente punto P', llegando a otra homotecia Ω' que lleva a a b. Entonces la homotecia producto $\Omega\Omega'^{-1}$ transforma la línea a en sí misma, y en particular el punto A en el punto A'. Se concluye así que las rectas tangentes a la línea a en sus dos puntos genéricos A, A' son paralelas entre sí, y por lo tanto a es una recta. La línea b, como correspondiente de la línea a p. e. en la homotécia Ω, es una recta paralela a la a, y concluímos que nos encontramos frente a una solución del tipo *d*).

5. Podemos suponer desde ahora que el triángulo muestra no esté degenerado. Quitamos a la cuestión su aspecto métrico, y vamos a estudiarla en la forma siguiente, donde substituimos a los puntos cíclicos I, J dos puntos cualesquiera distintos entre sí que seguimos indicando con estas mismas letras. Fijados dos puntos I, J, y un triángulo $A_0B_0P_0$ (ninguno de cuyos vértices pertenezca a la recta I J, de acuerdo con la circunstancia de que al interpretar métricamente la cuestión se trata de puntos propios, y cuyo lado A_0B_0 no pasé por I ni por J según lo dicho en el n. 1), vamos a construir de la manera más general dos líneas a, b de manera tal, que al tomar genéricamente A y B respectivamente sobre a, b, el punto P correspondiente a P_0 en la homografía individualizada por los dos puntos unidos I y J y por los dos pares de puntos

correspondientes A_0, A y B_0, B tenga como lugar una línea p.

Sean Q_0, R_0 las proyecciones del punto P_0 sobre la recta A_0B_0 efectuadas respectivamente desde los centros I, J, y sea T_0 el punto I J. A_0B_0. Pondré $(A_0B_0Q_0T_0) = q$, $(A_0B_0R_0P_0) = r$. Para construir el punto P correspondiente a dos puntos dados A B, es claro que podemos construir los puntos Q, R de la recta AB individualizados por las dobles razones

$$(1) \qquad (ABQT) = q; \quad (ABRT) = r,$$

donde hemos puesto $T = IJ \,.\, AB$, y luego determinar P como intersección de las rectas IQ, JP.

Supondré a continuación que los valores de q, r sean ambos finitos: en caso contrario sería suficiente intercambiar los puntos A y B, a menos que de esos dos valores uno sea infinito y el otro nulo. Si p. e. $q = 0$, $r = \infty$, resulta $Q \equiv A$, $R \equiv B$: al variar A, B sobre las líneas a, b, si el punto P describe tan sólo una línea, necesariamente queda fija una de las dos rectas IA, JB, y por lo tanto una de las dos líneas a, b es una recta que pasa por uno de los dos puntos I, J. Logramos en este caso, si I, J son los puntos cíclicos, la solución c).

Excluyendo desde ahora la particularidad considerada, observo que, debido a que el punto P_0 no pertenece a ninguna de las rectas A_0B_0, I J, los valores de q, r son distintos entre sí y ambos distintos de la unidad.

Introduzco coordenadas proyectivas no homogéneas x, y con respecto a un triángulo fundamental $G_1G_2G_3$, de cuyos vértices sea $G_1 \equiv J$, $G_2 \equiv I$.

Si las líneas a, b tienen respectivamente las ecuaciones (4)

$$y = U(x), \quad y = V(x),$$

el punto P, que procede de los puntos A, B para los cuales

(4) Escapa a este método el caso en que una por lo menos de las dos líneas a, b es una recta que pasa por el punto G_2. El inconveniente se salva, intercambiando los puntos I, J: queda como ulteriormente excepcional el caso en que las líneas a, b son dos rectas que pasan una por I y la otra por J, el cual sin embargo no lleva a ninguna solución distinta de las indicadas, como se ve fácilmente.

respectivamente $x = u$, $x = v$, tiene coordenadas

$$(1) \qquad x = \frac{u - q\,v}{1 - q}\;, \quad y = \frac{U(u) - r\,V(v)}{1 - r}\;;$$

de modo que la condición para que el punto P no describa una región es

$$(2) \qquad r\,\frac{dV}{dv} = q\,\frac{dU}{du}\,.$$

Siendo u, v variables independientes, el valor común de los dos miembros de (2) es necesariamente una constante c. Distingo ahora tres casos.

Caso I. - Las dos constantes r, q son ambas distintas de cero. Escribo c en la forma $c = m\,r\,q$, siendo m otra constante, y logro

$$U(u) = mru + m_1, \quad V(v) = mqv + m_2,$$

siendo m_1, m_2 otras dos constantes. Por lo tanto las líneas a, b son dos rectas que, si $m \neq 0$ como por ahora suponemos, se cortan en un punto que no pertenece a la recta $G_1\,G_2$ por ser $r \neq q$, de manera que podemos suponer que su punto de intersección esté en el vértice G_3 del triángulo de referencia, y que por lo tanto sea $m_1 = m_2 = 0$. En cuanto al punto P, las (1) enseñan que sus coordenadas, expresadas en función de los parámetros independientes u, v son

$$x = \frac{u - q\,v}{1 - q}\,, \quad y = m\,r\,\frac{u - q\,v}{1 - r}\,.$$

Por consiguiente

$$(3) \qquad y = m\,r\,\frac{1 - q}{1 - r}\,x.$$

Por lo tanto el punto P tiene como lugar una tercera recta p que sale del punto $G_3 = ab$.

