DE LA TEORIA DE LAS FUNCIONES ANALITICAS DE VARIAS VARIABLES COMPLEJAS. DOMINIOS DE REGULARIDAD Y DOMINIOS DE MEROMORFIA DE REINHARDT (1)

por

PETER THULLEN (Quito-Ecuador)

RESUMEN - RÉSUMÉ

On connaît le théorème: «Pour qu'un domaine de Reinhardt K soit un domaine d'holomorphie, il faut et il suffit qu'il soit convexe par rapport a la famille des hyperboles

$$|w|^{\alpha}.|z|^{\beta}=c, \quad (\alpha, \beta, c>0).$$

Une étude plus approfondie de cette convexité montre q'elle caractérise non seulement les domaines d'holomorphie de Reinhardt, mais encore les domaines de méromorphie de Reinhardt. On en déduit aussitôt: *Si un domaine de Reinhardt est un domaine de méromorphie, c'est aussi un domaine d'holomorphie.* Cette proposition est en rapport étroit avec la suivante, plus importante encore: *Si un domaine de Reinhardt* K *est pseudoconvexe,* — c'est-à-dire si a chaque point frontière Q on peut associer un morceau de variété analytique $g_Q(w,z)=0$ passant par Q et cela de façon que le domaine commun a K et a un voisinage U(Q) ne contienne aucun point de cette variété, — *alors* K *est un domaine d'holomorphie.* Les domaines de Reinhardt forment ainsi la première classe de domaines pour lesquels on sait démontrer que la pseudo-convexité locale est une condition suffisante pour qu'ils soient domaines d'holomorphie, sans faire la moindre hypotèse restrictive sur la frontière.

(1) El presente trabajo fué escrito en el año de 1935. Las circunstancias especiales en que viví en los últimos diez años, absorbido por trabajos de otra índole, me impidieron darlo a la publicidad antes de ahora. Parte de los resultados han sido resumidos en la publicación "Sur les domaines de méromorphie", C. R. Acad. Sci. Paris, 199 (1934).

Sumario

§ 1. Introducción

Denominaciones (2). Para el lector no versado en la teoría de las funciones analíticas de varias variables complejas recordamos las siguientes nociones y hechos, limitándonos al espacio cuadridimensional S_4 de las dos variables complejas:

$$w = u + iv, \qquad z = x + iy.$$

Un recinto o dominio B del espacio S_4 es un conjunto cuadridimensional y conexo de puntos tales que con un punto P le pertenece también un entorno (cuadridimensional) $U(P)$ de P. A continuación consideraremos solamente recintos *limitados* y *univalentes* (schlichte).

Llámase Dominio (*circular*) de Reinhardt con el *centro* (w_0, z_0) un recinto K que por cada una de las transformaciones del grupo biparamétrico:

$$T(\vartheta,\varphi) \quad W = (w - w_0)e^{i\vartheta} + w_0 \;, \quad Z = (z - z_0)e^{i\varphi} + z_0 \;, \quad 0 \leqq \vartheta, \varphi \leqq 2\pi$$

es transformado en si mismo.

El dominio K de Reinhardt llámase *propio*, si el centro (w_0, z_0) es punto interior de K. En el caso contrario, K se llama *impropio*. Los planos $w_0 = 0$ y $z_0 = 0$ son los *planos de simetría* de K.

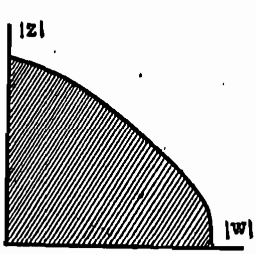
Suponemos siempre que el centro sea el punto (0,0), lo que no significa una restricción de la generalidad de nuestras consideraciones.

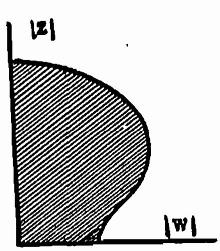
El dominio de Reinhardt K de centro (0,0), se dice *completo*, si cada *plano analítico* $w = c$, o $z = k$ que tiene un punto común con K corta un trozo conexo de K; además, si K contiene un punto del plano de simetría $w = 0$ (o de $z = 0$ respectivamente) como punto interno, el trozo cortado por un plano $z = k$ ($w = c$ respectivamente) debe ser un círculo completo.

