

TANGENTES A LA CURVA DE CONTACTO DE UNA SUPERFICIE DADA Y DE UNA SUPERFICIE REGLADA CON DOS DIRECTRICES RECTILINEAS

por ALEJANDRO TERRACINI

En el Vol. VII (1940), p. 27 de la *Revista de la Unión Matemática Argentina*, el Prof. P. Rosell Soler propuso el siguiente tema: *Construir la tangente en cada uno de sus puntos a la curva de contacto de una esfera con el conoide circunscrito definido por una directriz rectilínea exterior y la recta impropia del plano perpendicular a ésta. Generalización.* El señor Eduardo Gaspar dedicó a la cuestión un artículo: *Curva de contacto de un conoide con la superficie directriz*, en la misma Revista, Vol. VIII (1942), p. 126, en el cual estudió el caso propuesto por el Prof. Rosell Soler y su generalización a una superficie de revolución de eje paralelo a la directriz propia del conoide. Al mismo tema se refiere una interesante Nota del Prof. Rey Pastor: *Conoide esférico con dos directrices rectilíneas*, publicada a continuación de la anterior, que encara el problema bajo un aspecto esencialmente algebraico-geométrico, fundándose en la consideración de la cuártica alabeada de primera especie que constituye la línea de contacto.

Quizás tengan algún interés las consideraciones siguientes, en las cuales adopto una posición distinta, en cuanto considero en lugar de una esfera una superficie cualquiera, y coherentemente con tal planteo del problema lo encaro desde el punto de vista de la geometría diferencial. El problema viene esquematizado así: supongamos que sobre una superficie Φ se conozca un punto P que pertenece a su línea de contacto L con una superficie reglada dotada de dos directrices rectilíneas r, s , es decir, se conozca un punto P tal que una recta p tangente a la Φ en el mismo se apoya a las rectas r, s : se trata de indicar una construcción de la recta l tangente a la línea L en el punto P . Es plausible, a priori, y resultará confirmado por las consideraciones que siguen, que lo que interesa de la superficie Φ es tan sólo su elemento de segundo orden E_2 en el punto P , de manera pues que el planteo del problema puede esquemati-

zarse ulteriormente, imaginando dadas las rectas alabeadas⁽¹⁾ r, s y un elemento superficial de segundo orden E_2 mediante el punto P , el correspondiente plano tangente π , y convenientes datos ulteriores que permitan remontar a dicho elemento. Si queremos colocarnos en las condiciones más generales, podemos suponer conocidas las dos tangentes de curvatura en P y los correspondientes dos centros de curvatura de las dos secciones normales principales. Sin embargo, en los casos más elementales los aludidos datos ulteriores resultarán de manera particularmente sencilla de la representación de la superficie en el método de geometría descriptiva que se adopte para realizar gráficamente la construcción: p. e., si la superficie es esférica, será suficiente conocer el centro; si es un cono cualquiera individualizado — como se hace de ordinario — por el vértice y una directriz plana, el conocimiento del radio de curvatura en un punto de ésta permite reconstruir los elementos de segundo orden en todos los puntos de la generatriz que pasa por aquél; para una superficie de revolución, será suficiente servirse convenientemente del radio del paralelo y del radio de curvatura del meridiano, etc.

La recta l tangente al E_2 , definida de acuerdo con lo dicho por la recta p tangente al mismo E_2 y las rectas alabeadas r, s incidentes a la p , se llamará a continuación tangente *subordinada* a la terna de rectas p, r, s .

Independientemente de las consideraciones de alcance constructivo, me pareció que valía la pena detenerse brevemente sobre algunas cuestiones de carácter más bien teórico que se vinculan con aquellas. Cito entre ellas la noción de las congruencias lineales especiales *asociadas* a un par ordenado de tangentes en un punto de una superficie (o de un E_2), y la del invariante proyectivo al que da lugar un elemento superficial de segundo orden junto con un par de rectas que cortan el plano tangente en dos puntos alineados con el punto de contacto. Por tales nociones queda mejor iluminada la naturaleza de los instrumentos geométricos puestos en juego en las construcciones. Además el planteo de la cuestión del n. 4 del presente trabajo, la que precisamente consiste en poner y analizar la

(1) Esta condición se sobreentenderá siempre a continuación.

noción de las congruencias lineales asociadas o, lo que da lo mismo, de la *red de complejos lineales conjugada* a un par de tangentes, parece tener cierto interés por la razón siguiente. Si las dos rectas r, s vienen a ser incidentes en un punto (necesariamente situado sobre la recta p) la recta l tangente en P a la línea L se reduce a la tangente conjugada de la p (en el sentido de Dupin), y por lo tanto depende únicamente de la p y de la superficie Φ . Si en cambio pasamos al caso general en el cual las rectas r, s son alabeadas, la recta l subordinada a la terna p, r, s ya no resulta definible por completo únicamente mediante la superficie Φ y la tangente p ; sino que para determinar su posición intervienen *en cierto grado* las rectas r, s : pues bien ¿cuál es efectivamente ese grado? Es decir, ¿a través de cuáles figuras dependientes de r, s estas rectas influyen efectivamente sobre la posición de l ?

1. Llamaré R, S a los puntos en los cuales las dos rectas r, s cortan la recta p tangente al E_2 considerado; n a la recta normal al E_2 en P ; φ y ψ a los ángulos (pn, pr) y (pn, ps) respectivamente, es decir los ángulos entre el plano normal por p y los planos que unen la propia p a la recta r y a la s . Las rectas p y n pueden orientarse de maneras arbitrarias.

Adopto por ahora coordenadas cartesianas ortogonales⁽²⁾ xyz , colocando el origen en el punto P centro del E_2 considerado, y los ejes z, x, y coincidentes respectivamente con la n y con la recta p tangente en P apoyada a las rectas r, s . La orientación del eje y resulta individualizada por las de p y n .

