UNA CUESTION DE MAXIMO

por Sergio Sispánov

En el vol. IX (pág. 75) fué publicado el tema:

Un fabricante de envases nos ha propuesto el tema siguiente: cortar una chapa rectangular en dos rectángulos, uno para sacar de él el fondo del envase y el otro para la superficie lateral del cilindro, de forma tal que la capacidad del mismo sea máxima.

Resolución. — Enunciemos el pedido del fabricante en la forma más clara y precisa: un rectángulo ,cuyos lados son a y Θa $(0 < \Theta \leq 1)$, se corta paralelamente a uno de ellos. La parte rectangular ACB (fig. 1) se emplea para hacer la superficie

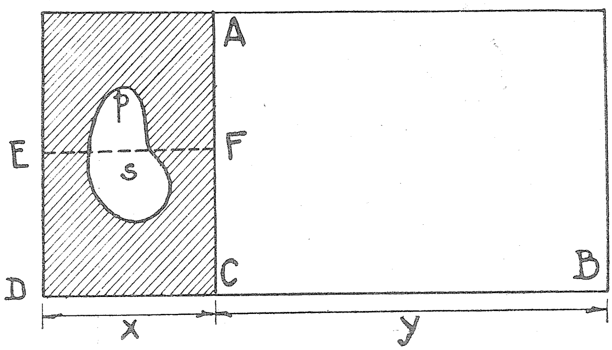

Fig. 1

lateral de un cilindro. De la otra parte ACD se corta la base s para el mismo cilindro, de perímetro p. Encontrar la forma de la base s y los segmentos x e y de tal manera que el volumen del cilindro sea máximo. ¿Cuál será el valor más ventajoso de la razón Θ de los lados, si se da únicamente el área $\Theta a^2 = c^2$ del rectángulo que se corta, sin indicar la longitud de sus lados?

Pueden hacerse dos hipótesis. Si CA se toma por directriz del cilindro y CB por la generatriz del mismo, el valor más grande del perímetro, será $p=CA$. Por el contrario, el perímetro más largo será $p=CB$, cuando CB sirve por directriz y CA desempeña el papel de la generatriz.

Por el problema sobre los *isoperímetros* se sabe que, para el valor dado del perímetro p, la figura comprendida entre 2 paralelas y que posee el área máxima se compone de un rectángulo y dos semicírculos iguales (fig. 3). En el caso de 2 pares de paralelas, perpendiculares entre sí, la mayor área corresponde a la figura que está compuesta de una cruz rectangular y cuatro cuadrantes iguales (fig. 4).

Hipótesis I. Cortamos el rectángulo dado paralelamente a su lado mayor (fig. 2). En tal ocasión la altura del cilindro es y y $p=a$.

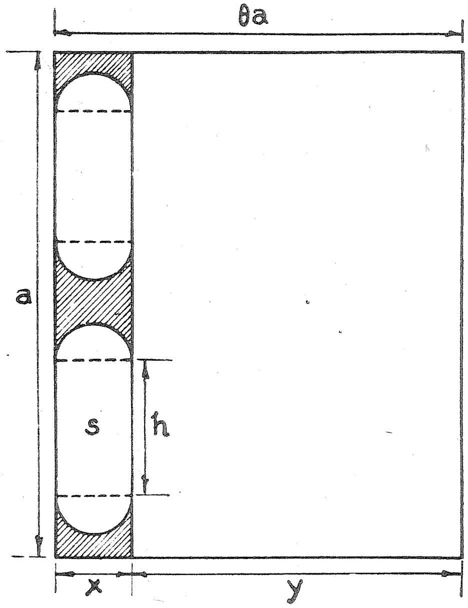

Fig. 2

Sin dificultad encontramos

$$y=a\left(\Theta-\frac{x}{a}\right)\ ,\quad h=\frac{a}{2}\left(1-\pi\frac{x}{a}\right),$$

$$s = \frac{\pi}{4} a^2 \cdot \frac{x}{a} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{x}{a} \right).$$

