UN EJEMPLO DE ESPACIO ACCESIBLE, NO NUMERABLE, SEPARABLE Y NO PERFECTAMENTE SEPARABLE

por MANUEL BALANZAT

(Tema nº 49, vol. IX, pág. 164)

I

En un trabajo anterior (1) hemos dado un ejemplo de un espacio D_0 con la potencia del continuo, separable y no perfectamente separable. Dicho espacio es por consiguiente una solución al tema propuesto, pero no siendo accesible no verifica la condición puesta en último lugar. El objeto de esta nota es obtener un ejemplo que verifique también dicha condición suplementaria.

Los puntos del espacio que vamos a estudiar están definidos por los siguientes conjuntos del plano cartesiano:

a) El eje OX.

b) El conjunto de las rectas de ecuaciones $y=\frac{1}{n}(n=1,2,\ldots)$.

c) Un conjunto numerable de puntos cualesquiera distintos de los anteriores.

Designaremos el primer conjunto de puntos por la letra M y sus elementos por las letras minúsculas $(a, b, \ldots)$; al segundo conjunto lo designaremos con la letra N, y a sus elementos con la notación $A_r, B_s, \ldots$ donde el subíndice indica que la ordenada del punto es $\frac{1}{r}, \frac{1}{s} \ldots$ y la letra mayúscula indica que la abscisa es la misma que la de los puntos $a, b, \ldots$; es decir convenimos en que los puntos $a, A_r, A_s, \ldots$ designados con la misma letra tienen siempre la misma abscisa y a puntos $a, B_r, C_s, \ldots$ con distintas letras les corresponden siempre abscisas distintas, las ordenadas siendo cero para los puntos designados con letras

(1) *Conjuntos compactos y separables en los espacios D_0*. Publicaciones del Instituto de Matemática de la Universidad del Litoral, volumen V.

minúsculas y $\frac{1}{r}, \frac{1}{s}$ ... para los designados con mayúsculas; finalmente designaremos al tercer conjunto por la letra P y a sus elementos con la notación $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \ldots \alpha_n \ldots$.

Definiremos la acumulación en este espacio de la manera siguiente:

Los entornos de un punto cualquiera a del conjunto M son los conjuntos $V_n(a)$ compuestos del punto a, de los puntos $\alpha_n, \alpha_{n+1}, \ldots$ y de los $A_n, A_{n+1}, \ldots$

Los entornos $V_n(A_r)$ de un punto A_r del conjunto N están formados por el punto A_r y los puntos $\alpha_n, \alpha_{n+1} \ldots$

Finalmente atribuiremos a los elementos α_r del conjunto P un solo entorno $V(\alpha_r)$ formado exclusivamente por dicho punto α_r.

Hemos así definido un espacio (V) que vamos a demostrar que es accesible, es decir que verifica las condiciones 1.ª, 2.ª, 3.ª y 5.ª de Riesz. La condición 1.ª: «Si un conjunto E está contenido en otro conjunto F, el derivado E' tiene que estar contenido en el derivado F'», queda verificada en todo espacio (V) y por lo tanto en el que estamos estudiando.

La segunda condición se enuncia: «Todo punto de acumulación de la suma de dos conjuntos es punto de acumulación de uno al menos de esos dos conjuntos», veamos que también se verifica esta condición.

En efecto: sean E y F dos conjuntos cualesquiera y sea $G = E + F$ el conjunto suma de los dos. Consideremos los conjuntos

$$E_1 = E \times M \quad E_2 = E \times N \quad E_3 = E \times P$$
$$F_1 = F \times M \quad F_2 = F \times N \quad F_3 = F \times P$$

(donde M, N, y P son los conjuntos definidos al principio cuya suma da el conjunto de todos los puntos del espacio considerado). Consideremos igualmente los conjuntos

$$G_1 = G \times M \quad G_2 = G \times N \quad G_3 = G \times P;$$

evidentemente se verifican las siguientes relaciones

$$E = E_1 + E_2 + E_3 \quad F = F_1 + F_2 + F_3 \quad G = G_1 + G_2 + G_3$$
$$G_1 = E_1 + F_1 \quad G_2 = E_2 + F_2 \quad G_3 = E_3 + F_3.$$

Supongamos ahora un punto de acumulación de G; podemos evidentemente considerar tres casos distintos según que dicho punto pertenezca al conjunto M al N o al P.