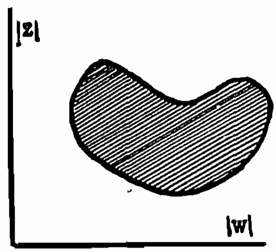
(2) Para mayores detalles y más nociones nos referimos al libro: H. Behnke - P. Thullen: *Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen*, de la Colección: Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, III, 3 (1934). Citamos este libro con la denominación abreviada de "Behnke-Thullen".

Los dominios de Reinhardt tienen especial importancia ya que los recintos de convergencia absoluta y uniforme de las series dobles de potencias son tales dominios propios.

Una representación geométrica intuitiva de un dominio de Reinhardt se obtiene en el cuadrante de los valores absolutos $|w|$, $|z|$. Por ejemplo, la primera figura que viene a continuación representa un dominio propio y completo de Reinhardt; el segundo un dominio propio pero incompleto respecto a los planos $w = c$; y el tercero un dominio impropio, e incompleto respecto a los planos $z = k$.







Una superficie *bidimensional* F del S_4 se denomina superficie analítica o *superficie característica,* si para cada punto P de F existe un entorno $U(P)$ y una función $g_P(w,z)$ analítica en $U(P)$, tales que los puntos de F, y sólo ellos, satisfagan en $U(P)$ la ecuación: $g_P(w,z) = 0$.

Las *superficies tridimensionales* del S_4 llamamos simplemente hipersuperficies. Nos ocuparán especialmente las hipersuperficies analíticas, llamadas también hiperplanoides; siendo una hipersuperficie analítica S, una infinidad uniparamétrica, de parámetro real-analítico t, de superficies analíticas

$$\text{(S)} \qquad\qquad g(w,z;t) = 0.$$

Denomínase dominio de regularidad (*o dominio de holomorfía*) *un "dominio de existencia" de una función analítica, o sea un recinto* R *para el cual existe una función* $f(w,z)$, *analítica en todo punto interior pero singular en todo punto-contorno.* Análogamente se define un dominio de meromorfía como "dominio de existencia" de una función meromorfa.

Solamente en casos muy especiales, un dominio B del S_4 es un dominio de regularidad o de meromorfía, en contraposición a la teoría de las funciones de una variable compleja, en la que es sabido que cada recinto del plano-z es también dominio de existencia de una función analítica (meromorfa) $f(z)$ convenientemente elegida. De otro lado, dado un dominio cualquiera B de S_4, existe siempre un dominio de regularidad $R \equiv H(B)$ que envuelve a B con la propiedad de que cada función analítica en B lo sea también en H(B). H(B) es *el más pequeño dominio de regularidad* que envuelve a B y se llama la envolvente de regularidad (Regularitätshülle) de B [3].

Si B es un dominio de Reinhardt, lo es también H(B).

Una propiedad fundamental conectada con los dominios de regularidad es la *pseudo-convexidad. Un dominio* B *llámase* pseudoconvexo *si, para cada punto-contorno Q de* B, *existe un entorno* $U(Q)$ *y una superficie analítica* $g_Q(w,z) = 0$, g_Q *analítica en* $U(Q)$, *que pasa por* Q *pero que no contiene un punto del recinto común a* $U(Q)$ *y* B [4].

Si el contorno de un dominio de regularidad R es una hipersuperficie $\varphi(u,v,x,y) = 0$ que permite derivadas parciales continuas de primero y segundo orden, R es necesariamente pseudoconvexo.

Finalmente mencionamos el llamado Teorema de Continuidad demostrado por HARTOGS y de cuya simplificación y generalización se ocupan numerosos trabajos. Este teorema juega un papel central en todas las investigaciones sobre las singularidades de las funciones de varias variables complejas y de ello se deriva una serie de interesantes e importantísimas consecuencias. Enunciamos aquí el teorema para dos variables complejas, en la forma en que ha sido demostrado por H. KNESER.

