TEMAS RESUELTOS

25. *Sumar la serie*

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!\,(n+1)}$$

R. P.

Solución. La serie de potencias

$$y = \sum_{0}^{\infty} \frac{n!\,x^n}{(2n)!\,(n+1)}$$

es una trascendente entera, pues el cociente de dos términos consecutivos

$$h = x\frac{(n+1)\,(2n)!\,(n+1)!}{(n+2)\,(2n+2)!\,n!} = \frac{(n+1)^2\,x}{(n+2)\,(2n+1)\,(2n+2)}$$
$$= \frac{(n+1)\,x}{2\,(n+2)\,(2n+1)}$$

tiene por límite 0.

Para el cálculo aproximado de la trascendente entera sea

$$S_n = \sum_{0}^{n} \frac{m!\,x^m}{(2m)!\,(m+1)}; \qquad \text{y} \qquad y = S_n + \alpha$$

donde, para $x > 0$

$$\alpha = \alpha + \frac{n!\,x^n}{(2n)!\,(n+1)} - \frac{n!\,x^n}{(2n)!\,(n+1)} < \frac{n!\,x^n}{(2n)!\,(n+1)}\left(\frac{1}{1-h} - 1\right)$$
$$= \frac{n!\,x^n}{(2n)!\,(n+1)}\,\frac{h}{1-h} \qquad \text{y como} \qquad h < \frac{x}{2\,(2n+1)}$$
$$\alpha \leqq \frac{n!\,x^n}{(2n)!\,(n+1)}\,\frac{x}{4n+2-x}$$

por lo tanto el error de S_n es, por defecto, menor que su último término por la fracción $\dfrac{x}{4n+2-x}$.

Para $x < 0$, por ser alternada, su error es menor que el último término de S_n y de igual signo que él.

Así el valor de la serie pedida, con todas sus cifras exactas por defecto, es 1,27998 haciendo $x = 1$ y tomando $n = 5$. En cambio la serie alternada

$$\sum_0^\infty \frac{(-1)^n n!}{(2n)!\,(n+1)}$$

toma el valor 0,77581 con todas sus cifras exactas haciendo $x = -1$ y tomando $n = 5$.

Podemos expresar la trascendente entera, y por lo tanto la serie pedida en forma de integral haciendo

$$y = \frac{1}{x}\int_0^x \sum_0^\infty \frac{n!\,u^n\,du}{(2n)!} = 1 - \frac{1}{x}\int_0^x \sum_1^\infty \frac{(-1)^n u^n\,du}{(-2n)^{(n,-1)}}$$

donde el denominador indica la factorial de base $-2n$, de grado n y diferencia -1. Como la serie integrando puede expresarse por una integral definida (1)

$$y = 1 - \frac{1}{x}\int_0^x u\,du \int_0^{-\infty} e^{2t - u(e^{2t} - e^t)}\,dt = 1 + \frac{1}{x}\int_0^x u\,du \int_0^1 v e^{uv(1-v)}\,dv$$

La segunda integral, cambiando v por $1 - v$, se puede expresar

$$\int_0^1 v e^{uv(1-v)}\,dv = \int_0^1 (1 - v)\, e^{uv(1-v)}\,dv = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{uv(1-v)}\,dv$$

$$= \frac{1}{2}\, e^{\frac{u}{4}} \int_0^1 e^{-u\left(v - \frac{1}{2}\right)^2}\,dv$$

$$= e^{\frac{u}{4}} \int_0^{\frac{1}{2}} e^{-uv^2}\,dv = \frac{e^{\frac{u}{4}}}{\sqrt{u}} \int_0^{\frac{\sqrt{u}}{2}} e^{-t^2}\,dt = \frac{e^{\frac{u}{4}}}{\sqrt{u}}\, \vartheta\left(\frac{\sqrt{u}}{2}\right)$$

(1) Ver: BABINI, José, *Series cuyos coeficientes contienen factoriales*, en esta Revista, vol. I, pág. 27 y 28. Buenos Aires 1937. En la fórmula que ahí da ω_2 hay que tomar $z = -\frac{1}{u}$; $h = -a = 2$; $k = 1$.

siendo $\vartheta(x)$ la función error de Gauss. En definitiva

$$y = 1 + \frac{1}{x}\int_0^x e^{\frac{u}{4}} \sqrt{u}\, \vartheta\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) du$$

y la serie pedida tendrá por suma $1 + \int_0^1 e^{\frac{u}{4}} \sqrt{u}\, \vartheta\left(\frac{\sqrt{n}}{2}\right) du.$

J. Babini

Otra solución. Aunque la serie propuesta sufrió una alteración de copia que impide su expresión por números conocidos o más fáciles de calcular que la propia serie, rápidamente convergente, resulta interesante por conducir a una integral que así queda expresada mediante la serie. Ante todo descompongamos:

$$\frac{n!}{(2n)!\,(n+1)} = \frac{4\,(n+1)!}{(2\,n+2)!} - \frac{2\,.\,n!}{(2\,n+2)!}$$

y aplicando el método de Borel, la suma de la serie viene expresada así:

$$s = 4\int_0^\infty e^{-t} \Sigma \frac{t^{n+1}}{(2\,n+2)!}\, dt - 2\int_0^\infty e^{-t} \Sigma \frac{t^n}{(2\,n+2)!}\, dt$$

La primera integral transformada por partes y poniendo $t = x^2$ es:

$$4\int_0^\infty e^{-x^2}\, sh\, x\,.\, dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2} (e^x - e^{-x})\, dx = 2\, e^{\frac{1}{4}} \int_0^\infty e^{-(x-\frac{1}{2})^2}\, dx -$$

$$- 2\, e^{\frac{1}{4}} \int_0^\infty e^{-(x+\frac{1}{2})^2}\, dx = 2\, e^{\frac{1}{4}} \int_{-1/2}^\infty e^{-u^2}\, du - 2\, e^{\frac{1}{4}} \int_{1/2}^\infty e^{-u^2}\, du = 4\, e^{\frac{1}{4}}\, \vartheta\left(\frac{1}{2}\right)$$

Haciendo también $t = x^2$ en la segunda integral resulta:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} [e^x + e^{-x} - 2]\, \frac{dx}{x} = 2\, e^{\frac{1}{4}}\, \vartheta\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{s}{2}.$$

J. R. P.