Consideremos primeramente el caso en que el punto de acumulación pertenezca a M; sea a dicho punto y sea $G_2(a)$ el conjunto de los puntos de G que tienen la misma abscisa que a. En todo entorno de a hay puntos de G, pero como los entornos de a, por definición, solo pueden contener puntos de N de la misma abscisa que a y puntos de P, se deduce que en todo entorno de a hay puntos o de G_3 o de $G_2(a)$.

Los conjuntos G_3 y $G_2(a)$ no pueden ser los dos finitos, ya que en este caso, tomando un número m superior a todos los subíndices de los puntos de ambos conjuntos, el entorno $V_m(a)$ no contendría ningún punto ni de $G_2(a)$ ni de G_3.

Si $G_2(a)$ es infinito, y son $E_2(a)$ y $F_2(a)$ los conjuntos de puntos de E_2 y F_2 que tienen la misma abscisa que a se verifica que $G_2(a) = E_2(a) + F_2(a)$, y por tanto uno de estos dos conjuntos, por ejemplo $E_2(a)$, es infinito; si $E_2(a)$ es infinito en cada entorno de a hay puntos de $E_2(a)$, luego se verifica que a es punto de acumulación de $E_2(a)$, y por lo tanto, teniendo en cuenta la primera condición de Riesz, es también punto de acumulación de E_2 y de E. Análogamente si fuera $F_2(a)$ infinito se demostraría que a sería punto de acumulación de F.

Si G_3 es infinito, uno de los dos conjuntos E_3 o F_3 es infinito y como en el párrafo anterior demostraríamos que a es punto de acumulación de E_3 o de F_3 y por lo tanto de E o de F. Vemos por lo tanto que en el caso en que el punto a de acumulación de G pertenezca al conjunto M tiene que ser siempre punto de acumulación de E o de F.

Supongamos ahora que el punto de acumulación de G pertenezca al conjunto N; sea A_r dicho punto, en todo entorno de A_r hay puntos de G, pero como los entornos de A_r solo contienen puntos de P, se deduce que en todo entorno de A_r hay puntos de G_3. Como en el caso anterior se ve que G_3 es infinito, y por lo tanto también lo es uno de los dos conjuntos E_3 o F_3, y el mismo razonamiento nos probaría que A_r es punto de acumulación de E_3 o de F_3, y por lo tanto también lo es de E o de F.

Quedaría ahora por considerar el tercer caso en que el punto de acumulación pertenece a P; este caso no puede presentarse puesto que el único entorno de cualquier punto α_n de P no contiene más punto que el mismo α_n, luego se deduce que los puntos de P no pueden ser nunca puntos de acumulación de ningún conjunto. *Queda así demostrado que el espacio que estamos considerando verifica la segunda condición de Riesz.*

La tercera condición de Riesz se enuncia: «Todo conjunto compuesto de un solo elemento carece de punto de acumulación», lo que, dicho de otra forma, significa que no existe ningún punto que esté contenido en todos los entornos de otro punto distinto. Basta observar las definiciones de entornos que hemos dado para deducir inmediatamente que *el espacio estudiado también verifica la tercera condición de Riesz.*

La quinta condición de Riesz se enuncia: «Todo conjunto derivado es cerrado». Vamos a ver que también se verifica esta condición; en efecto sea E un conjunto cualquiera, E' su derivado, distingamos dos casos distintos según que E contenga o no una infinidad de puntos de P.