Teorema de Continuidad [5]. *Sea* $\mathfrak{b}^{(z)}$ *un recinto limitado del plano-z con inclusión del contorno* C *y sea la función* $f(w,z)$ *analítica (meromorfa respectivamente) en todo punto* (w,z) *con* $|w-a| \leqq R$ $(R > 0)$ *y* z *de* C. *Si existe para cada* $\varepsilon > 0$ *un valor* a_ε, $|a_\varepsilon - a| < \varepsilon$, *tal que* $f(w,z)$ *sea analítica (meromorfa) para* $w = a_\varepsilon$ *y* z *de* $\mathfrak{b}^{(z)}$, *entonces* $f(w,z)$ *es analítica (meromorfa) para* $w = a$ *y* z *de* $\mathfrak{b}^{(z)}$.

Dos Problemas fundamentales.

a) Como las propiedades fundamentales que se conocen tanto de los dominios de regularidad como de los de meromorfía son todas idénticas y como, además, es fácil demostrar que un dominio de regularidad es siempre también un dominio de meromorfía, nace la cuestión inversa de *si un dominio de meromorfía es necesariamente también un dominio de regularidad.*

---

(3) Una teoría general de los dominios de regularidad y de las envolventes de regularidad se encuentra en: H. CARTAN-THULLEN: *Regularitäts - und Konvergenzbereiche.* Math. Annalen 106 (1932).

(4) Ver en particular: BEHNKE-STEIN: *Die Konvexität in der Funktionentheorie mehrerer komplexer Veränderlichen.* Mitt. Math. Gesellsch. Hamburg, Band VIII (1940), pág. 78-81; en este trabajo se habla de "convexidad local-analítica". Ver también Behnke-Thullen, pág. 27.

(5) Ver la literatura indicada en Behnke-Thullen, pág. 49; además H. BEHNKE: *"Der Kontinuitätssatz und die Regulärkonvexität".* Maht. Ann. 113 (1936).

b) Igualmente importante es la solución del siguiente problema conocido con el nombre de Problema de Levi: *¿Es la pseudo-convexidad de un dominio* B *condición suficiente para que* B *sea dominio de regularidad*?

En particular, en el último problema entraba como elemento sustancial en todas las investigaciones anteriores la condición de que el contorno tenga derivadas continuas de primero y segundo orden, sin que haya sido posible librarse de esta condición restrictiva. Y aún así el problema ha sido resuelto únicamente para los *dominios circulares* y para los *dominios de Hartogs* (6).

En el presente trabajo se contestan ambas preguntas afirmativamente para los dominios de Reinhardt, propios e impropios, en una forma completa sin condición restrictiva alguna sobre el contorno. Los dominios de Reinhardt forman así la primera clase de dominios del S_4 para los cuales se puede demostrar que la pseudo-convexidad es una condición suficiente para que sean dominios de regularidad, sin hacer la menor hipótesis adicional (7).

Nuestros resultados parten de una nueva demostración de la conocida «propiedad característica» (Grundeigenschaft) de los dominios de convergencia absoluta y uniforme de series dobles de potencias, propiedad que indicamos en la forma enunciada por Hartogs:

Para que un dominio propio de Reinhardt K *sea dominio de convergencia absoluta y uniforme de una serie de potencias* $\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} w^m z^n$, *es necesario y suficiente que exista para cada punto-contorno* Q *de* K *una hipersuperficie «hiperbólica»* $|w|^{\alpha}.|z|^{\beta}=C$ *que pase por* Q *pero que no tenga un punto interior común con* K (8).

Este teorema es una consecuencia bastante simple del Teorema de Continuidad, hecho hasta ahora desatendido. Deducir

(6) Ver BEHNKE-STEIN, loc. cit., pág. 81.

(7) En K. OKA: "*Sur les domaines pseudoconvexes*". Proc. Imp. Acad. Tokyo 17 (1941) se enuncia, sin demostración, que todo dominio pseudo-convexo es un dominio de regularidad. Pero el autor parte de un concepto *diferente* de la pseudoconvexidad.

(8) Ver, por ejemplo, Behnke-Thullen, Pág. 38/39.

