CONOIDE ESFERICO CON DOS DIRECTRICES RECTILINEAS

(Tema Nº 13, Vol. VII, pág. 27)

Como la solución dada por el Sr. Eduardo Gaspar al tema propuesto por el profesor Rosell Soler hace una generalización distinta de la que el autor deseaba, puede interesar quizás la siguiente solución, levemente modificada, que en diciembre de 1940 enviamos al autor, cuando nos propuso el tema.

Conoide recto. Si es P la traza de la directriz rectilínea con el plano diametral horizontal, siendo recto el ángulo formado por cada tangente horizontal a la esfera con el radio correspondiente de la sección circular (horizontal) resulta como proyección horizontal de la curva de contacto Γ la circunferencia de diámetro OP. Es decir: dicha curva Γ es la intersección de la superficie esférica con el cilindro vertical circular cuya traza es dicha circunferencia, y es trivial la construcción de la tangente como intersección del plano tangente a ese cilindro circular con el plano tangente a la esfera.

Conoide oblicuo. Si es P la traza de la directriz oblicua s sobre el plano diametral horizontal, y se supone, como siempre es posible, situada esa directriz s en el plano diametral paralelo al vertical del dibujo, siendo Q la intersección de s con el eje vertical de la esfera, los puntos de la curva se proyectan confundidos de dos en dos sobre el plano vertical, por simetría, y la curva que forman es una hipérbola, como se ve inmediatamente por generación proyectiva o simplemente observando la relación

$$DA \, . \, DE = r^2 \qquad \text{o sea} \qquad x \, . \, k\,(z - q) = R^2 - z^2$$

siendo R el radio de la esfera, r el de la circunferencia sección horizontal a la altura z, q la altura u ordenada z de Q y k la pendiente negativa de PQ. Esa hipérbola tiene, pues, como asíntota la recta $z = q$ horizontal trazada por Q y su tangente en A se construye inmediatamente con el exágono $JJKAAH$. Basta cortar las cuerdas AH, AK con las horizontales por H y K y la recta $H'K'$ determina sobre JQ un punto T de la tangente en A a la hipérbola (1).

La intersección del plano que proyecta sobre el vertical la recta AT así obtenida, con el plano tangente a la esfera, es la tangente buscada. Su proyección vertical es AT y la horizontal se deduce inmediatamente por rotación del plano tangente a la esfera, como se ve en la figura.

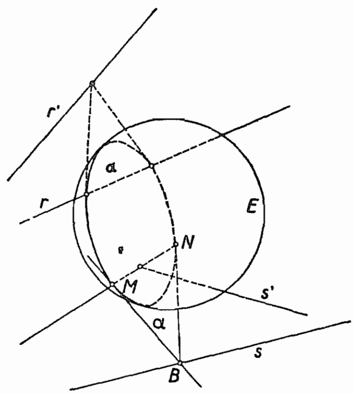

Fig. 1

Se ha dibujado además la elipse traza del cono proyectante de la curva Γ desde el vértice Q, la cual resulta del método general que ahora daremos y puede utilizarse también en lugar de la hipérbola. No se confunda esa elipse con la próyección horizontal de Γ, que es una cuártica no dibujada.

Finalmente, por la misma regla del exágono se han construído las tangentes a la hipérbola en H y K, que son las trazas de los planos osculadores en H y K a la curva Γ; todas las líneas de construcción están indicadas en la figura.

Conoide de directrices propias. Dada la esfera E y las directrices rectilíneas r y s las rectas que cortan a r, s y son tangentes a la esfera, forman un conoide cuya curva de contacto con la esfera vamos a estudiar, quedando incluídos como casos particulares el conoide *recto*, en que r sea una recta impropia y s una recta propia perpendicular, y también el caso del co-

(1) Cada letra designa el punto en el espacio y también su proyección vertical. La horizontal la designamos con subíndice 1.

noide llamado *oblicuo,* en que s es oblicua respecto de la orientación definida por la recta impropia r.

Excluído el caso trivial en que r y s se cortan, caso en que el conoide se reduce al plano rs más el cono circunscrito a E desde el punto común, supongamos que r y s se cruzan. El haz de planos (α) de arista r determina sobre s una serie (B) y sus polos A respecto de E forman otra serie (A) siendo $(A) \overline{\wedge} (B) \overline{\wedge} (\alpha)$.

Las generatrices del conoide que pasan por B son las tangentes desde B a la circunferencia sección por el plano α; los puntos de contacto M, N están en el plano polar de B y como los planos polares de los diversos puntos B de s forman un haz proyectivo con (B) cuya arista es la recta s' polar de s, resulta que los puntos M, N de la curva de contacto están situados en la superficie engendrada por los haces de planos $(\alpha) \overline{\wedge} (\beta)$ de aristas r y s'.

En el caso más general en que r y s' se crucen, resulta pues una cuádrica F alabeada que contiene las rectas r y s', cuya intersección con E determina la curva de contacto, lugar de los puntos M, N. Tal curva es, por consiguiente, una cuártica de primera especie, que contiene los puntos, reales o imaginarios, de intersección de r con E, así como también los de s' con E; por ella pasan infinitas cuádricas, una la esfera E y otra la F. La tangente en M a la curva en cuestión es, por tanto, la intersección del plano tangente a E con el plano μ tangente a F, o sea, la tangente en M a la cónica C en que el plano tangente a E corta a F.