Supongamos primeramente que E contenga infinitos puntos de P, entonces, teniendo en cuenta las definiciones de entornos que hemos adoptado, se ve que cualquier punto de M o de N es punto de acumulación de E, y como ya hemos establecido que los puntos de P no pueden ser de acumulación de ningún conjunto, se deduce que el derivado E' de E es el conjunto $M+N$, que es, evidentemente, cerrado.

Supongamos ahora que E solo contiene un conjunto finito o nulo de puntos de P, ningún punto de N puede ser de acumulación de E. En efecto: sea A_r un punto de N, si p es mayor que los subíndices de todos los puntos del conjunto $E \times P, V_p(A_r)$ no contiene ningún punto de $E \times P$, y como, según la definición de entornos, solo contiene además de A_r puntos de P, se deduce que $V_p(A_r)$ no contiene ningún punto de E distinto de A_r, luego A_r no puede ser punto de acumulación de E, es decir los únicos puntos de acumulación de E son los puntos del conjunto M.

Ahora bien, en los entornos de cualquier punto del espacio no existen puntos del conjunto M distintos de dicho punto; por consiguiente cualquier conjunto compuesto de puntos de M carece de puntos de acumulación, por consiguiente cuando E solo contiene un número finito de puntos de P, E' que se compone exclusivamente de puntos de M carece de puntos de acumulación, y es por lo tanto un conjunto cerrado.

Vemos pues que el espacio que estamos considerando verifica igualmente la quinta condición de Riesz, y es por lo tanto un espacio accesible.

Recordemos las siguientes definiciones: un conjunto E se dice *separable* si existe un conjunto numerable N de puntos de E tal que todo elemento de E es punto de N o punto de acumulación de N. Un conjunto E se dice *perfectamente separable* si existe una familia numerable de conjuntos tal que, cualquiera que sea el punto a de E, puedan tomarse, sin alterar la definición adoptada de acumulación, como entornos de a conjuntos pertenecientes a la familia, o lo que es lo mismo cuando se puede conseguir que el conjunto de los entornos de todos los puntos de E forme una familia numerable.

En el espacio que estamos estudiando se verifica que el derivado P' del conjunto numerable P es el conjunto $M+N$, luego $P+P'=M+N+P$ es el conjunto de todos los puntos del espacio, y por lo tanto el *espacio es separable.*

Supongamos ahora una familia de entornos $\{W\}$ del espacio equivalente a la familia $\{V\}$ definida anteriormente; ya sabemos que es condición necesaria y suficiente para la equivalencia que todo entorno de $\{V\}$ contenga un entorno de $\{W\}$, y recíprocamente.

Sea a un punto de M, existirá un entorno $W_1(a)$ de la nueva familia contenido en $V_1(a)$ y un entorno $V_p(a)$ contenido en $W_1(a)$. El entorno $W_1(a)$ contendrá entonces puntos del conjunto N de la misma abscisa que a y no contendrá ningún punto del conjunto N de abscisa diferente de la de a. Podemos pues, a cada punto $(a, b, \ldots)$ del conjunto M (es decir del eje OX) hacerle corresponder un entorno $(W_1(a), W_1(b), \ldots)$ de manera tal que dos entornos correspondientes a puntos distintos no tengan ningún punto común, luego de cualquier familia de entornos $\{W\}$ equivalente a la dada $\{V\}$ podemos siempre extraer un conjunto de potencia del continuo de entornos diferentes, luego ninguna familia equivalente a la dada puede ser numerable, y por lo tanto el espacio no es *perfectamente separable.* Hemos por lo tanto construído un espacio que cumple todas las condiciones que nos proponíamos es decir: *accesible, no numerable, separable y no perfectamente separable.*