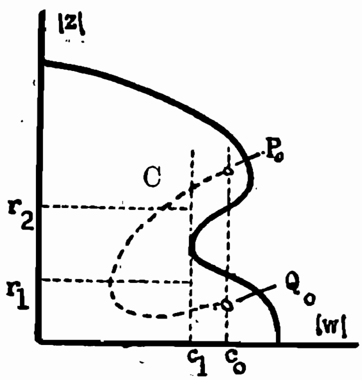
del teorema de continuidad la propiedad característica no significa simplificar sustancialmente su demostración; pero, sí, significa una amplia generalización de la indicada propiedad, demostrándose que es característica para todo dominio de regularidad y dominio de meromorfía, propio e impropio, de Reinhardt. Además, el Teorema de Continuidad establece una relación directa entre la pseudo-convexidad y la convexidad respecto a «hipérbolas» y de ahí se sigue el segundo resultado que hemos enunciado. El presente trabajo concluye así en cierto sentido el examen de los dominios de Reinhardt en relación con la teoría de funciones analíticas y meromorfas de dos variables complejas.

§ 2. Dominios completos de Reinhardt

Teorema 1. *Un dominio de meromorfía de Reinhardt es necesariamente completo.*

En efecto, sea K un dominio de meromorfía de Reinhardt. Si K comprende un punto del plano de simetría $z=0$ ($w=0$ respectivamente), un plano $w=c$ ($z=k$ respectivamente) corta, come se sabe, un círculo completo. Basta, por lo tanto, demostrar que, en los demás casos, cada plano $w=c$ y $z=k$ tiene con K a lo más un trozo conexo común.

Supongamos ahora, que existiere un plano, por ejemplo $w=c_0$, y sobre este plano dos puntos P_0 y Q_0 de K que — en contra de la afirmación — no pudieren ser unidos mediante una curva consistente de sólo puntos comunes al plano $w=c_0$ y K!.



Como K es conexo, existe, sin embargo, una curva C, que une P_0 con Q_0 en K. Sea (t parámetro real):

$$(C) \quad P=P(t), \quad 0 \leqq t \leqq A;$$

$$P_0=P(0); \quad Q_0=P(A).$$

Si desplazamos en forma continua el punto $P(t)$ sobre C, comenzando con $P(0)$, y desplazando con $P(t)$ también el plano

$w = w(t)$, es fácil ver que existe una posición límite $w = w(t_1) = c_1$ con éstas dos propiedades:

1) Existen dos números positivos r_1, r_2 con $r_1 < r_2$ tales que las circunferencias:

$$(1) \qquad w = c_1, \quad |z| = r_1 \quad \text{y} \quad |z| = r_2$$

comprendan únicamente puntos interiores, pero que el «anillo circular»

$$(2) \qquad w = c_1, \quad r_1 < |z| < r_2$$

contenga por lo menos un punto-contorno de K.

2) Existe un $\varepsilon > 0$ tal que los anillos circulares

$$(3) \qquad w = w(t), \quad r_1 \leqq |z| \leqq r_2; \quad t_1 < t < t_1 + \varepsilon$$

sólo comprendan puntos internos de K.

Siendo K un dominio de meromorfía, existe una función $f(w, z)$ meromorfa en K pero singular en todo punto-contorno, particularmente singular por lo menos en un punto de (2). Pero como $f(w, z)$ es meromorfa en (1) y (3), debe ser meromorfa también en (2) según el Teorema de Continuidad, en contradicción con lo anterior. *L.Q.Q.D.*

§ 3. Propiedad característica de los dominios de meromorfía de Reinhardt

Un dominio K de Reinhardt es denominado *convexo respecto a «hipérbolas»* $|w|^\alpha . |z|^\beta = C$ (α, β reales, $C \geqq 0$), o simplemente convexo-hiperbólico, si K es completo y si, además, cada hipérbola que corta K tiene con K exactamente un trozo conexo común.

Condición necesaria y suficiente a fin de que un dominio K *de Reinhardt sea convexo-hiperbólico es la de que por cada punto-contorno pase una hipérbola* $|w|^\alpha . |z|^\beta = C$ *que no tenga punto interno común con* K.