Todo se reduce, pues, a construir la tangente en M a esta cónica C, perfectamente determinada por los dos haces proyectivos en que dicho plano μ corta a los haces $(\alpha) \overline{\wedge} (\beta)$. Si el conoide está representado por un sistema de proyección, bastará considerar en cada plano de proyección los haces de rectas proyecciones de dichos haces de rectas proyectivos, y la tangente a la cónica engendrada por tales haces es la proyección de la tangente buscada, quedando resuelto el problema muy sencillamente.

Fijémonos por ejemplo en el caso más frecuente y anteriormente resuelto en que una de las directrices r sea impropia y la otra s sea una recta cualquiera no paralela a aquella orientación, es decir, no secante de r. Como los puntos comunes a

r y E son los puntos cíclicos de r resulta una cuártica circular. El caso más sencillo será aquél en que las rectas s' y r se cortan o, lo que es equivalente, se cortan s y r', es decir, la directriz s corta en un punto Q a la recta diametral que es per-

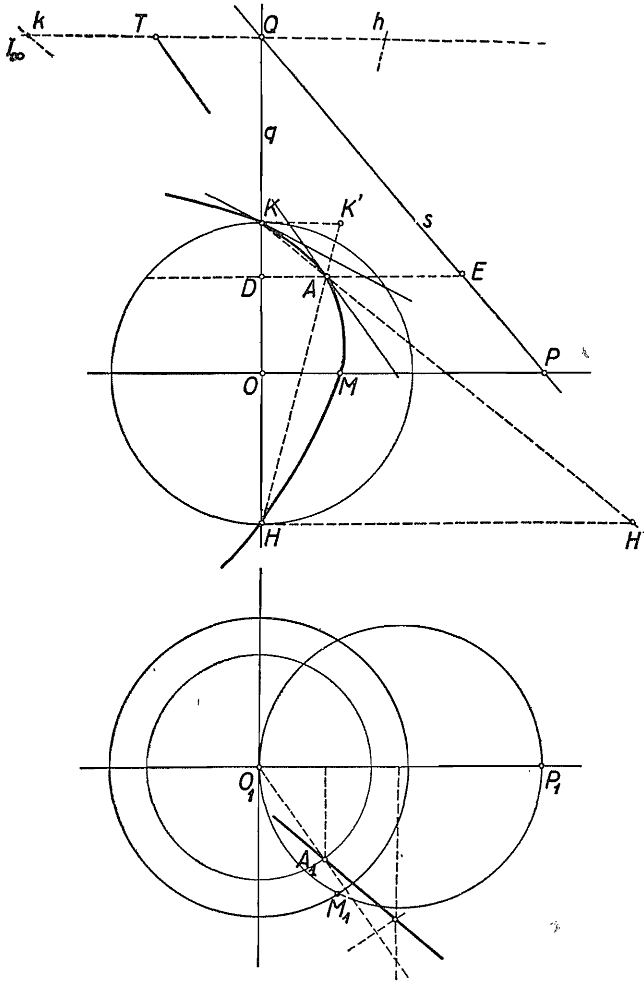

Fig. 2

pendicular a la orientación de r. Entonces los haces proyectivos s y r' cuyas aristas tienen un punto impropio común, engendran un cilindro cuya intersección con E es la curva estudiada. Suponiendo, para fijar ideas, una representación diédrica, si se elige, como antes hemos hecho, s paralela al plano vertical, resulta un cono de segundo orden, con vértice Q, que contiene a la curva. Aunque la tangente buscada se obtiene inmediatamente, como intersección del plano tangente a este cono con el tangente a E, es preferible utilizar el otro cono, cuyo vértice es el punto $s' r$, es decir, el cilindro proyectante de la curva sobre el plano vertical, que es de segundo grado por lo antes demostrado, y está perfectamente determinado por su traza sobre el plano vertical, la cual es una hipérbola de la que se conocen los puntos siguientes: H y K proyecciones de los puntos situados en el diámetro vertical; L proyección de los puntos situados en la circunferencia ecuatorial, cuya determinación es inmediata; el punto impropio J con su tangente horizontal y todavía, si se quiere, el punto proyección vertical del par de puntos de contacto de los planos tangentes trazados por s y que determinan la polar s'. Con cinco puntos se determina cualquiei otro M de la curva mediante la regla y lo mismo la tangente en él utilizando el exágono de Pascal, como hemos hecho antes, o bien haces proyectivos.

Caso del conoide recto. Si la directriz s es perpendicular a la orientación de la recta impropia r, es decir, si s es vertical, la proyección vertical de Γ es simétrica respecto el diámetro horizontal y por tanto es una parábola que tiene este eje y pasa por los puntos $H K$ siendo su vértice el punto L polo de la recta s respecto de la circunferencia. La construcción de la tangente a esa parábola puede hacerse por cualquiera de los métodos conocidos, pero más sencillo es utilizar el cono de vértice Q, que es precisamente el cilindro proyectante vertical, cuya sección por el plano horizontal es una circunferencia de diámetro $O_1 P_1$, como ya hemos visto al principio.

J. Rey Pastor