II

Dijimos al principio que habíamos encontrado una solución al tema propuesto (salvo la condición de accesibilidad) bajo la forma de un espacio D_0. Estos espacios estudiados por primera vez por Rey Pastor (2), son espacios en los que se define una distancia que se distingue de la ordinaria de los espacios métricos en que no es simétrica y en que puede ser nula la distancia entre puntos distintos. Esta última propiedad tiene por consecuencia que los espacios D_0, que verifican las condiciones 1.ª, 2.ª y 5.ª de Riesz, no tengan por qué verificar la condición 3.ª, y por lo tanto, en general, no serán accesibles. Si a la distancia entre dos puntos se la obliga a ser nula únicamente cuando los puntos coinciden, pero no se la obliga a ser simétrica, obtenemos los espacios cuasimétricos de Wilson (3), que verifican entonces la tercera condición de Riesz, y son, por lo tanto, accesibles.

El objeto de esta segunda parte es ver que el espacio estudiado en la primera puede considerarse como un espacio cuasimétrico. Para ello definiremos, en el conjunto de puntos que sirve de base al espacio dado, la distancia de un punto a sí mismo como nula y la distancia entre dos puntos distintos mediante las siguientes igualdades:

$$ab=1 \quad aA_r=\frac{1}{r} \quad aB_r=1 \quad a\alpha_n=\frac{1}{n} \quad A_r a=\frac{1}{r} \quad A_r b=1$$

$$A_r B_n=1 \quad A_r A_s=\frac{1}{r}+\frac{1}{s} \quad A_r \alpha_n=\frac{1}{n}$$

$$\alpha_n a=1 \quad \alpha_n A_r=1 \quad \alpha_r \alpha_s=1.$$

(en estas igualdades r puede ser igual o distinto de n, pero es siempre r distinto de s).

Basta observar esta definición para ver que la distancia entre dos puntos distintos es positiva, se anula cuando los dos

---

(2) *Espacios D_0*. Revista de Matemáticas y Física Teórica de la Universidad de Tucumán, vol. I (1940), pág. 105.

(3) *On quasi-metric spaces*. American Journal of Mathematics, vol. 53 (1931), pág. 675.

puntos están confundidos, y solo entonces, y no es simétrica. Para ver que el espacio es cuasimétrico habrá que demostrar que esta distancia tiene también la propiedad triangular $xy \leqq xz + zy$. Para ello consideraremos todos los casos posibles y tendremos en cuenta que, como ninguna distancia es superior a la unidad, bastará que aparezca en el segundo miembro un sumando igual a la unidad para que la desigualdad quede satisfecha.

Si tomamos como par xy el par ab, el tercer elemento z puede ser c, A_r, B_r, C_r, o α_n y en todos los casos las sumas

$$a c + c b \quad a A_r + A_r b \quad a B_r + B_r b \quad a C_r + C_r b \quad a \alpha_n + \alpha_n b$$

tienen un sumando igual a la unidad.

Si tomamos como par xy el par aA_r el tercer elemento z puede ser $b, A_s (s \neq r), B_n$ o α_n. Las sumas

$$a b + b A_r \quad a B_n + B_n A_r \quad a \alpha_n + \alpha_n A_r$$

tienen un sumando igual a la unidad, y por otra parte se verifica:

$$a A_s + A_s A_r = \frac{1}{s} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} > \frac{1}{r} = a A_r$$

Si tomamos como par xy el par aB_r, el tercer elemento z puede ser $b, c, A_n, B_s (r \neq s), C_n$ o α_n. Siempre las sumas

$$a b + b B_r \quad a c + c B_r \quad a A_n + A_n B_r$$
$$a B_s + B_s B_r \quad a C_n + C_n B_r \quad a \alpha_n + \alpha_n B_r$$

tienen un sumando igual a la unidad.