Suponiendo por ahora propias las rectas r y s , sean

$$x = ez + m, \quad y = fz \quad (1)$$

las ecuaciones de la primera, y

$$x = gz + k, \quad y = hz \quad (2)$$

las de la segunda. Sea

(²) Sin embargo, la hipótesis de la ortogonalidad es inessential en la deducción de las fórmulas (4), (5), de manera que ellas y sus consecuencias rigen, aún en el caso de ejes no ortogonales, suponiendo tan sólo que el origen está en P , el eje x coincide con p , y el plano xy con π ; esto encontrará aplicación en el n. 4.

$$z = \varphi(x, y) \quad (3)$$

la ecuación local de la superficie Φ sobre la cual se considera el E_2 . Las dos derivadas parciales primeras de φ son nulas en P ; pondré

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_P = 2a, \quad \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)_P = 2b, \quad \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_P = 2c.$$

Un punto (x, y, z) de la superficie Φ está situado sobre la línea L si los dos planos que desde el mismo proyectan las dos rectas fijas r, s , es decir, los dos planos de ecuaciones (en coordenadas corrientes X, Y, Z):

$$(y - fz) (X - eZ - m) - (x - ez - m) (Y - fZ) = 0,$$

$$(y - hz) (X - gZ - k) - (x - gz - k) (Y - hZ) = 0$$

pertenecen a un haz junto con el plano tangente a la superficie Φ en el punto considerado. La condición es por lo tanto:

$$\begin{vmatrix} y - f\varphi & -(x - e\varphi - m) & -ey + f(x - m) \\ y - h\varphi & -(x - g\varphi - k) & -gy + h(x - k) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Esta ecuación, en la cual figuran tan sólo x, y , representa un cilindro de generatrices paralelas al eje z , cuya intersección con la Φ constituye precisamente la línea L . Formando las derivadas parciales primeras del primer miembro para $x=y=0$, resulta que la recta l tangente subordinada a la terna de rectas p, r, s considerada, está representada en el plano xy por la ecuación

$$2mk(f - h)(ax + by) + (m - k)y = 0. \quad (4)$$

Antes de seguir, observemos que la posibilidad de representar las rectas r, s con los sistemas (1), (2) está supeditada a la condición que ellas no se apoyen a la recta impropia del plano π ,

es decir, no corten la p en su punto impropio. Pues bien, si r, s son las dos propias, la eventualidad mencionada no puede presentarse para un punto genérico de la línea L , de manera que, para que las consideraciones que estamos desarrollando sean aplicables a los puntos genéricos de la línea L , queda por considerar únicamente el caso en que una de las rectas r, s , p. e. la s , es impropia. Si seguimos representando la r con las (1), mientras que s es la recta impropia del plano $y = hz$, imitando el procedimiento de arriba, o bien pasando al límite en la (4) por k tendiente a ∞ , se encuentra como ecuación de la recta l la

$$2m(f - h)(ax + by) - y = 0. \quad (5)$$

Para interpretar geoméricamente las (4), (5), observemos que $a = 1/(2 \cdot PC)$, llamando C al centro de curvatura en P de la sección normal tangente a p , y que $ax + by = 0$ es la ecuación (en el plano xy) de la tangente p' conjugada de la p en el sentido de Dupin, de modo pues que

$$b = -\frac{1}{2PC} \cotg pp'.$$

Luego de las (4), (5) se saca respectivamente:

$$\cotg pl = \cotg pp' + \frac{PC \cdot RS \cos \varphi \cos \psi}{PR \cdot PS \sin(\psi - \varphi)}, \quad (6)$$

$$\cotg pl = \cotg pp' + \frac{PC \cos \varphi \cos \psi}{PR \sin(\psi - \varphi)}. \quad (7)$$

Pues bien, si, para fijar las ideas, nos referimos al caso más general, es decir, a la fórmula (6), la representación gráfica del E_2 considerado en uno cualquiera de los métodos en uso en la geometría descriptiva, p. e. en el de Monge, permite deducir las representaciones de la recta p' y del punto C (3):

(3) Si p. e. como se supuso más arriba, el E_2 está individualizado, además que por el punto P y el plano tangente π , por las dos tangentes de curvatura en P y los dos correspondientes centros de curvatura de las secciones norma-

por otra parte las distancias PC, RS, PR, PS se deducen inmediatamente del dibujo, mientras que los ángulos φ y ψ resultan gráficamente como ángulos $\overset{\wedge}{nr'}$, $\overset{\wedge}{ns'}$ contenidos en el plano ν llevado por P normalmente a la p , comprendidos entre la normal n y las trazas r' y s' sobre el propio ν de los dos planos pr y ps . Por lo tanto el segundo miembro de la (6), y luego el primero, se construye elementalmente sin dificultad mediante abatimientos, p. e. transformando gráficamente los dos sumandos en las razones de dos segmentos a un tercero.

En las construcciones hay que tener presente, por lo que se refiere a los signos de los ángulos φ y ψ , que el triedro trirrectángulo $pyn \equiv xyz$ tiene sus aristas y caras orientadas como los triedros cartesianos ortogonales de referencia, de manera que en el plano ν los ángulos tienen que medirse positivamente en el sentido determinado por la orientación de p (4).

En el caso en que la superficie dada es una esfera, el primer sumando del segundo miembro — ya sea en la (6) como en la (7) — se reduce a cero, y el punto C coincide con el centro de la esfera, de manera que todo se reduce a construir gráficamente el segundo sumando, mediante segmentos y ángulos conocidos, como acabamos de indicarlo para el caso de una superficie cualquiera.

Volviendo al caso general, el segundo sumando del segundo miembro p. e. de la (6) puede construirse, además que de la manera ya indicada, acudiendo a la idea siguiente. Recuerdo que, si en un plano η tenemos tres puntos P, R, S de una recta

les principales, pueden dibujarse en posición y magnitud en el plano tangente abatido, los dos ejes de una indicatriz de Dupin, que, para fijar las ideas, suponemos sea p. e. una elipse, al acudir a un segmento e arbitrario y adoptar como semiejes $\sqrt{e\rho_1}$ y $\sqrt{e\rho_2}$, siendo ρ_1 y ρ_2 los dos radios principales de curvatura. Entonces, si 2ρ es la longitud del diámetro cortado por la elipse sobre la recta p , se tiene $|PC| = \rho^2/e$, mientras que p' es el diámetro conjugado al diámetro p ; ρ y p' se determinan mediante muy sencillas y clásicas construcciones de geometría proyectiva. Como aplicación inmediata, indicamos p. e. el caso en que Φ es una superficie de revolución, individualizada por el eje y una línea meridiana; particularmente elemental es el caso del toro.

