CUESTIONES ELEMENTALES RESUELTAS

15. - *¿En qué dirección debe atravesarse una calle por la que avanza un vehículo de modo que el riesgo de ser alcanzado al cruzar delante del mismo sea mínimo?*

Llamemos x al segmento $\overline{MN}$, que mide la desviación, que es necesario efectuar. Sea V la velocidad del vehículo, que suponemos situado en P, y v la velocidad del transeúnte, cuyo punto de partida es O. Por comodidad, tomaremos la distancia del punto O a la trayectoria del vehículo igual a 1. En el tiempo t, el transeúnte recorrerá el espacio $OM = vt$ y como $\overline{OM} = \sqrt{1 + x^2}$ es:

$$t = \frac{\sqrt{1+x^2}}{v}.$$

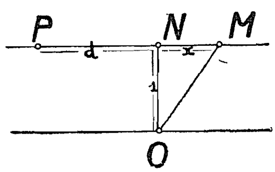

Fig. 1

En el mismo tiempo t, el móvil recorre el espacio $e = Vt = \frac{V}{v}\sqrt{1 + x^2}$ y haciendo $\frac{V}{v} = k$ resulta:

$$e = k\sqrt{1 + x^2}.$$

La distancia δ, que separa al vehículo del transeúnte es pues $\delta = \overline{PM} - e$

$$\delta = d + x - k\sqrt{1 + x^2}, \qquad (1)$$

y se trata de calcular δ como máximo.

Derivando:

$$\delta' = 1 - \frac{kx}{\sqrt{1+x^2}} = 0$$

$$k^2 x^2 = 1 + x^2, \qquad x^2 (k^2 - 1) = 1, \qquad x = \frac{\pm 1}{\sqrt{k^2-1}}.$$

La solución negativa se descarta, pues (1) ha sido escrito suponiendo $x > 0$, luego:

$$x = \frac{1}{\sqrt{k^2-1}} \qquad (2)$$

Este valor de x, corresponde en efecto a un máximo de δ, pues la derivada, en un entorno de $\frac{1}{\sqrt{k^2-1}}$ pasa de positiva a negativa.

Discusión. Si consideramos ejes cartesianos, la δ de (1) está dada por la diferencia de ordenadas de la recta e hipérbolas siguientes:

$$\begin{cases} y = d + x \\ \dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{k^2} = -1 \end{cases}$$

La distancia δ, se anula en los puntos de intersección de las dos curvas, para los cuales corresponde el valor de x que calculamos resolviendo la ecuación que resulta de sustituir la y de la primera ecuación en la segunda:

$$k^2 x^2 - d^2 - x^2 - 2dx + k^2 = 0$$

$$(k^2 - 1)\, x^2 - 2dx + (k^2 - d^2) = 0$$

luego

$$x = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - (k^2-1)\,(k^2-d^2)}}{(k^2-1)}.$$

Las raíces de esta ecuación dependen del discriminante:

$$\Delta = d^2 - (k^2 - 1)\,(k^2 - d^2) = k^2\,(d^2 + 1 - k^2);$$

luego:

1º) Si $k^2 < d^2 + 1$, existen dos raíces reales y distintas. x_1 y x_2 tales que cuando x varía en el intervalo abierto $(x_1\, x_2)$ el transeúnte pasa delante del móvil, a más o menos distancia, sin ser alcanzado, siendo menor el riesgo cuando $x = \frac{\sqrt{k^2-1}}{1}$.

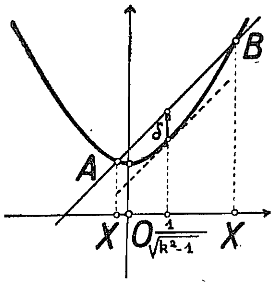

Fig. 2.

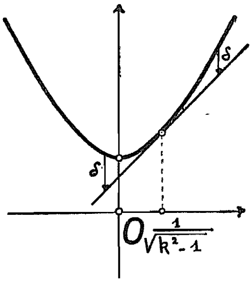

Fig. 3.

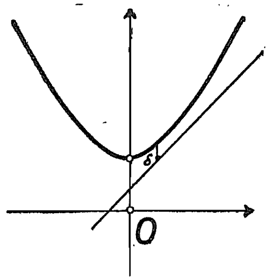

Fig. 4.

La gráfica se presenta entonces, como en la fig. 2. Los puntos A y B marcan el choque inevitable y corresponden a las dos direcciones posibles del transeúnte.

A la izquierda de A, y a la derecha de B, la δ resulta negativa, es decir, el vehículo ya ha pasado cuando el transeúnte alcanza la acera opuesta.

2º) Si $k^2 = d^2 + 1$, las dos raíces son reales e iguales, luego la recta es tangente a la hipérbola; la gráfica se presenta como en la fig. 3. El valor de x que resulta en este caso, que se obtiene sustituyendo en (2) el valor de k^2, es

$$x = \frac{1}{d}$$

y esta solución corresponde al choque inevitable. Cualquier otro valor de x hace a δ negativa, luego el móvil pasa antes que el transeúnte.