Para el volumen del cilindro se tendrá

$$v = \frac{\pi}{4} a^3 \cdot \frac{x}{a} \left(\frac{2}{\pi} - \frac{x}{a} \right) \left(\Theta - \frac{x}{a} \right).$$

Igualando a cero la primera derivada v' y teniendo en cuenta el signo de la segunda, vemos que la menor raíz de la ecuación

$$3 \left(\frac{x}{a} \right)^2 - 2 \left(\frac{2}{\pi} + \Theta \right) \cdot \frac{x}{a} + \frac{2}{\pi} \Theta = 0$$

conduce al valor máximo v_0 del volumen. De manera que

$$\frac{x_0}{a} = \frac{1}{3} \left(\Theta + \frac{2}{\pi} - \sqrt{\Delta} \right) \quad , \quad \frac{y_0}{a} = \frac{1}{3} \left(2\Theta - \frac{2}{\pi} + \sqrt{\Delta} \right),$$

$$\frac{h_0}{a} = \frac{\pi}{6} \left(\frac{1}{\pi} - \Theta + \sqrt{\Delta} \right) \tag{1}$$

y

$$v_0 = \frac{\pi}{18} \left[\frac{\Theta}{\pi} \left(\Theta + \frac{2}{\pi} \right) - \Delta \frac{x_0}{a} \right] \cdot a^3 = \frac{\Theta}{18} \left(\Theta + \frac{2}{\pi} - \frac{2\Delta}{\Theta + \frac{2}{\pi} + \sqrt{\Delta}} \right) \cdot a^3, \tag{2}$$

siendo

$$\Delta = \Theta^2 - \frac{2}{\pi} \Theta + \left(\frac{2}{\pi} \right)^2.$$

Para $\Theta = 1$ las fórmulas obtenidas dan los siguientes valores numéricos aproximados

$$\frac{x_0}{a} = 0{,}2533\ldots, \quad \frac{y_0}{a} = 0{,}7467\ldots, \quad \frac{y_0}{x_0} = 2{,}9479\ldots,$$

$$\frac{h_0}{a} = 0{,}1021\ldots, \quad v_0 = 0{,}05694 \cdot a^3.$$

Se puede comprobar que para $0<\Theta\leqq 1$ se verifican las desigualdades

$$1<\frac{y_0}{x_0}\leqq 2{,}9479\ldots,\qquad x_0+h_0<\frac{a}{2}.$$

La última de ellas nos indica que del rectángulo dado pueden cortarse no solamente la superficie lateral y el fondo del cilindro, sino también la tapa, como lo está señalado en la fig. 2.

Calculamos por las fórmulas (1) y (2) valores numéricos correspondientes a $\Theta=0{,}6778\ldots$

$$\frac{x_0}{a}=0{,}2177\ldots,\ \frac{y_0}{a}=0{,}4591\ldots,\ \frac{y_0}{x_0}=2{,}1082\ldots,$$
$$\frac{h_0}{a}=0{,}1564\ldots;\quad v_0=0{,}03296\,.\,a^3.$$

De este caso especial se tratará más detenidamente en adelante.

En conclusión, hagamos constar que, si el rectángulo dado se corta paralelamente al lado menor, rigen las relaciones que se deducen de las anteriores permutando a con Θa. El valor máximo para el volumen, obtenido en esta ocasión, es menor que el valor máximo v_0 determinado por la fórmula (2).

Hipótesis II. Cortamos el rectángulo paralelamente a su lado menor Θa, tomándolo por altura del cilindro y haciendo $p=y$ perímetro de la base (fig. 3).