(4) Es claro que la orientación elegida sobre p (junto con la que de ella se deduce para el plano ν) no tiene influencia sobre ninguno de los términos; la de la n (junto con aquella a la que lleva para el plano τ) influye sobre el signo de cada uno de los términos.

p y dos rectas ulteriores r, s por P , existe una fórmula de Staudt⁽⁵⁾ la que expresa mediante dichos elementos la curvatura en P de las ∞^1 cónicas cuya polaridad subordina entre la puntual p y el haz P la proyectividad ω individualizada por las ternas de elementos correspondientes PRS, prs . Más precisamente, si el plano η y la recta p están orientados arbitrariamente, y se adopta como positivo sobre la normal en P el sentido deducido del sentido positivo de p mediante una rotación de $+\pi/2$, la distancia entre P y el centro de curvatura C^* de las cónicas mencionadas está dada, aún en signo, por

$$PC^* = \frac{PR \cdot PS \operatorname{sen} rs}{RS \operatorname{sen} pr \operatorname{sen} ps}. \quad (8)$$

Luego, en el problema de arriba, si adoptamos como plano η el plano v normal en P a la p (el cual ya está orientado como plano yz , así como ya está orientada la recta y), y al aplicar la (8) reemplazamos las rectas p, r, s por y, r', s' , y los puntos R, S por los puntos R^*, S^* logrados llevando sobre y los segmentos $PR^* = PR, PS^* = PS$, la (6) toma la forma

$$\operatorname{cotg} pl = \operatorname{cotg} pp' + \frac{PC}{PC^*}. \quad (9)$$

Por lo tanto, la construcción gráfica de la recta l puede efectuarse mediante la (9), después de construir el punto C^* . Una manera conveniente para construir este punto consiste en observar que obviamente la (8) puede aplicarse empleando en lugar de R, S, r, s dos puntos cualesquiera de la puntual y sus rectas correspondientes en la proyectividad ω . Si p. e. acudimos al punto impropio A_∞ de la y y a la correspondiente recta límite a del haz, poniendo $\operatorname{tg} ya = \alpha$, y construimos luego la recta b del haz tal que $\operatorname{tg} yb = \alpha/(\alpha + 1)$, la propia (8) enseña que $PC^* = PB$, aún en signo, siendo B el punto correspondiente de b en la proyectividad ω . La construcción está efectuada en la figura 1, la que se refiere al plano v abatido

⁽⁵⁾ *Beiträge zur Geometrie der Lage*, 2. Heft, p. 280; véase el artículo III C 1 de F. DINGELDEY en la *Enc. der math. Wissenschaften*, Band III, zweiter Teil, p. 74.

sobre el primer cuadro: en la misma, para construir la proyectividad ω , se cortó el haz con una paralela y' a la recta y , construyendo a como eje de colineación entre las puntuales

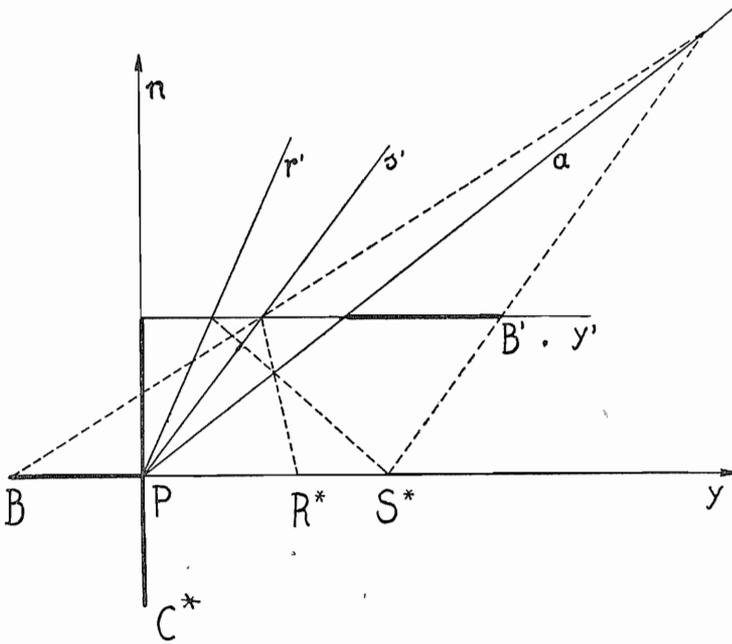


Fig. 1

y e y' , y deduciendo el punto B' de la b al llevar convenientemente sobre y' un segmento igual a la distancia entre la recta y y la y' (es inútil trazar la b).

Lo dicho se aplica, en particular, al caso en que p. e. la recta s es impropia; la construcción resulta entonces simplificada debido a que la recta a ya coincide con la recta s' .

2. El caso más sencillo es el en que la recta s es impropia, y la r tiene dirección perpendicular a la misma. Puede suponerse sin restricción que la r sea vertical.

Si seguimos fijando las ideas en el caso en que las construcciones se efectúan en un sistema de Monge, podemos reemplazar la (7) por otra fórmula apropiada para dar a conocer directamente la primera proyección l_1 de la recta l ⁽⁶⁾ (sin

⁽⁶⁾ Análogamente, indicamos con p_1, p'_1 , etc. las primeras proyecciones de p, p' , etc.

que haga falta acudir a construcciones efectuadas en el plano v mediante abatimiento del mismo sobre el primer cuadro). De la (7) aplicada al caso actual, dividida por $\cos \varphi$, y aplicando el teorema de Meusnier para evaluar el radio de curvatura en P de la sección producida en la superficie Φ por el plano horizontal pasante por p , se deduce (aún en signo):

$$\cotg p_1 l_1 = \cotg p_1 p'_1 - \frac{PC_0}{PR}, \quad (10)$$

donde llamamos C_0 al centro de curvatura en P de dicha sección plana horizontal, siendo la recta PC_0 orientada de modo que el ángulo (p, PC_0) sea de $+\pi/2$.

La (10) permite una construcción muy sencilla de la recta l : en ella el E_2 interviene, además que con la tangente p' conjugada de p , con el radio de curvatura de la sección plana horizontal. Si R_1 es el punto al que se reduce la primera proyección de r , trazando y_1 perpendicular a $p_1 \equiv P_1 R_1$ (esto es, uniendo mediante y_1 el punto P_1 con la primera proyección C_{01}

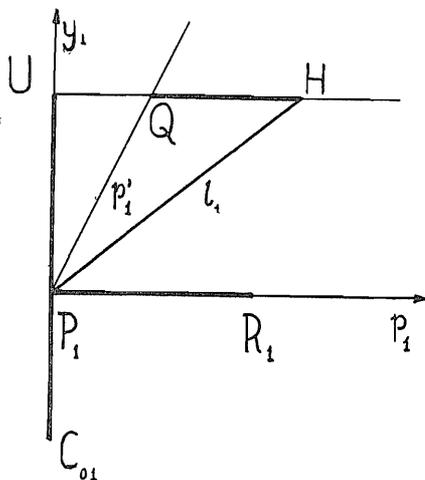


Fig. 2

de C_0) y vinculando su orientación con aquella (arbitraria) de p_1 mediante $\hat{p}_1 y_1 = +\pi/2$, se construye sobre la misma el punto U tal que $P_1 U = P_1 R_1$, y sobre la paralela llevada por U

tido del segmento S_p, O . En la figura se orientó la p_1 desde P_1 hacia R_1 , y la y_1 en conformidad. Sobre la y_1 se ha llevado el segmento $P_1U = P_1R_1$, y por U la paralela a p_1 , la que corta p'_1 en un punto Q , a partir del cual sobre la misma recta se ha marcado el punto H tal que $QH = -S_p, O$. La recta P_1H es la primera proyección l_1 de la tangente buscada.