3º) Si $k^2 > 1 + d^2$, las raíces de la ecuación son imaginarias, luego la recta no corta para ningún valor de x, a la hipérbola.

La δ es siempre negativa, luego el vehículo pasa antes que el transeúnte.

La gráfica se presenta como en la fig. 4.

Juan José Rodríguez
(Alumno del Instituto del Profesorado de Buenos Aires)

17. - *Calcular el determinante de Vandermonde, sustituyendo las potencias por factoriales de diferencia d, con igual base y grado que los de las potencias.*

Se trata de calcular el siguiente determinante de orden n:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots\dots & 1 \\ a_1^{1/d} & a_2^{1/d} & a_3^{1/d} & \dots\dots & a_n^{1/d} \\ a_1^{2/d} & a_2^{2/d} & a_3^{2/d} & \dots\dots & a_n^{2/d} \\ a_1^{3/d} & a_2^{3/d} & a_3^{3/d} & \dots\dots & a_n^{3/d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1/d} & a_2^{n-1/d} & a_3^{n-1/d} & \dots\dots & a_n^{n-1/d} \end{vmatrix}$$

con la notación

$$a^{k/d} = a\,(a+d)\,(a+2d)\dots(a+(k-1)\,d).$$

Si a cada fila h, le restamos el producto de la anterior multiplicada por $a_1+(h-2)\,d$, el determinante dado se reduce a:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & a_3-a_1 & & a_n-a_1 \\ 0 & a_2^{2/d}-a_2^{1/d}(a_1+d) & a_3^{2/d}-a_3^{1/d}(a_1+d) & & a_n^{2/d}-a_n^{1/d}(a_1+d) \\ 0 & a_2^{3/d}-a_2^{2/d}(a_1+2d) & a_3^{3/d}-a_3^{2/d}(a_1+2d) & & a_n^{3/d}-a_n^{2/d}(a_1+2d) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_2^{n-1/d}-a_2^{n-2/d}[a_1+(n-2)d] & a_3^{n-1/d}-a_3^{n-2/d}[a_1+(n-2)d] & \dots & a_n^{n-1/d}-a_n^{n-2/d}[a_1+(n-2)d] \end{vmatrix}$$

Sacando factores comunes en las diferencias, obtenemos una expresión más sencilla (luego de desarrollar por la primera columna):

$$\begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_3-a_1 & \dots\dots & a_n-a_1 \\ a_2^{1/d}(a_2-a_1) & a_3^{1/d}(a_3-a_1) & \dots\dots & a_n^{1/d}(a_n-a_1) \\ a_2^{2/d}(a_2-a_1) & a_3^{2/d}(a_3-a_1) & \dots\dots & a_n^{2/d}(a_n-a_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-2/d}(a_2-a_1) & a_3^{n-2/d}(a_3-a_1) & \dots\dots & a_n^{n-2/d}(a_n-a_1). \end{vmatrix}$$

o sea factoreando las diferencias:

$$(a_2-a_1)(a_3-a_1)\dots(a_n-a_1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots\dots\dots & 1 \\ a_2^{1/d} & a_3^{1/d} & \dots\dots\dots & a_n^{1/d} \\ a_2^{2/d} & a_3^{2/d} & \dots\dots\dots & a_n^{2/d} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2^{n-2/d} & a_3^{n-2/d} & \dots\dots\dots & a_n^{n-2/d} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Con esto, para calcular el determinante dado, basta calcular el (1), de orden $n-1$ y de su misma naturaleza; repitiendo sucesivamente las consideraciones hechas hasta aquí, llegaremos entonces a reducir el orden del determinante, hasta obtenerlo de segundo; en ese caso, el resultado será:

$$\begin{array}{r} (a_2-a_1)(a_3-a_1)\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(a_n-a_1)\,. \\ (a_3-a_2)\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(a_n-a_2)\,. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (a_{n-2}-a_{n-3})\cdot(a_{n-1}-a_{n-3})(a_n-a_{n-3})\,. \\ (a_{n-1}-a_{n-2})(a_n-a_{n-2})\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_{n-1}^{1/d} & a_n^{1/d} \end{vmatrix}\dots \end{array}$$

el valor del determinante es:

$$\begin{array}{l} (a_2-a_1)(a_3-a_1)\dots(a_n-a_1)\cdot(a_3-a_2)(a_n-a_2)\;\dots\dots \\ \qquad\dots\;(a_{n-1}-a_{n-2}(\,(a_n-a_{n-2})\cdot(a_n-a_{n-1})\,. \end{array}$$

resultado que, como vemos, coincide con el desarrollo del determinante de Vandermonde.

Andrés Valeiras

(Instituto Nac. del Profesorado de B. Aires (2º curso))