Para demostrar que la condición es necesaria, téngase en cuenta que una sucesión continua de tales hipérbolas tiende a su vez a una hipérbola de la misma clase. Es fácil demostrar también que la condición es suficiente; pero este hecho se deduce de inmediato de la demostración del teorema 3, que sigue más adelante.

Teorema 2. *Un dominio de meromorfía de Reinhardt (propio o impropio) es convexo-hiperbólico.* Igual afirmación vale, con mayor razón, para dominios de regularidad de Reinhardt.

La **demostración** es similar a la del teorema 1, debiendo únicamente añadirse una simple transformación analítica.

En efecto, sea dado un dominio K de meromorfía de Reinhardt. Del teorema (1) se sigue en primer lugar que K es completo.

Supongamos ahora que existiere cierta hipérbola

$$(S_0) \qquad |w|^{\alpha_0} . |z|^{\beta_0} = c_0, \quad (c_0 \neq 0)$$

y sobre la hipérbola dos puntos de K: $P_0 = (a, b)$, $Q_0 = (c, d)$; $a, b, c, d \neq 0$; que no pudieron ser unidos mediante una curva consistente sólo de puntos comunes a S_0 y K. Como en la «vecindad» de S_0 existe una infinidad continua de hipérbolas con la misma propiedad, podemos suponer que α_0 y β_0 sean números racionales, y luego que sean enteros y sin divisor común.

Análogamente como en la demostración del teorema (1), se deduce que entre las hipérbolas

$$(S(t)) \qquad |w|^{\alpha_0} . |z|^{\beta_0} = c(t), \quad c(0) = c_0, \quad 0 \leqq t \leqq A$$

existe por lo menos una posición límite S_1 para $t = t_1$ con estas dos propiedades:

1) Existen dos números positivos r_1, r_2 con $r_1 < r_2$ tales que

$$|w|^{\alpha_0} . |z|^{\beta_0} = c(t_1) = c_1, \quad |z| = r_1 \quad \text{y} \quad |z| = r_2$$

comprendan sólo puntos interiores, pero que

$$|w|^{\alpha_0} . |z|^{\beta_0} = c_1, \quad r_1 < |z| < r_2$$

comprenda por lo menos un punto-contorno de K.

2) Existe un $\varepsilon > 0$ tal que los trozos de hipersuperficies

$$|w|^{\alpha_0} . |z|^{\beta_0} = c(t), \quad r_1 \leqq |z| \leqq r_2, \quad t_1 < t < t_1 + \varepsilon$$

consistan únicamente de puntos internos de K.

En S escogemos una superficie analítica, por ejemplo la superficie

$$(\mathrm{F}) \qquad w^{\alpha_0} z^{\beta_0} = c_1.$$

F es una superficie algébrica irreductible y es cortada por un hiperplano $|z| = r \ (r \neq 0)$ en una curva:

$$(\mathrm{C}_r) \qquad w = a e^{-\frac{\beta_0}{\alpha_0} i\vartheta} \quad , \quad z = r e^{i\vartheta} \quad , \quad 0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi\alpha_0.$$

El recinto bidimensional

$$w^{\alpha_0} z^{\beta_0} = c_1, \quad r_1 < |z| < r_2$$

contiene por lo menos un punto-contorno de K, mientras que en los recintos

$$w^{\alpha_0} z^{\beta_0} = c_1, \quad |z| = r_1 \quad \text{y} \quad |z| = r_2$$

y en

$$(4) \qquad w^{\alpha_0} z^{\beta_0} = c(t), \quad r_1 \leqq |z| \leqq r_2, \quad t_1 < t < t_1 + \varepsilon$$

sólo yacen puntos internos de K.

