ENIGMAS DE LA MATEMATICA

III. - La «Hipótesis del continuo»

La teoría de conjuntos creada por Cantor, en el último tercio del siglo pasado, tiene como base el concepto de potencia de un conjunto infinito, generalización del concepto de número cardinal de un conjunto finito. Según Cantor, dos conjuntos tienen la misma potencia cuando se puede establecer entre los elementos de ambos una correspondencia biunívoca, es decir, una correspondencia tal que a cada elemento de un conjunto le corresponda un elemento y uno solo del otro conjunto.

Este concepto carecería de mayor interés si todos los conjuntos infinitos tuvieran la misma potencia; toda la teoría de Cantor, la mayor contribución a la matemática desde la invención del cálculo infinitesimal, reposa en última esencia en el hecho de que existen conjuntos infinitos que tienen distinta potencia; el primer ejemplo que dió Cantor para demostrar esta proposición es particularmente notable por la importancia de los dos conjuntos que lo constituyen, el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números reales.

Los conjuntos que tienen la misma potencia que el de los números reales se dicen de potencia del continuo (entre ellos figura el conjunto de los puntos de un espacio cartesiano de cualquier número de dimensiones); los conjuntos que tienen la misma potencia que el de los números naturales se dicen numerables (entre ellos figuran el conjunto de los números racionales y el de los números algebraicos).

Una vez estos resultados establecidos se plantea naturalmente el siguiente problema: ¿todo conjunto de números o de puntos del plano o de puntos de un espacio cartesiano de cualquier número de dimensiones, será forzosamente numerable o de potencia del continuo?

La respuesta de esta pregunta es, posiblemente, el más importante de los problemas sin resolver de la matemática actual y ya Hilbert, en su famosa conferencia del Congreso de Matemáticas de París a comienzos del presente siglo, lo clasificaba en primer lugar entre los problemas no resueltos de la matemática.

La respuesta afirmativa a esta cuestión constituye la «hipótesis del continuo», que puede por tanto enunciarse como la hipótesis de que *todo conjunto no numerable de números reales tiene la potencia del continuo*.

Esta hipótesis es equivalente, una vez definidos los conceptos de mayor y menor potencia de dos conjuntos (un conjunto se dice de menor potencia que otro cuando tiene la misma potencia que un subconjunto de este último y la recíproca no se verifica), a afirmar que no existe ningún conjunto de potencia mayor que la de los conjuntos numerables y menor que la del continuo.

Puede darse otra manera de enunciar la hipótesis del continuo ligada con el concepto de número ordinal de un conjunto.

Un conjunto se dice que está *ordenado* cuando, dados dos elementos a y b, se puede decir o bien que a precede a b o que b precede a a, y esta relación es transitiva.

Un elemento al que no le precede ningún otro de un conjunto, se dice el primer elemento del conjunto, y un conjunto tal que todo subconjunto no nulo admita un primer elemento se llama *bien ordenado*.

Dos conjuntos ordenados se dice que tienen el mismo tipo de orden o el mismo número ordinal cuando se puede establecer entre ambos una correspondencia biunívoca y que conserve el orden en los elementos homólogos. Evidentemente, dos conjuntos que tienen el mismo tipo de orden tienen la misma potencia, pero la recíproca en cambio no es cierta (1).

El concepto de tipo de orden o de número ordinal de un conjunto se aplica en particular a los conjuntos bien ordenados. Los números ordinales de los conjuntos finitos se dicen que son de clase I y los correspondientes a los conjuntos bien ordenados numerables son los números transfinitos de clase II. Ahora bien, se demuestra que el conjunto de todos los números transfinitos de clase II no es numerable y que no existe ninguna potencia intermedia entre la de los conjuntos numerables y la de este conjunto.

La hipótesis de que esta potencia es la del continuo es otra forma distinta de enunciar la hipótesis del continuo; se llama también la hipótesis H).

Estas dos maneras de enunciar la hipótesis del continuo son equivalentes, pero, si bien es verdad que se demuestra que la hipótesis H) implica que todo conjunto no numerable de números reales tiene la potencia del continuo, la demostración de la recíproca necesita la aplicación del axioma de Zermelo.