Caso 1º. $\dfrac{3}{2(\pi+2)}=0{,}2917\ldots\leqq\Theta\leqq 1.$

Se establecen fácilmente las siguientes relaciones:

$$y=a\left(1-\frac{x}{a}\right),\quad h=\frac{a}{2}\left[1-(\pi+1)\frac{x}{a}\right],\quad s=\frac{a^2}{2}.\frac{x}{a}\left(1-\frac{\pi+2}{2}.\frac{x}{a}\right)$$

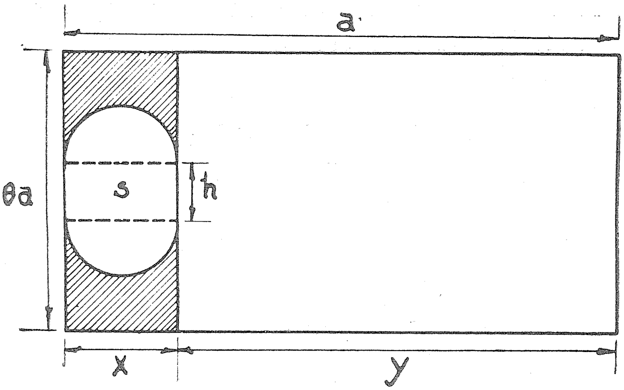

Fig. 3

Como la altura Θa es connstante, el problema se reduce a la determinación del máximo s_0 del área s, lo que nos da

$$\frac{x_0}{a}=\frac{1}{\pi+2}=0{,}1945\ldots,\quad \frac{y_0}{a}=\frac{\pi+1}{\pi+2}=0{,}8055\ldots,$$

$$\frac{y_0}{x_0}=\pi+1=4{,}1416\ldots, \tag{3}$$

$$\frac{h_0}{a}=\frac{1}{2(\pi+2)}=0{,}09725\ldots;\quad s_0=\frac{a^2}{4(\pi+2)}=0{,}04862\,.\,a^3,$$

$$v_0=\frac{\Theta a^3}{4(\pi+2)}=0{,}04862\,.\,\Theta a^3. \tag{4}$$

Comparando el valor máximo anteriormente hallado por la fórmula (2) con el recientemente obtenido por la fórmula (4) llegamos a la ecuación

$$\Theta+\frac{2}{\pi}-\frac{2\Delta}{\Theta+\frac{2}{\pi}+\sqrt{\Delta}}=\frac{9}{2(\pi+2)}=0{,}8752\ldots$$

cuya raíz es $\Theta=0{,}6778\ldots$ y cuyo primer miembro es función creciente de Θ. Por consiguiente, es más ventajoso cortar en la forma correspondiente a la hipótesis I, si

$$0{,}6778\ldots\leq\Theta\leq 1.$$

Es evidente que en el caso considerado se podría cortar, como antes, el fondo y la tapa, cuando se cumple con la condición

$$x_0+h_0=\frac{3a}{2(\pi+2)}\leqq\frac{1}{2}\Theta a,$$

de donde

$$\Theta\geqq\frac{3}{\pi+2}\,.$$

Para el caso de ser

$$\Theta=\frac{3}{\pi+2}=0{,}5835\ldots$$

la fórmula (4) nos da

$$v_0=\frac{3a^3}{4(\pi+2)^2}=0{,}02837\,.\,a^3. \tag{5}$$

En el caso límite

$$\Theta=\frac{3}{2(\pi+2)}=0{,}2917\ldots$$

la misma fórmula suministra el valor

$$v_0=\frac{3a^3}{8(\pi+2)^2}=0{,}01419\,.\,a^3. \tag{6}$$

Hipótesis II. Caso 2º. $0<\Theta\leqq\dfrac{3}{2(\pi+2)}=0{,}2917\ldots$

Tomando el radio r (fig. 4) por variable independiente formamos las igualdades

$$\begin{cases} x=\dfrac{a}{3}\left[(1-2\Theta)+2(4-\pi)\cdot\dfrac{r}{a}\right], \\ y=\dfrac{2a}{3}\left[(1+\Theta)-(4-\pi)\cdot\dfrac{r}{a}\right], \end{cases} \qquad \begin{cases} h=a\left(\Theta-2\cdot\dfrac{r}{a}\right), \\ k=\dfrac{3}{a}\left[(1-2\Theta)-2(\pi-1)\cdot\dfrac{r}{a}\right] \end{cases}$$

y

$$s=a^2\left[\frac{1}{3}\,\Theta\,(1-2\Theta)+\frac{2}{3}\,\Theta\,(4-\pi)\cdot\frac{r}{a}-(4-\pi)\cdot\frac{r^2}{a^2}\right], \qquad v=\Theta as.$$