Consideremos ahora la transformación

$$(T) \quad W = w^{\alpha_0} z^{\beta_0} - c_1, \quad Z = z^{\frac{1}{\alpha_0}},$$

que, para ε suficientemente pequeño, transforma biunivoca— y analíticamente los trozos (4) en los trozos *planos*

$$W = c(t) - c_1, \quad r_1^{\frac{1}{\alpha_0}} \leqq |Z| \leqq r_2^{\frac{1}{\alpha_0}}, \quad t_1 < t < t_1 + \varepsilon$$

y, en particular, el pedazo de F:

$$w^{\alpha_0} z^{\beta_0} = c_1, \quad 0 < r_1 \leqq |z| \leqq r_2$$

en un pedazo del plano $W=0$. Las curvas C_r se transforman en circunferencias:

$$W=\tilde{a}, \quad Z=\rho e^{i\varphi}, \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \qquad \left(\varphi=\frac{\vartheta}{\alpha_0}\right)$$

y, viceversa, tales circunferencias se convierten por la transformación inversa T^{-1} en curvas del tipo C_r.

Si $f(w,z)$ es una función cuyo dominio de meromorfía es K, entonces la función transformada $F(W,Z)$ es meromorfa en todos los puntos de

$$W=0, \quad |Z|=r_1^{\frac{1}{\alpha_0}}, \quad |Z|=r_2^{\frac{1}{\alpha^0}}$$

y de

$$W=c(t)-c_1, \quad r_1^{\frac{1}{\alpha_0}} \leqq |Z| \leqq r_2^{\frac{1}{\alpha_0}}, \quad t_1<t<t_1+\varepsilon$$

pero tiene por lo menos un punto singular en

$$W=0, \quad r_1^{\frac{1}{\alpha_0}}<|Z|<r_2^{\frac{1}{\alpha_0}},$$

en contradicción con el Teorema de Continuidad. *L.Q.Q.D.*

Demostremos luego la inversión del teorema 2:

Teorema 3. *Un dominio convexo-hiperbólico de Reinhardt* K *(propio o impropio) es un dominio de regularidad* (y, por lo tanto, también un dominio de meromorfía).

Según la hipótesis, existe por cualquier punto-contorno $Q(a,b)$, $a,b \neq 0$, una hipérbola $|w|^{\alpha_0}.|z|^{\beta_0}=C\ (\neq 0)$ que no tiene punto interno común con K. K yace totalmente a un lado de la hipérbola, por ejemplo al lado: $|w|^{\alpha_0}.|z|^{\beta_0}<C$. Podemos elegir entonces hipérbolas con α_0, β_0 racionales, y con esto también enteros: $\alpha_0=p, \beta_0=q$; tales que la hipérbola $|w|^p.|z|^q=\tilde{C}$ quede afuera de K pero que tenga puntos comunes con un entorno U(Q), por pequeño que se elija dicho entorno. Por consiguiente, la función

$$F_{p,q}(w,z)=\frac{1}{w^p z^q-\tilde{C}e^{i\vartheta_0}}$$

es analítica en K, pero tiene para $p, q, \widetilde{C}, \vartheta_0$ convenientemente elegidos, puntos singulares en un entorno arbitrariamente dado de Q por pequeño que se lo elija. Q es, por lo tanto, punto-contorno de H (K) (Regularitätshülle de K).

Los puntos-contornos de K que yacen eventualmente en un plano de simetría, o son puntos de acumulación de los anteriores puntos-contornos $Q(a, b)$ con $a, b \neq 0$, o en el caso de que el plano $z = 0$ ($w = 0$ respectivamente) no comprenda puntos internos de K, son puntos singulares de la función $f = \frac{1}{z}$ (o $\frac{1}{w}$ respectivamente).

Está así demostrado que K es idéntico con H(K) y por consiguiente, que K es un dominio de regularidad. *L.Q.Q.D.*

Surgen inmediatamente las siguientes consecuencias:

Corolario. 1 *Condición necesaria y suficiente para que un dominio de Reinhardt* K *sea dominio de regularidad o dominio de meromorfía, es la de que* K *sea convexo-hiperbólico.*

Teorema 3.a *Un dominio de meromorfía de Reinhardt, propio o impropio, es siempre un dominio de regularidad.*

Por último:

Corolario 2. *La envolvente de regularidad, la envolvente de meromorfía y el dominio convexo-hiperbólico más pequeño envolvente de un dominio dado de Reinhardt son idénticos.*

§ 4. Solución general del "Problema de Levi" para dominios de Reinhardt

Es conocido [9] que un dominio pseudo-convexo y propio de Reinhardt cuya ecuación de *contorno tiene derivadas continuas de primero y segundo orden* es un dominio de regularidad. Pues, en este caso, la pseudo-convexidad del contorno implica que este satisface la «condición de Levi» $L(\varphi) \geqq 0$, y de ahí se sigue la convexidad-hiperbólica del contorno y viceversa.