El caso de s impropia perpendicular a la dirección de r , considerado en el presente n., tiene particular interés no sólo por su simplicidad, sino también porque el caso general puede siempre reducirse al mismo, como resultará de las consideraciones del n. 3.

3. Dados como arriba un E_2 y las rectas p, r, s , queda individualizada la tangente l subordinada a la terna p, r, s . Huelga decir que, aunque las fórmulas encontradas tienen aspecto y naturaleza métrica, la vinculación entre aquellos datos y la l tiene carácter proyectivo.

Fijados el E_2 y la recta p , cabe preguntarse de cuál manera pueden variar las rectas r y s , si se pide que la recta l quede invariada.

Llamaré l_0 el coeficiente angular de la recta l en el plano xy , el que se deduce inmediatamente de la (4).

Introduzco coordenadas radiales homogéneas de recta p_{ik} ($i, k = 1, 2, 3, 4$), llamando respectivamente p'_{ik} y p''_{ik} las coordenadas de las rectas r, s , de modo pues que p. e.

$$p'_{12} : p'_{13} : p'_{14} : p'_{34} : p'_{42} : p'_{13} = -fm : -m : e : 1 : -f : 0.$$

Por lo tanto la relación entre l_0, a, b, f, h, m, k brindada por la (4) viene a escribirse

$$2(a + b l_0) (p'_{13} p''_{12} - p'_{12} p''_{13}) + l_0 (p'_{13} p''_{34} - p'_{34} p''_{13}) = 0. \quad (11)$$

La (11) es una ecuación bilineal alternada entre las p'_{ik} y las p''_{ik} ; la misma, al considerar provisionalmente las p''_{ik} como coordenadas corrientes, representa un complejo lineal, el que contiene evidentemente entre sus rectas la r y también la p (cuyas coordenadas son todas nulas con excepción de la p_{14}): además en la polaridad nula definida por el complejo el punto P tiene π como plano polar. Por lo tanto, dados el E_2 , la recta p y la r , se logra siempre la misma recta l cuando la recta s

varía dentro de este complejo lineal, es decir, como la recta s se apoya a la p que pertenece al complejo, cuando la recta s varía dentro de la congruencia lineal especial Γ de directriz p intersección del complejo lineal mencionado con el complejo lineal especial de directriz p (esto es, de ecuación $p_{23} = 0$).

Geoméricamente, la congruencia lineal especial Γ está completamente definida por su directriz p y las condiciones de contener la recta r , la s , y las rectas del haz $P\pi$. Por la misma razón, al variar r dentro de la misma congruencia lineal especial Γ , la recta l queda invariada. Llegamos así a la conclusión siguiente:

La recta l tangente a un E_2 subordinada a una terna de rectas p, r, s queda invariada cuando, fijados el E_2 y la recta p , las rectas r y s varían dentro de la congruencia lineal especial de directriz p , la que junto con las rectas r y s contiene las rectas del haz $P\pi$ (congruencia que también puede definirse por la proyectividad Ω entre la puntual p y el haz de planos homónimo individualizada por la terna de puntos P, pr, ps y la terna de planos correspondientes π, pr, ps).

Lo dicho se presta a una aplicación constructiva casi inmediata. La proyectividad Ω puede construirse p. e. reemplazando la puntual p por su proyección ortogonal sobre el primer cuadro (donde hay que considerar los tres puntos P_1, R_1, S_1) y el haz de planos de eje p por el haz de rectas que constituye su sección con el primer cuadro, el cual tiene su centro en la primera traza S_p de la p (a los tres puntos mencionados de p_1 corresponden la primera traza s_π del plano π y las rectas que unen S_p a las primeras trazas, S_r y S_s respectivamente, de las r, s). Al punto impropio D_∞ de p corresponde un plano δ , y al plano ε que une p con el punto impropio J_∞ en dirección perpendicular a δ corresponde un punto E de la puntual p . Entonces las rectas r, s pueden reemplazarse por la $\bar{r} \equiv EJ_\infty$ y la recta impropia \bar{s}_∞ del plano δ , las cuales vienen a encontrarse en las condiciones del n. 2, prescindiendo de la posición particular que en dicho n. tenía la recta r con respecto al primer cuadro. Pueden sin embargo aplicarse las construcciones del n. 2, acudiendo a un plano paralelo al plano δ que desempeñe el papel que en esa oportunidad desempeñaba el primer cuadro.

La construcción se presenta de la manera más sencilla cuan-

do una de las dos rectas r, s , p. e. la s , es impropia, y luego puede suponerse coincidente con la recta impropia del primer cuadro, mientras que la recta r es una recta genérica, generalmente no vertical. La reducción al caso de r vertical se efectúa entonces de la manera siguiente. En el caso actual, el plano δ coincide con el plano horizontal llevado por p , y el plano ε con el plano vertical que pasa por esta misma recta. Actuando como arriba, hay que considerar en el primer cuadro la proyectividad entre la puntual p_1 y el haz impropio de las paralelas a p_1 , en la cual se corresponden P_1 y s_π , R_1 y la primera traza $s_{pr} \equiv S_p S_r$ del plano pr , y los elementos impropios, y

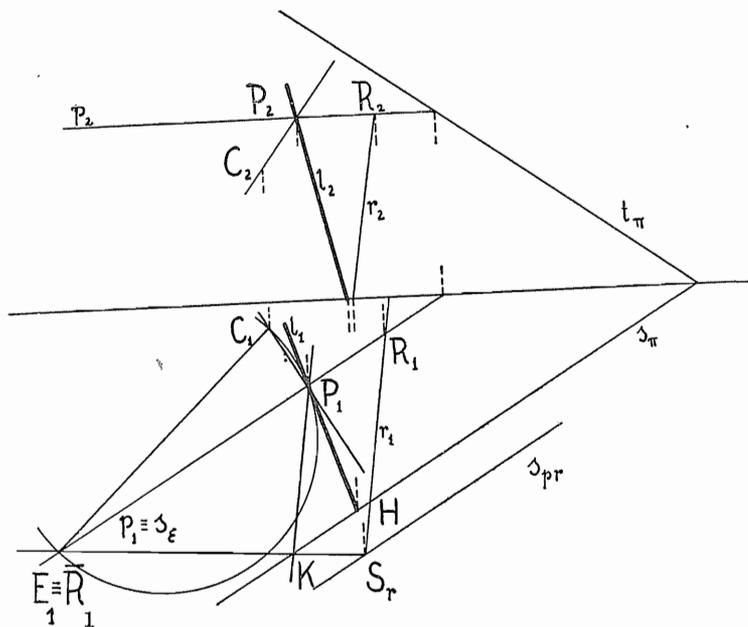


Fig. 4

buscar sobre la puntual el punto E_1 homólogo de la recta $s_\varepsilon \equiv p_1$ del haz impropio. La construcción de la proyectividad puede hacerse p. e. cortando el haz con la transversal r_1 , sobre la cual las cuatro rectas consideradas del haz cortan respectivamente los puntos $H \equiv r_1 s_\pi$, S_r , el punto impropio y el punto R_1 . El eje de colineación (el que une el punto S_r con la intersección

