SOBRE LA RESOLUCION GRAFICA DE LA ECUACION CUBICA

I. La sencilla representación gráfica de las raíces imaginarias de la ecuación cuadrática dada por el Sr. Rebella, sugiere dar otra análoga para la de tercer grado, probablemente conocida también. Todo se reduce a sustituir el punto impropio del eje x por la intersección real a de la curva, que se supone dibujada. La abscisa p del punto de contacto de la tangente trazada desde dicho punto a es la parte real de las raíces imaginarias; y trazada por a la recta de pendiente doble, las proyecciones sobre el eje de los dos puntos de intersección, son simétricas respecto de p, y su distancia δ de él es la componente imaginaria. Se determinará x_0 más exactamente con esta secante que con la tangente, pues ésta deja un tanto indeterminado el punto de contacto, mientras que dicha secante da muy exactamente las dos componentes de las raíces imaginarias.

La demostración es inmediata; sea la ecuación:

$$y = a(x - x_0)(x^2 - 2px + q);$$

para toda recta $y = k(x - x_0)$ las intersecciones vienen dadas por la ecuación

$$k = a(x^2 - 2px + q) \quad \text{de donde,}$$

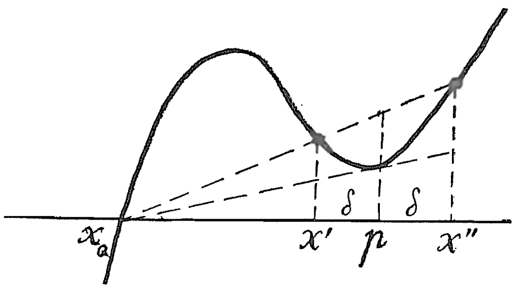
$$\frac{x' + x''}{2} = p \qquad\qquad \frac{x' - x''}{2} = \sqrt{p^2 - q + \frac{k}{a}},$$

luego las proyecciones tienen el mismo punto medio p, que en particular es la abscisa del punto de contacto de la tangente; la pendiente de ésta es $k' = a(q - p^2)$ y para $k = 2k'$ resulta como semidiferencia de raíces precisamente $\delta = \sqrt{q - p^2}$, que es la componente imaginaria de las raíces $p \pm \delta i$.

En su nota de Math. Monthly (1941), da Gehman[1] como

(1) H. M. Gehman, *Complex roots of a polynomial equation*, American Mathematical Monthly, Vol. 48, 1941.

interpretación de la componente imaginaria la raíz de la pendiente de la tangente; pero aparte de exigir la construcción de una media y una cuarta proporcional, tal regla es válida solamente cuando el coeficiente es $a = 1$, y esto se ignora si se da la curva sin su ecuación. En cambio, con la regla que damos,



construida la tangente, como puede hacerse con excelente aproximación, y dibujada la recta de pendiente doble, la proyección de sus intersecciones representa gráficamente el par de raíces imaginarias y da entrambas componentes: p y δ, como se ve en la figura.

J. R. P.

II. Otra construcción gráfica, por el método de las coordenadas, de las raíces reales y complejas de la ecuación cúbica, puede basarse sobre la siguiente propiedad: si para $p > 0$ y $q'^2 - q^2 = \frac{4p^3}{27}$, las raíces de las ecuaciones $x^3 + px + q = 0$ y $x^3 - px + q' = 0$ son, respectivamente, x_1 (real), $x_{2,3}$ (imaginarias) y x'_1 (real), $x'_{2,3}$ (imaginarias) se verifica

$$x_{2,3} = \frac{-x_1 \pm i\sqrt{3}\,x'_1}{2}$$

$$x'_{2,3} = \frac{-x'_1 \pm i\sqrt{3}\,x_1}{2}.$$

Basta considerar que las dos ecuaciones anteriores tienen como radicales de Cardano, respectivamente u, v y u, $-v$.

De donde, si se representan gráficamente las ecuaciones

$$y = x^3 + px \qquad (1)$$

$$x = y^3 - py \qquad (2)$$

$$x^2 - y^2 = \frac{4p^3}{27} \qquad (3)$$

las paralelas a los ejes por el punto $(-q', -q)$ de la hipérbola (3) determinan sobre (1) y (2) los valores x_1 y x'_1; vale decir, la raíz real y números proporcionales a los componentes de las raíces complejas de ambas ecuaciones $x^3 + px + q = 0$; $x^3 - px + q' = 0$.

Esta misma propiedad podría utilizarse para la determinación nomográfica de las raíces complejas de la cúbica $x^3 + px + q = 0$, superponiendo al clásico nomograma para la ecuación (ver, por ejemplo, D'Ocagne, M., *Cálculo gráfico y nomografía,* ed. española, pág. 319) sobre la escala de p una de $\left(\frac{p}{3}\right)^3$ y sobre la de q una de $\frac{q^2}{2}$, y dibujando el soporte de la escala «muda» de K para completar el nomograma de ecuación

$$\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27} = \frac{q'^2}{2} + \frac{(-p)^3}{27} = K,$$

con lo que las alineaciones p, q y $-p, q'$ que se cortan sobre el soporte de K permiten conocer q' partiendo de q o viceversa.

J. B.

CUESTIONES ELEMENTALES

15. — En qué dirección debe atravesarse una calle por la que avanza un vehículo de modo que el riesgo de ser alcanzado al cruzar delante del mismo sea mínimo?

16. — Dos cilindros circulares rectos, del mismo radio $r = 1$ y de alturas ilimitadas en ambas direcciones, están colocados de modo que sus ejes se cortan bajo un ángulo φ. Determinar, para $0 < \varphi \leq 90°$, el volumen $V(\varphi)$ de la "penetración" o sea del conjunto de los puntos que pertenecen a los dos cilindros a la vez.