Para obtener un resultado general ,sin imponer al contorno otra condición que la pseudo-convexidad, partimos de dos lemas auxiliares sobre hipersuperficies analíticas:

Lema 1. *Cuando* S *es una hipersuperficie analítica (con*

(9) Ver Behnke-Thullen, pág. 55.

parámetro real-analítico), dos superficies analíticas pertenecientes a S *no pueden tener común un punto ordinario de* S.

En efecto, sea la hipersuperficie dada

$$(\mathrm{S}) \qquad g(w, z; t) = 0$$

y sean $g_1(w, z) = 0$ y $g_2(w, z) = 0$ dos superficies analíticas pertenecientes a S que tengan — en contra de la afirmación del Lema — el punto P común, siendo P punto ordinario de S. Existe un entorno $\mathrm{U}(P)$ del P tal que S, dentro de $\mathrm{U}(P)$, puede ser transformada biunivoca— y analíticamente en un pedazo de hiper*plano* (10):

$$(\tilde{\mathrm{S}}) \qquad W = t, \quad -\varepsilon < t < +\varepsilon; \quad (\text{o sea } v = 0).$$

Podemos suponer, además, que P se trasmute en $(0, 0)$ y $g_1(w, z) = 0$ en $W = 0$. Sea $\tilde{g}_2(W, Z) = 0$ la transformada de $g_2(w, z) = 0$; siendo $\tilde{g}_2$ analítica en cierto entorno $\tilde{\mathrm{U}}(0, 0)$. Como los puntos comunes a dos superficies analíticas son aislados, existe un $r > 0$ tal que en

$$(5) \qquad W = 0, \quad |Z| = r$$

no existe punto común de $W = 0$ y $\tilde{g}_2(W, Z) = 0$. Aplicando ahora el teorema de continuidad al plano $W = 0$ y a la función $[\tilde{g}_2(W, Z)]^{-1}$, singular en $(0, 0)$ pero analítica en (5), se sigue que $[\tilde{g}_2(W, Z)]^{-1}$ tiene singularidades o sea $\tilde{g}_2(W, Z)$ tiene ceros en $\tilde{\mathrm{U}}(0, 0)$, a ambos lados de $\tilde{\mathrm{S}}$. Por consiguiente, la superficie $\tilde{g}_2(W, Z) = 0$ *no* pertenece a $\tilde{\mathrm{S}}$ y, por lo mismo, $g_2(w, z) = 0$ *no* pertenece a S. *L.Q.Q.D.*

Un resultado inmediato es el teorema demostrado por F. Severi (11):

(10) Ver, por ejemplo, É. Cartan: *"Sur la Géom. pseudoconf. des hypersurfaces de l'espace de deux variables compl."*. Ann. Mat. pura appl. IV, Tomo 11 (1932).

(11) Ver Severi: *"Contributi alla teoria delle funzioni biarmoniche"*. Mem. R. Accad. Italia, Vol. II, Mat. N. 5 (1931), p. 37.

Corolario *Las superficies analíticas pertenecientes a una hipersuperficie analítica* S *(con parámetro real-analítico) forman un único haz de superficies.* En otras palabras, cada superficie analítica que yace encima de S pertenece necesariamente al haz, unívocamente determinado.

El Lema (1) puede ser fácilmente ampliado:

Lema 2. *Sean dadas una hipersuperficie* S *con parámetro real-analítico y una superficie* F *que tenga con* S *el punto ordinario* P *común. Son posibles solamente dos casos:* F *yace en* S *o* F *posee dentro de cada entorno* $U(P)$ *puntos a ambos lados de* S.

En efecto, por P de S pasa una superficie analítica unívocamente determinada, sea F_0. Según lo anterior, o F es idéntica con F_0, o tiene puntos a ambos lados de S.