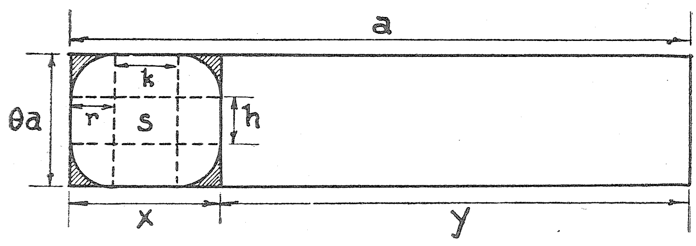

Fig. 4

Igualando a cero la derivada s' encontramos sucesivamente

$$r_0=\frac{1}{3}\cdot\Theta a, \qquad h_0=\frac{1}{3}\cdot\Theta a, \qquad k_0=\frac{1}{3}\left[1-\frac{2}{3}(\pi+2)\,\Theta\right]\cdot a;$$

(7)

$$\frac{x_0}{a}=\frac{1}{3}\left[1-\frac{2}{3}\,(\pi-1)\,\Theta\right], \frac{y_0}{a}=\frac{2}{3}\left[1+\frac{1}{3}(\pi-1)\,\Theta\right], \qquad 2<\frac{y_0}{x_0}\leqq\pi+1;$$

(8)

$$s_0=\frac{\Theta}{3}\left[1-\frac{1}{3}\,(\pi+2)\,\Theta\right]\cdot a^2, \qquad v_0=\frac{\Theta^2}{3}\left[1-\frac{1}{3}\,(\pi+2)\,\Theta\right]\cdot a^3.$$

Las relaciones (8) suministran valores máximos para s y v en las condiciones consideradas.

En el caso particular

$$\Theta=\frac{1}{\pi+2}=0{,}1945\ldots,$$

que necesitaremos en adelante, por las fórmulas (7) y (8) calculamos

$$\frac{r_0}{a}=\frac{1}{3(\pi+2)}=0{,}06483\ldots,\ \frac{h_0}{a}=\frac{1}{3(\pi+2)}=0{,}06483\ldots,\ \frac{k_0}{a}=\frac{1}{9};$$

$$\frac{x_0}{a}=\frac{\pi+8}{9(\pi+2)}=0{,}2408\ldots,\ \frac{y_0}{a}=\frac{2(4\pi+5)}{9(\pi+2)}=0{,}7592\ldots,\quad (9)$$

$$\frac{y_0}{x_0}=\frac{2(4\pi+5)}{\pi+8}=3{,}1533\ldots;$$

$$s_0=\frac{2a^2}{9(\pi+2)}=0{,}04322\,.\,a^2,\quad v_0=\frac{2a^3}{9(\pi+2)^2}=0{,}008406\,.\,a^3.\quad (10)$$

Para el caso límite

$$\Theta=\frac{3}{2(\pi+2)}$$

las mismas fórmulas conducen a los resultados (3) y (6).

El método de cortar indicado en la figura 3 no es aplicable en el 2º. caso de la hipótesis II en vista de que la suma x_0+h_0 resultaría mayor que Θa. Tampoco puede realizarse el corte de la figura 4, si cabe el 1er. caso de la hipótesis II, ya que k_0 sería negativa.

La comparación de los valores máximos v_0 calculados en el caso 2º de la hipótesis II por las relaciones (2) y (8) nos indica que esta hipótesis es más ventajosa que la I.

Resumiendo los resultados obtenidos podemos formar el siguiente esquema:

Caso A: $0<\Theta\leqq 0{,}2917\ldots$ Fórmulas (7) y (8). Fig. 4.