K de s_π con la paralela llevada por P_1 a la r_1) corta la p_1 en el punto E_1 , al cual se reduce la primera proyección \bar{R}_1 de la recta vertical \bar{r} que se substituye de tal manera a la r .

En la fig. 4 se ha efectuado por completo la construcción en el caso en que la superficie Φ es una esfera de centro C: para mayor claridad, se trazó la recta s_{pr} , aunque no necesaria para la construcción. En este caso, después de logrado el punto \bar{R}_1 , se obtiene l_1 como tangente en P_1 a la circunferencia de diámetro $C_1\bar{R}_1$.

OBSERVACIÓN. Lo dicho en el presente n. puede vincularse (con prescindencia de algunas particularidades gráficas) con el procedimiento indicado en la última parte del n. 1 para aplicar constructivamente la fórmula de Staudt. En substancia la construcción aludida estriba en la consideración de una proyectividad ω entre la puntual y y el haz Pv . Ahora bien, la primera se logra de la puntual p mediante rotación de $\pi/2$ en el plano π , y el segundo por sección del haz de planos de eje p , el que está relacionado con la puntual p mediante la proyectividad Ω . En los dos casos se acude al elemento del haz correspondiente al punto impropio de la puntual, etc.

4. Prescindiendo de las aplicaciones de carácter constructivo desarrolladas en el n. anterior, cabe proponerse adquirir una visión geométrica más satisfactoria de la vinculación entre el E_2 , las tangentes p y l al mismo, y la congruencia lineal especial Γ . La cuestión puede plantearse de la manera siguiente: dados un E_2 , una recta p tangente al mismo, y dos rectas alabeadas r, s incidentes a la p , la tangente l del E_2 subordinada a la terna p, r, s no varía al variar r, s dentro de la congruencia Γ considerada en el n. 3: si se conocen las rectas r, s , la congruencia Γ resulta conocida de acuerdo con los resultados anteriores: si en cambio suponemos conocer las dos rectas p, l tangentes al E_2 ¿cuáles son las congruencias lineales especiales Γ tales que, al elegir r, s dentro de una de ellas, la terna p, r, s tenga como subordinada la l ? Llamaremos a esas congruencias las *congruencias lineales especiales asociadas al par (ordenado) de tangentes p, l* (se sobreentiende, con respecto al E_2).

Dichas congruencias lineales especiales Γ integran un conjunto tal que cada recta genérica r incidente a la p pertenece

a una y una sola de ellas, como se deduce de la (11) en la cual se consideren las a, b, l_0 y p'_{ik} como conocidas, de manera pues que se trata de un conjunto ∞^1 tal que cubre simplemente el complejo lineal especial de directriz p . Lo que queremos es una descripción completa en términos geométricos proyectivos de dicho conjunto ∞^1 de congruencias, y una individualización en términos análogos de la congruencia del conjunto que contiene una recta r prefijada genéricamente entre las apoyadas a la p .

Para simplificar en algunos puntos la expresión, acudimos a la cuádrlica M_4^2 de Klein del espacio de 5 dimensiones S_5 , cuyos puntos representan las rectas del espacio ordinario (al que llamaremos Σ_3). Usaremos para el punto de S_5 representativo de una recta del espacio Σ_3 coordenadas coincidentes con las coordenadas radiales p_{ik} , ya empleadas más arriba, e indicaremos con G_{ik} los vértices de la pirámide de referencia del S_5 .

Sobre la M_4^2 , como es sabido, una superficie Φ del espacio ordinario Σ_3 se representa en una congruencia (g) de rectas g , cada una de las cuales es la imagen de un haz $P\pi$ de rectas tangentes a la Φ : cada una de éstas tiene como imagen un punto de la g , y en particular las dos tangentes asintóticas de la Φ en P , u y v , se representan en dos puntos (reales o no, lo mismo como esas tangentes asintóticas) de la g , que indico con F_u y F_v . Estos puntos F_u y F_v son los dos focos de la recta g con respecto a la congruencia (g); al variar g cada uno de ellos describe generalmente una superficie focal, respectivamente (F_u) y (F_v) — eventualmente reducida a una línea focal — cuyo plano tangente en el mismo punto indicaré con $\vartheta_2^{(u)}, \vartheta_2^{(v)}$, entendiéndose que si p. e. (F_u) se reduce a una línea, $\vartheta_2^{(u)}$ indique el plano que une su recta tangente en F_u con la correspondiente recta g . Los dos planos $\vartheta_2^{(u)}, \vartheta_2^{(v)}$ pasan obviamente por la recta g , y están contenidos dentro del espacio de tres dimensiones g'_3 polar de g con respecto a la M_4^2 ; además son mutuamente polares con respecto a esta cuádrlica.

Si en el espacio ordinario Σ_3 nos limitamos a considerar un elemento de segundo orden E_2 , sobre la M_4^2 puede tomarse como imagen del mismo la figura de conjunto integrada por la recta g que representa el haz de rectas $P\pi$, dos puntos F_u y F_v de g (imágenes de las tangentes asintóticas) y un plano por

g dentro de g'_3 como plano $\vartheta_2^{(u)}$ (si se quiere una figura substancialmente equivalente pero más simétrica, puede tomarse un par de planos $\vartheta_2^{(u)}, \vartheta_2^{(v)}$ pasantes por g y situados dentro de g'_3 mutuamente polares con respecto a la M_4^2). Lo dicho se averigua p. e. mediante la consideración siguiente, cuyo resultado nos servirá aún más adelante. Tomemos en Σ_3 el E_2 definido por

$$z = ax^2 + 2bxy, \quad (12)$$

donde elegimos no sólo el origen en el punto P del E_2 y el plano xy coincidente con el plano tangente π , sino también el eje y en una de las dos tangentes asintóticas en P (que llamamos u). Es claro que de esta manera, al pedir que además el eje x coincida con una tangente prefijada genéricamente en el punto P como se hará más adelante, hay que renunciar a la ortogonalidad del sistema de referencia; pero esto no tiene inconveniente, como se observó en el n. 1.