Si se pudiera demostrar la hipótesis del continuo, la teoría de conjuntos se simplificaría grandemente, puesto que para demostrar que un conjunto de números reales, o de puntos de un plano, o de un espacio cartesiano, tiene la potencia del continuo, bastaría demostrar que no es finito ni numerable, lo que simplificaría muchas demostraciones; por otra parte, la hipótesis H) implica la existencia de un conjunto bien ordenado de potencia del continuo, luego apoyándose en ella podrían demostrarse, sin utilizar el axioma de Zermelo, los teoremas cuyas demostraciones se apoyan en un caso particular del

(1) Ver por ejemplo: SIERPINSKI, *Leçons sur les nombres transfinis.*

teorema de Zermelo, es decir en la existencia de un conjunto bien ordenado cuyos elementos son todos los números reales (2).

El problema de la resolución afirmativa o negativa de la hipótesis del continuo ha sido el objeto de numerosos trabajos de parte de los matemáticos contemporáneos, pero hasta ahora sin ningún resultado; estos esfuerzos, no obstante, han servido para establecer numerosas proposiciones que son consecuencia y aun que son equivalentes a la hipótesis del continuo, sin que en ningún caso se haya encontrado una contradicción que hubiera probado la falsedad de la hipótesis. Por otra parte existen hoy día matemáticos que creen en la imposibilidad de resolver este problema sin admitir un nuevo axioma (3).

Vamos ahora a enunciar algunas proposiciones que no han podido ser demostradas sin la ayuda de la hipótesis del continuo o que son equivalentes a ésta y que, como veremos, se relacionan con diversas ramas de la matemática actual.

Son equivalentes a la hipótesis del continuo, es decir, que admitida ésta se pueden demostrar y recíprocamente de ellas se puede deducir la hipótesis, las proposiciones siguientes:

A) «El conjunto de todos los puntos del plano es una suma de dos conjuntos, de los cuales uno tiene como intersección con toda paralela al eje de abscisas un conjunto a lo más numerable, y el otro tiene como intersección con toda paralela al eje de ordenadas un conjunto también a lo más numerable (es decir nulo, finito o numerable)».

B) «El espacio ordinario de tres dimensiones es una suma de una infinidad numerable de curvas». Se entiende por curva en este caso el conjunto de todos los puntos (x, y, z) que satisfacen a las ecuaciones $x = f(z)$, $y = g(z)$, o a las análogas considerando la x o la y como variables independientes, siendo las funciones f y g funciones unívocas de una variable real.

C) «Existe una sucesión de funciones unívocas de una variable real $f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x), \ldots$ tal que cualquiera que sea el conjunto no numerable de números reales que se considere, todas las funciones de la sucesión, salvo a lo más un número finito, transforman dicho conjunto en el conjunto de todos los números reales».

(2) Recordemos que el enunciado del teorema de Zermelo es que "todo conjunto puede ser, de una posibilidad ideal, considerado como conjunto de elementos de un conjunto bien ordenado".

(3) A los eminentes matemáticos que han dedicado sus esfuerzos a resolver este problema sin conseguirlo pero que han hecho progresar la matemática en general y en particular la teoría de conjuntos, se les podría aplicar la conocida frase del Dr. Letamendi, "El que se dedique a tirar piedras a la Luna no conseguirá su objeto, pero llegará a ser el mejor tirador de su país", sin que esto signifique prejuzgar la posibilidad o imposibilidad de la resolución de este problema.

D) «El conjunto de todos los números reales es una suma de conjuntos crecientes y numerables». Varios conjuntos se dice que son crecientes cuando tomados dos conjuntos distintos cualesquiera, uno de ellos es parte alícuota del otro.

E) «Existe en el espacio de Hilbert un conjunto no numerable de puntos tal que ningún subconjunto no numerable sea homeomorfo a una parte de un espacio euclidiano».

Las proposiciones que vamos a citar ahora son simplemente consecuencia de la hipótesis del continuo, es decir, que admitida ésta las proposiciones quedan demostradas, pero en cambio si postulamos la validez de las proposiciones no sabemos deducir la hipótesis del continuo, quedando por tanto la posibilidad de que puedan más adelante demostrarse sin utilizar la hipótesis; vamos a enunciar algunas de ellas:

1) «Existe un conjunto lineal de potencia del continuo que admite como intersección con cualquier conjunto lineal perfecto no denso un conjunto a lo más numerable».