Si tomamos como par xy el par $a \alpha_n$ el tercer elemento z puede ser b, A_r, B_r o $\alpha_p (p \neq n)$. Las sumas

$$a b + b \alpha_n \quad a B_r + B_r \alpha_n \quad a \alpha_p + \alpha_p \alpha_n$$

tienen un sumando igual a la unidad. Por otra parte se verifica que:

$$a A_r + A_r \alpha_n = \frac{1}{r} + \frac{1}{n} > \frac{1}{n} = a \alpha_n.$$

Si tomamos como par xy el par $A_r a$ el tercer elemento puede ser $b, A_s \, (r \neq s), B_n$ o α_n. Las sumas

$$A_r b + b\, a \quad A_r B_n + B_n a \quad A_r \alpha_n + \alpha_n a$$

tienen un sumando igual a la unidad. Por otra parte se tiene

$$A_r A_s + A_s a = \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s} > \frac{1}{r} = A_r a.$$

Si tomamos como primer par el $A_r b$ el tercer elemento puede ser $a, c, A_s \, (r \neq s), B_n, C_n$ o α_n. Siempre las sumas

$$A_r a + a\, b \quad A_p c + c\, b \quad A_r A_s + A_s b$$
$$A_r B_n + B_n b \quad A_r C_n + C_n b \quad A_r \alpha_n + \alpha_n b$$

tienen un sumando igual a la unidad.

Si tomamos como par inicial el $A_r B_n$ el tercer elemento puede ser $a, b, c, A_s \, (r \neq s), B_m \, (m \neq n), C_p$ o α_p, y siempre las sumas

$$A_r a + a B_n \quad A_r b + b B_n \quad A_r c + c B_n \quad A_r A_s + A_s B_n$$
$$A_r B_m + B_m B_n \quad A_r C_p + C_p B_n \quad A_r \alpha_p + \alpha_p B_n$$

tienen un sumando igual a la unidad.

Si tomamos como par xy el par $A_r A_m \, (r \neq m)$, el tercer elemento puede ser $a, b, A_s \, (s \neq r$ y $\neq m), B_p$ o α_n. Las sumas

$$A_r b + b\, A_m \quad A_r B_n + B_n A_m \quad A_r \alpha_n + \alpha_n A_m$$

tienen un sumando igual a la unidad. Por otra parte tenemos:

$$A_r a + a\, A_m = \frac{1}{r} + \frac{1}{m} = A_r A_m$$

$$A_r A_s + A_s A_m = \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s} + \frac{1}{m} > \frac{1}{r} + \frac{1}{m} = A_r A_m.$$

Si tomamos como par xy el par $A_r \alpha_n$ el tercer elemento puede ser $a, b, A_s \, (r \neq s), B_m$ o $\alpha_p \, (p \neq n)$. Las sumas

$$A_r b + b\, \alpha_n \quad A_r B_m + B_m \alpha_n \quad A_r \alpha_p + \alpha_p \alpha_n$$

tienen un sumando igual a la unidad; por otra parte se verifica que:

$$A_r\,a + a\,\alpha_n = \frac{1}{r} + \frac{1}{n} > \frac{1}{n} = A_r\,\alpha_n$$

$$A_r\,A_s + A_s\,\alpha_n = \frac{1}{r} + \frac{1}{s} + \frac{1}{n} > \frac{1}{n} = A_r\,\alpha_n\,.$$

Si tomamos como par xy el par $\alpha_n\,a$ el tercer elemento puede ser b, A_r, B_r o $\alpha_p\,(p \neq n)$, y en todo caso las sumas

$$\alpha_n\,b + b\,a \qquad \alpha_n\,A_r + A_r\,a \qquad \alpha_n\,B_r + B_r\,a \qquad \alpha_n\,\alpha_p + \alpha_p\,a$$

tienen un sumando igual a la unidad.

Si tomamos como par xy el par $\alpha_n\,A_r$ el tercer elemento puede ser $a, b, A_s\,(r \neq s), B_n$ o $\alpha_p\,(p \neq n)$ y siempre las sumas

$$\alpha_n\,a + a\,A_r \qquad \alpha_n\,b + b\,A_r \qquad \alpha_n\,A_s + A_s\,A_r$$

$$\alpha_n\,B_n + B_n\,A_r \qquad \alpha_n\,\alpha_p + \alpha_p\,A_r$$

tienen un sumando igual a la unidad.