Al haz de rectas $P\pi$ corresponde sobre la M_4^2 de Klein la recta $G_{14}G_{42}$, sobre la cual $F_u = G_{42}$, mientras que F_v es el punto para el cual $p_{14} : p_{42} = 2b : a$. Para una superficie que contenga el E_2 (12) un cálculo sin dificultades enseña que el plano $\vartheta_2^{(u)}$ está dado por las ecuaciones

$$p_{13} = p_{23} = 0, \quad 2bp_{12} + p_{34} = 0. \quad (13)$$

Luego efectivamente un E_2 del espacio ordinario individualiza en S_5 una figura del tipo considerado $gF_uF_v\vartheta_2^{(u)}$; y viceversa, debido a que, si partimos de dicha figura, la recta g da a conocer un haz de rectas $P\pi$ de Σ_3 , los puntos F_u y F_v llevan a dos tangentes asintóticas, es decir a una representación (12) en la cual a y b están determinados a menos de un factor común, y por fin, como lo enseña la (13), $\vartheta_2^{(u)}$ lleva al valor de b , es decir, al conocimiento de ese factor común.

Esto siendo previamente dicho, volvamos al problema planteado. En S_5 consideremos una figura $gF_uF_v\vartheta_2^{(u)}$ imagen de un E_2 de Σ_3 , que podemos suponer representado por la (12), y — junto con ella — dos puntos genéricos de la recta g , imágenes de las tangentes p y l del E_2 , los que pueden indicarse con las mismas notaciones. Podemos suponer sin restricciones

que en Σ_3 la recta p siga coincidiendo con el eje x , como en los n.^{os} anteriores. Al variar en Σ_3 la recta r de coordenadas radiales p'_{ik} (con $p'_{23} = 0$), la (11) enseña que las ∞^1 congruencias lineales especiales Γ asociadas al par de tangentes p, l tienen como imágenes en S_5 las ∞^1 cuádricas bidimensionales secciones de la M_4^2 con los $\infty^1 S_3$ según los cuales el S_4 fijo $p_{23} = 0$ (hiperplano p'_4 tangente a la M_4^2 en el punto $p \equiv G_{14}$) está cortado por el haz de hiperplanos individualizado por los dos:

$$p_{13} = 0, \quad 2(a + b l_0) p_{12} + l_0 p_{34} = 0. \quad (14)$$

En la (14) no aparece la coordenada p_{14} , de modo que el haz integrado por aquellos $\infty^1 S_3$ dentro del $S_4 p_{23} = 0$ tiene como eje un plano pasante por G_{14} , al que, por depender de p, l , llamaremos $\sigma_2^{(pl)}$. Más precisamente el plano $\sigma_2^{(pl)}$ resulta tangente a la M_4^2 a lo largo de la recta $G_{14} G_{42} \equiv g$. Vemos así entre tanto que *las ∞^1 congruencias lineales especiales Γ asociadas al par de tangentes p, l son las que, en el S_5 representativo, tienen como imágenes las ∞^1 cuádricas cortadas sobre la V_3^2 cónica representativa de las rectas de Σ_3 apoyadas a p por los S_3 de un haz, cuyo eje es cierto plano $\sigma_2^{(pl)}$ pasante por la recta g representativa del haz $P\pi$ de Σ_3 y contenido en el espacio g'_3 tangente a la M_4^2 a lo largo de g .*

Toda la figura de las ∞^1 congruencias lineales especiales Γ asociadas al par de tangentes p, l resulta por lo tanto substancialmente reducida al plano $\sigma_2^{(pl)}$ de S_5 , que llamaré *conjugado* a dicho par. Y llamaré, en Σ_3 , *red conjugada* al mismo par por la red de complejos lineales que está representada en S_5 por ese plano. Es claro que todos los complejos lineales de la red conjugada contienen las rectas del haz $P\pi$, y que pertenece a la red el haz de complejos lineales especiales cuyas directrices son las rectas del mismo haz.

Lo que queda por ver es cómo la red conjugada al par de tangentes p, l , o — lo que da lo mismo — el plano $\sigma_2^{(pl)}$ de S_5 , pueda definirse de manera autónoma. Con este objeto, fijemos la p , y dejemos variar la l ; de las (14) — las que, en cuanto se les agregue la $p_{23} = 0$ son justamente las ecuaciones del plano considerado — se desprende que el mismo describe un haz proyectivo al haz de rectas descrito por la l , y que:

1º: (haciendo $l_0 = 0$) el plano $\sigma_2(pp')$ tiene ecuaciones $p_{23} = p_{13} = p_{12} = 0$, y por lo tanto es el plano de la cuádrica M_4^2 que representa las rectas de Σ_3 las que pertenecen a la radiación de centro P; esto es, es uno de los dos planos (plano del primer sistema) de la M_4^2 que pasan por la recta g ;

2º: (haciendo $l_0 = -a/b$) el plano $\sigma_2(pp')$ tiene ecuaciones $p_{23} = p_{13} = p_{34} = 0$, y luego es el plano del segundo sistema de la M_4^2 pasante por la recta g (plano representativo de las rectas de Σ_3 que están en el plano π);

3º: (haciendo $l_0 = \infty$) el plano $\sigma_2(pu)$ tiene como ecuaciones las mismas (13) y luego coincide con el plano $\vartheta_2(u)$.

Concluimos así que el plano $\sigma_2(p')$ es el plano pasante por g y situado en g'_3 , que, dentro del haz así definido, considerado como cuarto plano después de los dos planos respectivamente del primero y del segundo sistema de la cuádrica de Klein pasantes por g y del plano $\vartheta_2(u)$, da lugar a una doble razón igual a la $(pp'u)$ (7).

De esta manera resulta completamente resuelto el problema planteado.

Sin detenernos en enunciar el resultado en términos de la geometría de la recta de Σ_3 , observemos más bien que la construcción así obtenida de la red conjugada al par de tangentes p, l permite lograr inmediatamente la congruencia lineal especial F a la cual pertenece una recta r prefijada genéricamente entre las apoyadas a la recta p , como intersección de un complejo lineal de la red llevado genéricamente por la recta r con el complejo lineal especial de directriz p .

