I. SCHUR †

Con algún atraso — debido a las tristes circunstancias que atraviesa el mundo — nos ha llegado la dolorosa noticia del fallecimiento del ilustre matemático I. Schur. Estaba gravemente enfermo ya hace dos años, cuando se había retirado a Tel Aviv, y parece que ahora murió allí mismo, en el día de su 66º cumpleaños.

Schur había nacido el 10 de Enero de 1875 en Mogilev (Rusia), pero luego vino a Berlín, donde se destacó entre los alumnos de G. Frobenius y rápidamente fué su colaborador. Habiéndose recibido, con la memoria «Ueber eine Klasse von Matrizen, die sich einer gegebenen Matrix zuordnen lassen» (1901), y habiendo decidido dedicar su vida a la investigación matemática, obtuvo en 1903 su primera cátedra en la Universidad de Berlín. La dejó sólo por algún tiempo, cuando en 1913 fué llamado para ocupar una cátedra de la Universidad de Bonn, pero 3 años después volvió definitivamente a la Universidad de Berlín para dictar los cursos de álgebra y teoría de de los números (y otros más). La mejor demostración de la estima que gozaba Schur en Berlín, tanto por sus excepcionales calidades de maestro como por la nobleza de su carácter, es el hecho de que muchas veces él estaba obligado a dictar sus cursos en el «Auditorium Maximum» de la Universidad, por ser tan numerosos sus oyentes que no cabían en las otras salas de clase que de costumbre servían para los cursos de Matemáticas.

Es una lástima que Schur, en su modestia, nunca quería publicar, en forma de libro, los cursos que dictaba; sólo una vez hizo una excepción, con la publicación de un curso sobre una materia que siempre le había interesado mayormente: la representación de grupos por matrices («Die algebraischen Grundlagen der Darstellungstheorie der Gruppen», Zurich, 1936).

En cambio, en revistas matemáticas Schur ha publicado más de 70 artículos, la mayoría en «Journal für die reine und angewandte Mathematik», «Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften» y «Mathematische Zeitschrift»; de esta última revista Schur era uno de los fundadores y editores. En el espacio limitado de esta necrología es casi imposible dar una idea concreta de esa vasta e incomparable obra científica de Schur que abarca igualmente álgebra, teoría de los números, teoría de las funciones complejas, teoría de los grupos y de un modo especial, la representación de grupos por matrices. Ni siquiera es posible aquí mencionar todos los trabajos del ilustre matemático y tenemos que limitarnos a hablar sucintamente sólo de algunos de ellos.

Sin duda alguna, uno de los mayores triunfos científicos de Schur ha sido su teoría de la representación de grupos (de orden finito) por substituciones lineales fraccionarias (o sea, en lenguaje geométrico, por transformaciones proyectivas). Es sabido que Frobenius — e independientemente de él, Burnside — habían tratado antes la representación de grupos por matrices (o sea por substituciones lineales enteras). Schur no sólo logró simplificar notablemente la teoría de Frobenius (con su publicación «Neue Begruendung der Theorie der Gruppencharaktere» en «Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften», Berlín, 1905); en dos publicaciones muy importantes (en «Journal für die reine und angewandte Mathematik», vol. 127 y vol. 132). Schur resolvió de un modo muy interesante también el problema análogo (y no menos difícil) de encontrar las representaciones de un grupo finito por substituciones lineales *fraccionarias,* demostrando que para cada grupo finito se puede determinar otro grupo (llamado «Darstellungsgruppe») de modo que el problema de la representación del grupo dado, por substituciones lineales fraccionarias, es equivalente al problema (resuelto, como dijimos, por Frobenius, Burnside y Schur mismo) de la representación por substituciones lineales *enteras* de ese «Darstellungsgruppe». Sumamente interesante es también la aplicación que ha hecho Schur de su teoría al caso de los grupos simétrico y alternado (en vol. 139 del mismo «Journal... »).