Finalmente si tomamos como par inicial $\alpha_m\,\alpha_n\,(m \neq n)$, el tercer elemento puede ser a, A_r o $\alpha_q\,(q \neq m$ y $\neq n)$; en todos los casos las sumas

$$\alpha_m\,a + a\,\alpha_n \qquad \alpha_m\,A_r + A_r\,\alpha_n \qquad \alpha_m\,\alpha_p + \alpha_p\,\alpha_n$$

tienen un sumando igual a la unidad.

Hemos considerado todos los casos posibles, luego ha quedado demostrado que *la distancia verifica la propiedad triangular.*

Una vez definida la distancia, la acumulación se establece mediante distancias suficientemente pequeñas, pero como aquí la distancia no es simétrica, hay que especificar más la definición. Nosotros diremos que un punto η es de acumulación de un conjunto E, cuando cualquiera que sea ε existen puntos λ del conjunto E tales que $\eta\,\lambda < \varepsilon$ (las otras definiciones posibles serían $\lambda\,\eta < \varepsilon$ o bien la verificación de ambas desigualdades).

Esta definición nos conduce a una familia de entornos equivalente a la dada; en efecto: dados los entornos primitivos $V(\alpha_p), V_n(A_s)$ y $V_n(a)$ tomando respectivamente $\varepsilon < 1, \varepsilon < \frac{1}{n}$ y $< \frac{1}{s}$, $\varepsilon < \frac{1}{n}$ obtenemos entornos definidos por distancias que están contenidos en los anteriores, y recíprocamente dados los entornos definidos por distancias

$$W_1(a)\,[a\lambda < h_1] \quad W_2(A_n)\,[A_n\lambda < h_2] \quad W(\alpha_r)\,[\alpha_r\lambda < h_3]$$

los entornos $V_m(a)$, $V_p(A_n)$, $V(\alpha_r)$, donde es $m > \frac{1}{h_1}$, $n > \frac{1}{h_2}$ están contenidos en ellos.

Queda pues establecido que el espacio que hemos definido es un espacio cuasimétrico, y esto nos prueba también que: *en los espacios cuasimétricos, al contrario de lo que sucede en los métricos, un conjunto puede ser separable sin ser perfectamente separable.*

Como ya hemos dicho los espacios cuasimétricos forman una clase intermedia entre los espacios D_0 y los métricos; son menos generales que los D_0 por que se impone la condición de que la distancia entre puntos distintos no puede ser nula, y son más generales que los métricos porque la distancia no está obligada a ser simétrica. Puede igualmente considerarse otra clase intermedia de espacios, aquella en que la distancia está obligada a ser simétrica, pero puede ser nula la distancia entre dos puntos distintos.

Se puede fácilmente ver que: *en esta última clase de espacios todo conjunto separable es también perfectamente separable* ya que se puede aplicar la misma demostración que se usa para demostrar esta propiedad en el caso de los espacios métricos; es decir, se forma la familia total numerable de entornos con las esferas cuyos centros son los puntos N y de radios $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \cdots \frac{1}{n} \ldots$. Esta misma demostración es aplicable a los espacios D_0 en que se define la acumulación haciendo ambas distancias suficientemente pequeñas.

Nota: Observemos que el espacio anterior no es un espacio de Hausdorff, ya que los entornos de dos puntos cualesquiera del conjunto $M+N$ contienen siempre puntos comunes del conjunto P.

Puede por tanto plantearse como un tema nuevo el de dar un ejemplo de espacio de Hausdorff no numerable, separable y no perfectamente separable, o demostrar la imposibilidad de su existencia.

(Recibido el 17 de marzo de 1945).