A continuación la demostración del teorema principal:

Teorema 5. *La pseudo-convexidad es condición necesaria y suficiente para que un dominio de Reinhardt, propio o impropio, sea dominio de regularidad y dominio de meromorfía.*

Si el dominio K de Reinhardt es dominio de regularidad o dominio de meromorfía, K es convexo-hiperbólico y, por lo tanto, también pseudo-convexo.

Falta, pues, demostrar que la condición de la pseudo-convexidad es *suficiente.*

Supongamos, para tal efecto, que el dominio dado de Reinhardt K *no* sea convexo-hiperbólico. Existe entonces ([12]), según la demostración del teorema 2, una hipérbola:

$$(S_1) \qquad |w|^{\alpha_0}.|z|^{\beta_0}=c_1 \qquad (\alpha_0, \beta_0 \text{ enteros})$$

con las dos propiedades indicadas en dicha demostración (conservamos las mismas denominaciones y símbolos).

Sea Q una de los puntos-contornos de K pertenecientes a

$$|w|^{\alpha_0}.|z|^{\beta_0}=c_1, \quad r_1<|z|<r_2.$$

Se puede elegir Q de tal manera que existe un ρ, $r_1<\rho<r_2$, tal que el trozo

$$(6) \qquad |w|^{\alpha_0}.|z|^{\beta_0}=c_1, \quad r_1 \leqq |z| < \rho$$

consista de puntos internos de K y que Q pertenezca a

([12]) La demostración de que K es *completo* se hace en forma análoga.

$$|w|^{\alpha_0} . |z|^{\beta_0} = c_1, \quad |z| = \rho$$

(esto quiere decir que en cada entorno de Q existen puntos internos de K sobre S_1). Sea ahora F una superficie analítica que pasa por Q. Según el corolario del lema (1) y el lema (2), o F es una superficie $w^{\alpha_0} z^{\beta_0} = c_1 e^{i\vartheta_0}$ perteneciente a S_1 — en este caso penetra en K en cualquier entorno de Q — o F tiene, asimismo en todo entorno de Q, puntos a ambos lados de S_1. Sea como sea, F penetra siempre en el dominio K, dentro de cualquier entorno de Q. En otras palabras, K *no* es pseudo-convexo en el punto Q.

Nuestra demostración nos asegura que un dominio de Reinhardt que es pseudo-convexo en todos sus puntos-contornos es también convexo-hiperbólico, y, por lo tanto, un dominio de regularidad (y de meromorfía). *L.Q.Q.D.*

De lo anterior se concluye la siguiente afirmación interesante:

Teorema 6. *Dado un dominio limitado pseudo-convexo* B *y dado en* B *a voluntad un punto interno* M, *entonces el más grande dominio de Reinhardt de centro* M *e interior todavía a* B, *es un dominio de regularidad.*

Sea K un dominio de Reinhard que cumple respecto al punto M la suposición del teorema; M tenga las coordenadas $(0, 0)$ — lo que no significa restricción de la generalidad — y sea $Q = (a, b)$ un punto-contorno de K. Con Q son también puntos-contornos los puntos $Q_{\vartheta,\varphi} = (ae^{i\vartheta}, be^{i\varphi})$, o $\leqq \vartheta, \varphi \leqq$ $\leqq 2\pi$, entre ellos por lo menos uno que a la vez es punto-contorno de B; sea este último Q_0. Según la hipótesis de la pseudo-convexidad de B, existe una superficie analítica $g(w, z) = 0$ que pasa por Q_0 y que dentro de un entorno $U(Q_0)$ no tiene puntos comunes con B y, por tanto, tampoco con K. Por consiguiente, K es pseudo-convexo en el punto Q_0. Pero, una rotación conveniente:

$$W = we^{i\vartheta_0}, \quad Z = ze^{i\varphi_0}$$

aplicada a la superficie $g(w, z) = 0$ nos enseña que K es pseudo-convexo también en el punto dado Q. Como Q ha sido elegido arbitrariamente, K es pseudo-convexo en todo punto-contorno y, por lo tanto, un dominio de regularidad. *L.Q.Q.D.*

Quito, 28 de Junio de 1945.