Caso B: $0{,}2917\ldots\leqq\Theta\leqq 0{,}6778\ldots$ Fórm. (3) y (4). Fig. 3

Caso C: $0{,}6778\ldots\leqq\Theta\leqq 1$. Fórmulas (1) y (2). Fig. 2.

Estudiemos ahora la dependencia funcional del volumen máximo v_0 de la razón Θ del lado menor al mayor con el objeto de hallar el valor más ventajoso de Θ, suponiendo que es constante el área $\Theta a^2=c^2$ del rectángulo que se corta.

Haciendo

$$a = \frac{c}{\sqrt{\Theta}} \tag{11}$$

en las expresiones (8), (4), (2), encontramos, respectivamente:

Caso A. $v_0 = \frac{c^3}{3} \cdot \sqrt{\Theta}\left[1 - \frac{1}{3}(\pi+2)\Theta\right].$

Caso B. $v_0 = \frac{c^3}{4(\pi+2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\Theta}} \cdot$

Caso C. $v_0 = \frac{c^3}{18} \cdot \frac{1}{\sqrt{\Theta}}\left(\Theta + \frac{\pi}{2} - \frac{2\Delta}{\Theta + \frac{2}{\pi} + \sqrt{\Delta}}\right).$

De conformidad con estas igualdades se forma sin dificultad la siguiente tabla para la función v_0, correspondiente a la variación del argumento Θ de 0 a 1:

$\Theta = 0,$	$v_0 = 0$
$0 < \Theta < \frac{1}{\pi+2},$	v_0 crece
$\underline{\Theta_1} = \frac{1}{\pi+2} = 0{,}1945\ldots,$	$v_0 = máx = \frac{2c^3}{9\sqrt{\pi+2}} = 0{,}09800 \cdot c^3$
$\frac{1}{\pi+2} < \Theta < \frac{3}{2(\pi+2)},$	v_0 decrece
$\Theta = \frac{3}{2(\pi+2)} = 0{,}2917\ldots,$	$v_0 = \frac{c^3}{2\sqrt{6(\pi+2)}} = 0{,}09002 \cdot c^3$
$\frac{3}{2(\pi+2)} < \Theta < \frac{3}{\pi+2},$	v_0 decrece
$\Theta = \frac{3}{\pi+2} = 0{,}5835\ldots,$	$v_0 = \frac{c^3}{4\sqrt{3(\pi+2)}} = 0{,}06366 \cdot c^3$
$\frac{3}{\pi+2} < \Theta < 0{,}6778\ldots,$	v_0 decrece
$\Theta = 0{,}6778\ldots,$	$v_0 = 0{,}05906 \cdot c^3$

$0{,}6778\ldots < \Theta < 1,$ $\qquad v_0$ decrece

$\Theta = 1,$ $\qquad v_0 = 0{,}05694 \,.\, c^3.$

Vemos que la chapa rectangular del área dada permite obtener *maximum maximorum* del volumen para el recipiente cilíndrico sin tapa, si la razón de sus lados es igual a $\Theta_1 = 0{,}1945\ldots$ Para hallar otros elemenntos se emplean las fórmulas (9) y (10).

Hagamos constar que si se admite *un solo corte* AC (fig. 1), éste debe efectuarse paralelamente al lado menor y el recipiente de mayor volumen toma la forma de un paralelepípedo rectangular de base AD y de altura CA. La razón Θ debe satisfacer a las desigualdades

$$0 < \Theta < \frac{1}{2}.$$

Los demás elementos se determinan por las relaciones

$$\frac{x}{a} = \frac{1-2\Theta}{3}, \quad \frac{y}{a} = \frac{2}{3}(1+\Theta); \quad v_0 = \frac{\Theta^2}{3}(1-2\Theta) \,.\, a^3.$$

Si se da el área c^2 de la chapa, la forma más ventajosa de la misma se caracteriza por las condiciones

$$\Theta_0 = \frac{1}{6}; \quad \frac{x_0}{a} = \frac{2}{9}, \quad \frac{y_0}{a} = \frac{7}{9},$$

y

$$v_0 = \frac{2c^3}{9\sqrt{6}} = 0{,}09072 \,.\, c^3.$$

Finalmente consideremos el recipiente con tapa y fondo, suponiendo que la chapa se corta como está indicado en la fig. 5.

