SUCESIONES DE CICLOS SOBRE UNA ESFERA[1]

por W. MÄCHLER

Consideremos sobre la esfera unitaria con el centro O una sucesión de ciclos c_k $(k=1, 2, \ldots, n)$ con los centros O_k y los diámetros d_k de modo que

1º) c_k toque c_{k+1} $\quad (k=1, 2, \ldots, n-1)$

2º) los ciclos c_k y los vectores $\overrightarrow{OO_k}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ formen alternadamente roscas a la derecha resp. izquierda. Cuando se asocia a los ciclos c_k roscas ya sea sólo a la derecha o a la izquierda mediante los vectores

$$\overrightarrow{OE_k} = \frac{(-1)^k \lambda}{d_k} \cdot \frac{\overrightarrow{OO_k}}{|\overrightarrow{OO_k}|} \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

cuyos valores son inversamente proporcionales a los diámetros d_k y donde λ es un factor de proporcionalidad independiente de k, las rectas $E_k E_{k+1}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$ son tangentes a una misma esfera con el centro O.

Demostración: Sin restricción podemos suponer $\lambda=1$. Sea A_k el punto de contacto de los ciclos c_k y c_{k+1} y pongamos $\mathfrak{a}'_k = 2\,\overrightarrow{A_k O_k}$, $\mathfrak{a}'_{k+1} = 2\,\overrightarrow{A_k O_{k+1}}$. Si $\mathfrak{u}$ es un vector unitario proporcional al vector $\mathfrak{a}'_k \wedge \mathfrak{a}'_{k+1}$[2] podemos considerar el triedro formado por los vectores

$$\mathfrak{a}_k = \frac{\mathfrak{a}'_k}{\operatorname{sen}\varphi}, \mathfrak{a}_{k+1} = \frac{\mathfrak{a}'_{k+1}}{\operatorname{sen}\varphi}, \ \mathfrak{u}$$

y su triedro recíproco con los vectores $\mathfrak{a}^*_k$, $\mathfrak{a}^*_{k+1}$, $\mathfrak{u}^*$, donde se tiene

$$\mathfrak{a}^*_k = \frac{\mathfrak{a}_{k+1} \wedge \mathfrak{u}}{V}, \ \mathfrak{a}^*_{k+1} = \frac{\mathfrak{u} \wedge \mathfrak{a}_k}{V}, \ \mathfrak{u}^* = \frac{\mathfrak{a}_k \wedge \mathfrak{a}_{k+1}}{V}$$

(1) Bajo ''ciclo'' entendemos una circunferencia sobre la cual se ha elegido un sentido de recorrido. Cuestiones análogas a las de esta nota para el caso del plano han sido tratadas en W. MACHLER ''*Sobre una propiedad de las secciones cónicas verdaderas con centro*'', Revista de la Unión Matemática Argentina, vol. VIII, p. 145, 1942.

(2) Con $\wedge$ indicamos producto vectorial; con $\times$ producto escalar.

con $V = \mathfrak{u} \times (\mathfrak{a}_k \wedge \mathfrak{a}_{k+1})$ y φ como ángulo comprendido entre los vectores $\mathfrak{a}'_k$ y $\mathfrak{a}'_{k+1}$ exigiendo $0 < \varphi < \pi$. El vector $\mathfrak{u}^*$ es un vector unitario proporcional a $\mathfrak{a}^*_k \wedge \mathfrak{a}^*_{k+1}$. Podemos poner

$$\overrightarrow{OE_k} = \delta\,(-1)^k\,\mathfrak{a}^*_k$$

$$\overrightarrow{OE_{k+1}} = \delta\,(-1)^{k+1}\,\mathfrak{a}_{k+1}$$

en donde $|\delta| = 1$. Poniendo $V^* = \mathfrak{u}^* \times (\mathfrak{a}^*_k \wedge \mathfrak{a}^*_{k+1})$, tendremos, a causa de la reciprocidad de los triedros considerados la relación

$$VV^* = 1,$$

y los valores absolutos $\mathfrak{a}^*_k$, $\mathfrak{a}^*_{k+1}$, $\mathfrak{u}^* = 1$, de los vectores $\mathfrak{a}^*_k$, $\mathfrak{a}^*_{k+1}$, $\mathfrak{u}^*$ son los valores recíprocos de las alturas $a_k \operatorname{sen}\varphi = a'_k = d_k$, $a_{k+1} \operatorname{sen}\varphi = a'_{k+1} = d_{k+1}$, $u = 1$ paralelas a ellos del paralepípedo formado por los vectores $\mathfrak{a}_k$, $\mathfrak{a}_{k+1}$, $\mathfrak{u}$.

El paralelepípedo formado por los vectores $\overrightarrow{OE_k}$, $\overrightarrow{OE_{k+1}}$, $\mathfrak{u}^*$ tiene el volumen absoluto

$$|V^*| = \frac{1}{a_k\,a_{k+1} \operatorname{sen}\varphi} = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{a'_k\,a'_{k+1}}.$$

$\overrightarrow{E_k E_{k+1}}$ es un vector diagonal del paralelógramo formado por los vectores $\overrightarrow{OE_k}$, $\overrightarrow{OE_{k+1}}$.

Se obtiene

$$|\overrightarrow{OE_k} - \overrightarrow{OE_{k+1}}| = |\mathfrak{a}^*_k + \mathfrak{a}^*_{k+1}| = \frac{1}{|V|}|\mathfrak{u} \wedge (\mathfrak{a}_k - \mathfrak{a}_{k+1})| = \frac{|\mathfrak{a}'_k - \mathfrak{a}'_{k+1}|}{a'_k a'_{k+1}}.$$

Como el punto A_k y los puntos finales de los vectores $\mathfrak{a}'_k$, $\mathfrak{a}'_{k+1}$ con el punto inicial A_k son puntos de una circunferencia mayor de la esfera unitaria con el centro O se tendrá

$$|\mathfrak{a}'_k - \mathfrak{a}'_{k+1}| = 2 \operatorname{sen}\varphi.$$

Obtenemos pues

$$1/2\ |\overrightarrow{OE_k} - \overrightarrow{OE_{k+1}}| = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{a'_k a'_{k+1}} = |V^*|.$$

Esto demuestra que el centro O tiene la distancia $\frac{1}{2}$ a la recta $E_k\,E_{k+1}$ y es pues independiente de k.

17 de Julio de 1943. Valparaíso, (Chile).

Universidad Técnica.