Es claro que, después de fijados I, J, A_0, B_0, P_0, las rectas a, b pueden tomarse en dos rectas arbitrarias que salgan de un punto genérico O del plano, con tal que la doble razón (a, b, OJ, OI) sea igual a r/q: la recta p resulta entonces como lugar de un punto P tal que, al variar A, B respectivamente sobre a, b, el triángulo ABP corresponde a $A_0B_0P_0$ en una homografía que tenga I, J como puntos unidos.

También pueden prefijarse, en vez de los elementos anteriores, los puntos I, J, las rectas a, b, y la posición del punto P que corresponde a una elección genérica arbitraria de los puntos A, B de las mismas, con tal que ese punto P se proyecte desde I y J sobre la recta AB en dos puntos Q, R tales que sea

$$(4) \qquad (ABRQ) = (a\,b\,OJ\,OI).$$

¿Cuál es el lugar γ del punto P que cumple con esta condición? Los pares de puntos Q, R de la recta AB que cumplen con (4) se corresponden en una proyectividad que tiene A, B como puntos unidos, de manera que γ es una cónica, y más precisamente la cónica γ individualizada por los cinco puntos I, J, A, B, O.

La solución así encontrada lleva precisamente a la solución *a*) cuando se toman los puntos I, J coincidentes con los puntos cíclicos.

Quien quiera averiguar directamente por un razonamiento sintético que, procediendo de la manera que acabamos de indicar, si A' B' son dos puntos ulteriores de las rectas *a, b,* el correspondiente P' de P en la homografía H individualizada por los cuatro pares $\begin{matrix} I & J & A & B \\ I & J & A' & B' \end{matrix}$, está sobre la recta OP, puede razonar así: Si el punto O' que corresponde a O en H es distinto de O, y la recta OO' no es unida para H, los haces de centros O, O' referidos en la proyectividad no perspectiva determinada entre ellos por H engendran una cónica irreductible C', que pasa por los puntos O', I, J, A', B', y que por consiguiente, considerada en el plano de A', tiene como correspondiente en el plano de A una cónica $C \equiv \gamma$. Y como los puntos de las dos cónicas C, C' correspondientes en la homografía H resultan por construcción alineados sobre O, sigue la propiedad enunciada. En los casos excluídos, si $O \equiv O'$, se llega a la misma conclusión observando que la homografía tiene más de dos rectas unidas distintas por O, y es por lo tanto una homología de centro O. Quedaría la hipótesis que sea $O \not\equiv O'$ y la recta OO' unida: pero ésta no podría ser distinta de las dos rectas OI, OJ (porque si no tendríamos una homología de centro O); y si p. e. coincidiese con OI, el razonamiento del caso general llevaría a la conclusión de que los tres puntos A, B, J estarían alineados, contrariamente a nuestras hipótesis.

Caso II. - Sigo suponiendo $r \neq 0$, $q \neq 0$ pero ahora $m = 0$. Entonces $U = m_1$, $V = m_2$, y el punto P que procede de los puntos $A(u, m_1)$, $B(v, m_2)$ tiene coordenadas, de acuerdo con las (1):

$$x = \frac{u - qv}{1 - q}, \quad y = \frac{m_1 - r m_2}{1 - r}.$$

Por lo tanto las líneas a, b son rectas que pasan por J, y lo mismo ocurre de la línea p. En la homografía H considerada más arriba son ahora unidas las tres rectas a, b, JI, de modo que H es una homología de centro J, cuyo eje pasa por I.

Efectivamente, *si partimos de dos rectas* a, b *por* J, *y de un triángulo* ABP *de cuyos vértices* A *y* B *pertenecen respectivamente a las rectas* a, b, *y* P *es arbitrario, al transformarlo mediante las* ∞^2 *homologías de centro J cuyos ejes pasan por* I, *logramos* ∞^2 *triángulos* A'B'P', *de cuyos vértices* A' *y* B' *son dos puntos cualesquiera de* a, b, *y* P' *viene a recorrer tan sólo una línea, y precisamente la recta* p $\equiv$ JP.

Es ésta la otra solución e) a la cual he aludido en el enunciado al principio del n. 4.

Caso III. - Sea nula una de las constantes q, r, p. e. sea $q = 0$ (y entonces $r \neq 0$, porque en caso contrario resultaría $Q_0 \equiv R_0 \equiv A_0$, y por lo tanto — siendo $P_0 \not\equiv A_0$ — la recta A_0P_0 coincidiría con la IJ, lo que contradice nuestras hipótesis). Entonces el punto P pertenece constantemente a la recta AI, y la (2) deja ahora arbitraria la función $U(u)$, mientras que V resulta una constante, que, aprovechando la arbitrariedad de G_3, podemos suponer nula. En el caso actual las (1) se escriben

$$x = u, \qquad y = \frac{U(u)}{1 - r},$$

y por lo tanto expresan que el lugar de P es una línea homológica de la línea (arbitraria) a en una homología de centro I, cuyo eje es una recta por J que actúa como línea b.

Esta solución corresponde por consiguiente a la b) de arriba.

Los resultados enunciados quedan así demostrados.