Se desprende asimismo de lo dicho que, si se mantiene fija la p y se deja variar la l , el plano $\sigma_2(p'l)$ describe un haz proyectivo al haz descrito por la recta l : la proyectividad está definida por los tres pares de elementos correspondientes integrados por $l \equiv p$ y el plano del primer sistema de M_4^2 pasante por g , $l \equiv p'$ y el plano del segundo sistema, $l \equiv u$ y el plano $\vartheta_2(u)$. Es claro que, por analogía, cuando l coincide con la segunda tangente asintótica v , el plano correspondiente es $\vartheta_2(v)$ (conjugado armónico de $\vartheta_2(u)$ con respecto a los dos planos de M_4^2 que pasan por la g).

(7) La recta p' , como en las páginas anteriores, sigue siendo la tangente al E_2 conjugada de la p .

A lo dicho puede darse un alcance más amplio si se deja variar no sólo la recta l , sino también la p . A cada par p, l corresponde un plano conjugado $\sigma_2^{(pl)}$ perteneciente al haz de eje g en el espacio g'_3 , de manera pues que se originan ∞^2 ternas $pl\sigma_2^{(pl)}$. Para dominar la cuestión, es conveniente adoptar en Σ_3 un sistema cartesiano de referencia en condiciones un poco más generales de las anteriores, manteniendo el origen en P y el plano xy en π , pero sin vincular ulteriormente las posiciones de los ejes x, y . Efectuando un cambio de coordenadas para hacer aplicables a las nuevas hipótesis los resultados ya adquiridos, se encuentra fácilmente que, si

$$\gamma x + \delta y = 0, \quad \lambda x + p y = 0$$

son respectivamente, dentro del plano xy , las ecuaciones de las rectas p y l , mientras que el E_2 está representado por

$$z = a x^2 + 2 b x y + c y^2,$$

el plano $\sigma_2^{(pl)}$ tiene las ecuaciones

$$p_{13} = 0, \quad p_{23} = 0, \quad \sigma p_{12} + p_{34} = 0,$$

donde

$$\sigma = 2 \frac{a\mu\delta - b(\mu\gamma + \delta\lambda) + c\lambda\gamma}{\mu\gamma - \lambda\delta}.$$

Por lo tanto:

Los dos haces de rectas superpuestos descritos por las tangentes p y l del E_2 considerado y el haz de planos, de eje g , descrito dentro del espacio g'_3 por el plano conjugado $\sigma_2^{(pl)}$, se corresponden en una correspondencia trilineal Λ .

Son elementos singulares para esta correspondencia trilineal (elementos de una de las tres figuras de primera categoría vinculadas entre sí, para los cuales la proyectividad por ellos subordinada entre las dos figuras restantes está degenerada) las tangentes asintóticas, ya sea como posiciones de la p o de la l , y los dos planos $\vartheta_2^{(u)}, \vartheta_2^{(v)}$. Si se quiere una individualización geométrica completa de la correspondencia trilineal Λ ,

puede decirse que *ella está definida por las condiciones siguientes:*

a) *al plano del primer sistema de la M_4^2 pasante por g , como posición particular de $\sigma_2(p^l)$, queda subordinada entre las dos otras figuras de primera categoría la identidad;*

b) *al plano del segundo sistema queda subordinada la involución de las tangentes conjugadas;*

c) *al plano $\vartheta_2^{(u)}$ queda subordinada una proyectividad degenerada que tiene $l \equiv u$ como elemento singular.*

En efecto, de lo dicho anteriormente, ya resulta que la correspondencia Λ cumple con las tres condiciones a), b), c). Viceversa, si se imponen la a) y la b) la ecuación de la correspondencia Λ queda determinada a menos de un parámetro arbitrario, el que a su vez se determina al imponer que exista una terna de la correspondencia integrada por una posición genérica de p junto con $l \equiv u$ y $\vartheta_2^{(u)}$.

Para las congruencias lineales especiales asociadas al par de tangentes p, l indico todavía la caracterización siguiente, de carácter métrico. Llamaré torsión ⁽⁸⁾ τ/T_P de una congruencia

lineal especial en un punto P de su directriz p el $\lim_{P' \rightarrow P} \frac{\pi \pi'}{PP'}$, siendo P' un punto de p que tiende a P , y π, π' los planos de los haces de rectas de la congruencia que tienen sus centros en P, P' . Pues bien, si tomamos dos rectas cualesquiera de la congruencia como rectas r, s , y aplicamos la (6) dejando tender R a P , resulta

$$\frac{\tau}{T_P} = \frac{\cotg pl - \cotg pp'}{PC}. \quad (15)$$

El segundo miembro de la (15) depende del E_2 considerado y de sus tangentes p, l : la torsión en P de cada congruencia lineal asociada al par p, l tiene que tener el valor brindado por la (15). Viceversa, las congruencias lineales especiales de

⁽⁸⁾ Este término está usado en una acepción análoga (y se trata substancialmente de la misma cosa) cuando se habla de la *torsión de una generatriz rectilínea* de una superficie reglada en un punto de la misma; véase p. e. L. BIANCHI, *Lezioni di geometria differenziale*, 3ª ed., vol. I, p. 206.

directriz p , las que contienen el haz de rectas $P\pi$ y tienen en P la torsión (15) constituyen un conjunto ∞^1 tal que una recta genérica r apoyada a p está en una y una sola congruencia del conjunto, la cual por lo tanto necesariamente coincide con la congruencia lineal asociada que contiene r . Concluimos así que *las congruencias lineales asociadas a un par de rectas p, l tangentes a un E_2 son, todas y solas, las congruencias lineales especiales de directriz p , las que contienen las rectas del haz $P\pi$ y cuya torsión en P está expresada por la (15).*

Por lo demás, cabe observar, de acuerdo con la *Observación* final del n. 3, que la torsión en P de las congruencias consideradas no difiere de la curvatura en P de las ∞^1 cónicas a las que se acudió en la última parte del n. 1; lo que lleva substancialmente una a otra las fórmulas (9) y (15).

5. Para terminar, agregamos las observaciones siguientes. La figura integrada por un elemento superficial de segundo orden E_2 , una recta p tangente al mismo, y dos rectas r, s incidentes a la p depende de $8 + 1 + 3 + 3 = 15$ parámetros, lo mismo como una homografía general del espacio; de modo que a priori cabría conjeturarse que no tenga invariantes proyectivos. Sin embargo tal conjetura resultaría equivocada, debido a que los datos individualizan la tangente l subordinada a la terna p, r, s , y la doble razón de las tangentes asintóticas u, v del E_2 , la p y la l es evidentemente un invariante proyectivo de la figura considerada (el cual contendrá una irracionalidad procedente de la posibilidad de considerar las dos tangentes asintóticas en uno u otro orden, pero podrá reemplazarse por una función del mismo en la que desaparezca dicha irracionalidad). Cabe por lo tanto preguntarse si existen más invariantes proyectivos independientes. La contestación es negativa.