Un procedimiento análogo al empleado en el caso 2º. de la hipótesis II conduce a las fórmulas que se deducen de las anteriormente obtenidas para este caso, cambiando en ellas Θ en $\frac{\Theta}{2}$. La razón Θ debe hallarse en el intervalo

$$0 < \Theta \leq \frac{3}{\pi + 2}.$$

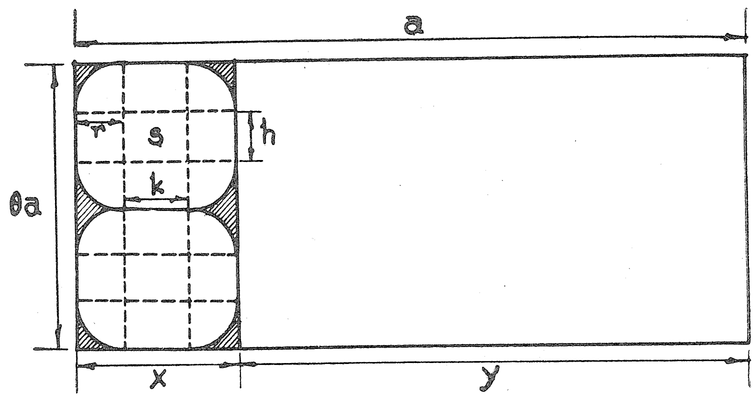

Fig. 5

Las expresiones para r_0, h_0, k_0, x_0, y_0, s_0 correspondientes al máximo del volumen se encuentran por las fórmulas (7) y (8) poniendo $\frac{\Theta}{2}$ en vez de Θ. La expresión para el volumen máximo se convierte en

$$v_0 = \frac{\Theta^2}{6}[1 - \frac{1}{6}(\pi + 2)\Theta] \, . \, a^3. \tag{12}$$

De esta manera se obtienen para v_0 valores mayores que los calculados por la fórmula (2) y correspondientes a los mismos valores de Θ.

Para determinar la forma más ventajosa de la chapa rectangular se sustituye a en la fórmula (12) por su expresión (11), lo que nos da

$$v_0 = \frac{c^3}{6}\sqrt{\Theta}[1 - \frac{1}{6}(\pi + 2)\Theta].$$

Igualando a cero la derivada de v_0 con respecto Θ vamos a tener

$$\Theta_2 = \frac{2}{\pi + 2} = 0{,}3890\ldots$$

Las desigualdades (9) y (10) sirven para encontrar las cantidades r_0, h_0, k_0, x_0, y_0, s_0 en tal ocasión. Para el *maximum maximorum* del volumen resulta

$$v_0 = \frac{4a^3}{9(\pi+2)^2} = 0{,}01681 \,.\, a^3$$

o bien

$$v_0 = \frac{c^3}{9}\sqrt{\frac{2}{\pi+2}} = 0{,}06930 \,.\, c^3.$$

Si se admiten *únicamente* cortes rectilíneos AC y EF (fig. 1), el paralelepípedo, con tapa y fondo, tendrá el mayor volumen

$$v_0 = \frac{1}{6}\Theta^2(1-\Theta) \,.\, a^3,$$

cuando

$$\frac{x}{a} = \frac{1-\Theta}{3}, \quad \frac{y}{a} = \frac{2+\Theta}{3},$$

siendo

$$0 < \Theta < 1.$$

La chapa rectangular del área dada c^2 y de forma más ventajosa satisface a las condiciones

$$\Theta_0 = \frac{1}{3}; \quad \frac{x_0}{a} = \frac{2}{9}, \quad \frac{y_0}{a} = \frac{7}{9}$$

y

$$v_0 = \frac{c^3}{9\sqrt{3}} = 0{,}06415 \,.\, c^3.$$

Asunción, Paraguay.
22 de febrero le 1944.