Sin poder hablar sobre los trabajos no menos interesantes que Schur ha publicado sobre las representaciones del grupo lineal general (en «Sitzungsberichte... », 1927 y 1928), pasamos a citar unas pocas de las publicaciones de Schur sobre problemas de álgebra. En «Gleichungen ohne Affekt» («Sitzungsberichte... », 1930), Schur logró determinar el grupo (de Galois) de la ecuación:

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = 0;$$

resulta que ese grupo es el simétrico de n variables, salvo el caso de n divisible por 4; en este último caso Schur demuestra que es el grupo alternado en n variables, dando así por primera vez un ejemplo concreto de ecuaciones cuyo grupo de Galois es un grupo alternado. En la misma memoria Schur demuestra que el grupo simétrico de n variables es también grupo (de Galois) de la ecuación algebraica que resulta poniendo igual a cero el polinomio de Laguerre:

$$\frac{e^x}{n!} \cdot \frac{d^n (x^n e^{-x})}{d x^n} = 1 - \binom{n}{1}\frac{x}{1!} + \binom{n}{2}\frac{x^2}{2!} - + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{n!}$$

Resultados parecidos que se refieren a la ecuación:

$$1 - \binom{n}{1}\frac{x}{2!} + \binom{n}{2}\frac{x^2}{3!} - + \ldots + (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)!} = 0$$

y a los polinomios de Hermite, los publicó Schur un año después bajo el título «Affektlose Gleichungen in der Theorie der Laguerreschen und Hermiteschen Polynome» («Journal... », vol. 165).

Otra publicación algebraica de Schur («Ueber die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten», en «Math. Zeitschrift», vol. 1, nº. 4), aunque escrita todavía en 1918, merece aun hoy día el mayor interés. Basándose en unos teoremas de Stieltjes sobre los discriminantes de algunos polinomios clásicos (p. e. los de Hermite), y en otros teoremas parecidos, indicados por primera vez por Schur mismo, éste obtiene una serie de muy interesantes y sorprendentes teoremas sobre ecuaciones algebraicas:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0,$$

con coeficientes *enteros* $a_0, a_1, \ldots a_n$. Por ejemplo demuestra Schur que tales ecuaciones que tengan sólo raíces reales y todas distintas entre sí, las que cumplan además con la condición

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n} \leqq \gamma,$$

hay sólo en número finito, para cada valor de a_0, si $\gamma < \sqrt{e} = 1{,}6487\ldots$; en cambio, hay infinitas ecuaciones de esa misma clase si $\gamma \geqq 2$.

Por fin sea citado por lo menos el título de una importantísima publicación de Schur sobre ciertas funciones complejas: «Ueber Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschraenkt sind» (en «Journal... », vol. 147 y 148); pues, el espacio limitado no nos permite entrar mayormente en detalles.

Tampoco es posible citar los numerosos trabajos que debemos a Schur sobre los más variados problemas de la teoría de los números; sin embargo esperamos haber dado una idea de la vastedad de la obra científica de Schur y de la consiguiente pérdida que su muerte significa para la ciencia.

Roberto Frucht

CUESTIONES ELEMENTALES

13. — Es bien conocido el problema llamado de los tres pueblos y las tres fuentes: Dados tres puntos A, B, C y otros tres A', B', C', del mismo plano, es imposible trazar desde cada uno de los primeros a cada uno de los segundos un arco tal que los nueve arcos no se corten en ningún punto distinto de los seis dados.

Se propone demostrar que en la superficie tórica y también en el plano proyectivo y en el anillo de Moebius, el problema tiene siempre solución. ¿Qué sucede si en vez de la segunda terna se da una cuaterna A' B' C' D'?

14. — El famoso geometra Moebius se complacía en proponer a sus discípulos este problema:

Un príncipe oriental repartió su reino entre sus cinco hijos de modo tal que cada dos porciones tenían frontera común. ¿Es posible?