Considero con tal objeto otra figura análoga integrada por un E'_2 junto con las rectas p', r', s' . Introduzco dos sistemas de coordenadas proyectivas homogéneas, respectivamente x_i y x'_i ($i = 1, 2, 3, 4$), colocando los vértices del primer tetraedro fundamental de la manera siguiente: A_4 en P , A_1 en el punto pr , A_3 genéricamente sobre r , y A_2 genéricamente sobre π ; y análogamente para el segundo tetraedro. Sean entonces

$$x_1 = g x_3 + k x_4, \quad x_2 = h x_3$$

las ecuaciones de s , mientras que el E_2 está representado por

$$\frac{x_3}{x_4} = a \frac{x_1^2}{x_4^2} + 2b \frac{x_1 x_2}{x_4^2} + c \frac{x_2^2}{x_4^2}.$$

Análogamente (poniendo acentos a los coeficientes) para s' y el E'_2 . Por de pronto, una homografía que lleve una a otra las dos configuraciones consideradas se representará con una sustitución lineal homogénea del tipo

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = g_{11} x_1 + g_{12} x_2 + g_{13} x_3 : g_{22} x_2 + g_{33} x_3 + g_{42} x_2 + g_{44} x_4. \quad (16)$$

Además es necesario y suficiente que las siete constantes homogéneas g_{ik} que figuran en (16) cumplan con las seis condiciones:

$$\left. \begin{aligned} a g_{33} g_{44} &= a' g_{11}^2, \\ b g_{33} g_{44} &= a' g_{11} g_{12} + b' g_{11} g_{22}, \\ c g_{33} g_{44} &= a' g_{12}^2 + 2 b' g_{12} g_{22} + c' g_{22}^2, \\ h g_{22} &= h' g_{33}, \\ g_{22} (g_{11} g - g_{33} g' + g_{13}) + g_{33} h' (g_{12} - g_{42} k') &= 0, \\ g_{11} k &= g_{44} k'. \end{aligned} \right\} (17)$$

Las g_{ii} tienen que ser distintas de cero para que no se anule el determinante de la sustitución, de modo que podemos suponer $g_{22} = 1$. Entonces el sistema parcial integrado por las dos primeras, la cuarta y la sexta (17) puede escribirse en la forma

$$g_{11} = \frac{ahk}{a'h'k'}, \quad g_{33} = \frac{h}{h'}, \quad g_{44} = \frac{ahk^2}{a'h'k'^2}, \quad g_{12} = \frac{bhk}{a'h'k'} - \frac{b'}{a'}.$$

Substituyendo estos valores en la tercera (que no contiene otras g_{ik}) se logra

$$(b^2 - ac) h^2 k^2 = (b'^2 - a'c') h'^2 k'^2. \quad (18)$$

Queda únicamente por tener en cuenta la quinta ecuación (17), de la cual, reemplazando las g_{ik} ya conocidas, puede des-

pejarse g_{13} en función de g_{42} que queda arbitraria. Por lo tanto la (18) es una ecuación de condición, y antes bien la única para la equivalencia proyectiva de las dos configuraciones consideradas: si se cumple (18), existe no sólo una, sino todo un sistema ∞^1 de proyectividades que llevan dichas configuraciones una a otra.

Por otra parte, llamando β a la doble razón $(uvpl)^*$ y poniendo (para evitar la mencionada irracionalidad):

$$J = \left(\frac{\beta - 1}{\beta + 1} \right)^2, \quad (19)$$

se tiene

$$J = 4(b^2 - ac)h^2k^2, \quad (20)$$

de forma que la (18) se escribe

$$J = J' \quad (18')$$

Luego la configuración integrada por un E_2 junto con la recta p tangente al mismo y dos rectas r, s incidentes a la p tiene esencialmente un único invariante proyectivo, y como tal puede adoptarse J .

En particular, de lo dicho se desprende que la figura integrada por un E_2 junto con las rectas p, r, s situadas como en el último enunciado admite un grupo ∞^1 de homografías en sí misma. Si esa figura sigue representándose analíticamente como arriba, las homografías están dadas por

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 + \gamma h k x_3 : x_2 : x_3 : \gamma x_2 + x_4,$$

siendo γ una constante arbitraria. El grupo es el de las homografías biaxiales parabólicas de eje p cuya congruencia lineal especial de rectas unidas es aquella que contiene el haz $P\pi$ y las rectas r, s .

Al invariante J puede darse la expresión métrica siguiente:

$$J = -K \frac{\overline{PR}^2 \cdot \overline{PS}^2}{RS^2} (\operatorname{tg} \psi - \operatorname{tg} \varphi)^2, \quad (21)$$

donde R, S, φ, ψ tienen el significado ya aclarado en el n. 1, y K es la curvatura total del E_2 considerado.

Como consecuencia de la (21) observamos las siguientes, en las cuales hay que tener presente el significado de J como función de la doble razón β de acuerdo con la (19).

1) La curvatura total K de una superficie Φ en un punto P tiene el siguiente significado geométrico: sean r, s dos rectas cualesquiera que cortan el plano tangente en P en dos puntos R, S simétricos con respecto a P y están contenidas en dos planos por la recta RS que forman respectivamente ángulos de $+\pi/4$ y $-\pi/4$ con el plano normal pasante por la misma recta: entonces

$$K = -J : \overline{PR}^2.$$

2) Si Φ, Φ_1 son dos superficies tangentes en un punto P , y se consideran dos rectas cualesquiera r, s que cortan el plano tangente a las dos en dos puntos alineados sobre P , se tiene

$$K : K_1 = J : J_1,$$

siendo K, K_1 las curvaturas totales de Φ, Φ_1 en P , y J, J_1 los invariantes proyectivos a los cuales dan lugar los elementos de segundo orden de Φ, Φ_1 en P junto con las rectas r, s .

Esta observación quizás tenga algún interés porque brinda un significado geométrico proyectivo del invariante de Mehmke (razón de las curvaturas totales) de dos superficies tangentes en un punto. A diferencia de lo que ocurre para el invariante análogo de dos curvas, interpretaciones proyectivas de dicho invariante (prescindiendo de casos particulares) son bastante recientes: dos de ellas, distintas de la actual, han sido dadas por mí y P. Buzano (9).

Tucumán, diciembre de 1942.

A. Terracini

(9) A. TERRACINI, *Densità di una corrispondenza di tipo dualistico ed estensione dell'invariante di Mehmke-Segre*, Atti della R. Acc. delle Scienze di Torino, vol. 71, 1935-36; P. BUZANO, *Interpretazione proiettiva dell'invariante di Mehmke*, Boll. dell'Unione matematica italiana, 1936.