2) «Existe un conjunto lineal de potencia del continuo del que todas las imágenes homeomorfas son de medida nula».

3) «Existe un conjunto plano de potencia del continuo tal que todo subconjunto no numerable del mismo no es medible superficialmente en el sentido de Lebesgue».

4) «Entre los tipos de dimensiones de Fréchet de los conjuntos lineales no numerables no existe ninguno que sea el más pequeño».

Otra de las consecuencias de la hipótesis del continuo se relaciona con el llamado problema de la medida generalizada; es sabido que existen conjuntos de puntos que no son medibles en el sentido de Lebesgue; lógicamente se plantea el problema de encontrar otra definición de medida de un conjunto que comprenda a la de Lebesgue y que esté definida para cualquier conjunto de puntos. Ahora bien, si se admite la hipótesis del continuo se demuestra que no es posible esta definición de medida, es decir se demuestra que:

5) No existe ninguna función real de conjunto lineal, es decir, una función $m(E)$, que haga corresponder a cada conjunto E un número real finito $m(E)$, y que verifique las condiciones siguientes:

a) m(E) *está definida cualquiera que sea el conjunto lineal* E.

b) m(E) *no es idénticamente nula.*

c) m(E) *es completamente aditiva,* es decir que cualquiera que sea la sucesión de conjuntos sin parte común $E_1, E_2, \ldots E_n, \ldots$ se verifica

$$\sum_1^{\infty} m(E_i) = m\left(\sum_1^{\infty} E_i\right)$$

d) m(E) *se anula si* E *se compone de un solo punto,* y en virtud de c) también si E es un conjunto numerable.

Terminamos esta exposición remitiendo al lector para su ampliación y para las demostraciones de los resultados en ella enunciados a la obra del eminente matemático, fundador de la escuela polaca, Waclaw Sierpinski, titulada «Hypothese du continu» (de la colección de monografías matemáticas de la Universidad de Varsovia). En ella encontrarán además muchas más proposiciones equivalentes a la hipótesis del continuo o consecuencias de ella, así como un estudio del *problema del continuo* y de la llamada *hipótesis del continuo generalizada*, problemas de importancia en teoría de conjuntos pero que aquí no podemos hacer más que enunciar.

Manuel Balanzat

VARIA

12. — *Una disertación de Weyl sobre el pensar matemático*

En ocasión del segundo centenario de la University of Pennsylvania, se celebraron reuniones y conferencias, una de las cuales estuvo a cargo de Hermann Weyl, quien disertó sobre: The mathematical way of thinking, entendiendo por ello, en primer lugar la forma de raciocinio a través del cual la matemática penetra en las ciencias del mundo exterior: física, química, biología, economía, etc., así como en el pensar común; y en segundo lugar la forma de raciocinio que el matemático aplica en su propio campo. Caracteriza el pensar matemático como un pensar concretamente, que se enfrenta cara a cara con las cosas, y como un pensar abstracto que reemplaza las ideas intuitivas por puros símbolos. Toda la disertación está impregnada por la tendencia constructivista de la matemática, aunque al final la compara con la tendencia axiomática refiriéndose a los esfuerzos de Hilbert y al teorema de Gödel, concluyendo, respecto de los fundamentos de la matemática, que nunca como hoy hemos estado tan poco seguros de los fundamentos últimos sobre los que ella descansa; lo que no impide, termina diciendo la interesante disertación, que esta ciencia, a pesar de su edad y de su creciente complejidad, no esté afectada por una esclerosis progresiva y, por el contrario, siga intensamente viva y alimentándose continuamente a través de sus profundas raíces arraigadas en la mente y en la naturaleza.

De *Studies in the history of Science.* Philadelphia, 1941.

13. — *De la correspondencia de Hermite a Stieltjes*

''Querido amigo. mucho me alegro de tener conocimiento de su opinión de que hay que transformarse en naturalista para observar los fenómenos del mundo aritmético. Su doctrina es la mía; yo no creo que los números y las funciones del análisis sean productos arbitrarios de nuestro espíritu; más bien pienso que tienen existencia fuera de nosotros, con el mismo carácter de necesidad que los objetos de la realidad objetiva, y que nosotros los encontramos o los descubrimos y los estudiamos lo mismo que los físicos, los químicos o los naturalistas''.