ABERRACION, EFECTO DOPPLER Y PRESION DE LUZ

por

José Würschmidt
Instituto de Física, Tucumán
(Recibido el 23 de abril de 1945)

Summary. — Aberration, Doppler effect and radiation pressure. Only the theory of relativity can explain the observed phenomena of aberration and Doppler effect. The problem of the reflexion of light by a mirror is closely connected with those phenomena. Studying the reflexion of a hypothetical corpuscular radiation we find general expressions for energy density and radiation pressure. In the case of small velocities we arrive at Newton's expressions, in the case of high velocities at Maxwell's. The known formulae represent particular cases of the obtained expressions. It is shown that the same problems can be investigated in the case of light in a material body of refraction index n. In all examined cases, radiation pressure is invariant under a Lorentz transformation.

I. *Bibliografía.*

El problema de la aberración de la luz ha sido objeto de una serie de publicaciones en las cuales los partidarios y los adversarios de la teoría de la relatividad han expresado sus respectivos puntos de vista.

Lenard (1), para quien no existe aquella teoría, ni en su conocido texto de física, subraya en 1924 el «carácter absoluto de la aberración», escribe en 1926 (2) que «el movimiento de la fuente luminosa no tiene influencia», y tampoco «un movimiento transversal del éter» («quergerichtete Aetherbewegung») o «el estado de reposo o de movimiento del éter con respecto al telescopio». Consecuente a sus ideas sobre éter y éter primitivo («Aether und Uraether») explica la aberración de la luz balísticamente (3) y declara que «la aberración de la luz de las estrellas fijas no es un fenómeno del movimiento relativo». Para confirmar su posición, aduce el caso de las dos componentes de una estrella doble que se mueven en dirección normal al rayo visual con velocidades de signo distinto; en este caso tendría que producirse aberración máxima para cada una de las componentes, si el efecto dependiera del movimiento relativo:

estrella - observador: las observaciones astronómicas no dan ningún indicio de tal efecto.

Tomaschek (4) aduce el ejemplo de una componente de una estrella doble que tiene la misma fase y velocidad que la Tierra: «para ella existe aberración»; por lo tanto según este autor, «este ejemplo excluye la explicación a base de la teoría de la relatividad»; también el astrónomo *Kopff* (5) destaca «las dificultades serias» que se oponen a la interpretación relativista. *Thirring* (6), en una observación al trabajo de *Tomaschek*, reemplaza la expresión: «movimiento relativo de la Tierra con respecto a aquellas estrellas fijas» por: «movimiento de la Tierra con respecto al cielo de las estrellas fijas», introduciendo así el sistema de referencia de la Mecánica clásica, y *Emden* (7) escribe textualmente: «La aberración se produce en el sentido de la relatividad no mediante el movimiento de la Tierra relativo a la estrella, sino por el movimiento de la Tierra relativo a sí misma». Ya no podemos entender nada, y en realidad no hubo más discusiones.

Las «dificultades serias» sin embargo no aparecen en las explicaciones usuales de la teoría de la relatividad. Se dice p. ej.: Un rayo luminoso de la velocidad c forma un ángulo ϑ con el eje (x) de un sistema de coordenadas S; moviéndose un observador con la velocidad u en la dirección de $(-x)$, es decir, considerando un sistema S', tendremos: (fig. 1)

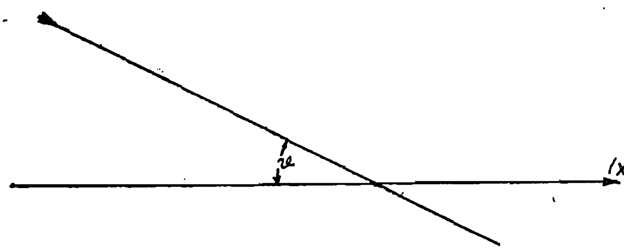

Fig. 1

$$(1,1) \qquad \cos\vartheta' = \frac{\cos\vartheta + \frac{u}{c}}{1 + \frac{u}{c}\cos\vartheta}$$

$$\operatorname{sen}\vartheta' = \frac{\operatorname{sen}\vartheta\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u}{c}\cos\vartheta}$$

Se deja sospechar al lector que en el sentido relativista se presentará el mismo ángulo ϑ', cuando el observador se halla en reposo y la fuente luminosa se acerca con la velocidad u. Generalmente en esta oportunidad se menciona, igualmente que en los textos de Física Experimental con su explicación balística de la aberración, el valor conocido de 20,5" que corresponde a la incidencia normal y a la velocidad $u = 30$ km/seg de la Tierra en su órbita alrededor del Sol, sin considerar mayormente el sistema de referencia.

Algo parecido sucede en las explicaciones del conocido *efecto Doppler,* según que las damos de acuerdo con la Física clásica o con la relativista.

Haciendo coincidir las direcciones de la velocidad de la onda sonora — pues se presenta el efecto en Acústica — y del observador que se acerca, encontramos, siendo u la velocidad del observador, v la del sonido y ν la frecuencia:

$$\nu_1 = \nu \left(1 + \frac{u}{v}\right). \tag{1,2}$$

En el segundo caso: observador en reposo, fuente luminosa o sonora se acerca con la velocidad u, se obtiene:

$$\nu_2 = \frac{\nu}{1 - \frac{u}{v}}. \tag{1,3}$$

El hecho de que para v grande con respecto a u las dos frecuencias casi son las mismas, no altera el otro hecho de que en el primer caso el efecto es *subjetivo,* es decir, existe para el observador quien, acercándose, recibe un mayor número de golpes en su oído, mientras que en el segundo caso existe un cambio *objetivo* en la onda misma: delante del emisor las longitudes de onda han disminuído, y por eso se observa la frecuencia mayor.

Por otra parte, es conocido que en la interpretación relativista generalmente no se suele considerar el caso acústico, sino el óptico, con la velocidad c; ambos casos dan:

$$\nu' = \nu \sqrt{\frac{1 + \frac{u}{c}}{1 - \frac{u}{c}}} \tag{1,4}$$

o considerando que el rayo incidente forme el ángulo ϑ con (x) y que la fuente luminosa se acerque con la velocidad u, se obtiene:

$$(1{,}5) \qquad \nu' = \nu \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1-\frac{u}{c}\cos\vartheta}.$$

O también, para conseguir simultáneamente la expresión para la aberración y el efecto Doppler, se procede, como sigue (procedimiento de *Schaefer* (8), simplificado).

En el sistema S del emisor la fase de la onda luminosa que incide, formando el ángulo ϑ con el eje (x) es (suprimimos el factor 2π):

$$\varphi = \nu\left[t - \frac{x\cos\vartheta + y\,\mathrm{sen}\vartheta}{c}\right];$$

significando $\beta = \frac{u}{c}$ y aplicando para el observador que se acerca con u la transformación de *Lorentz*, obtenemos:

$$\varphi = \nu'\left[t' - \frac{x'\cos\vartheta' + y'\,\mathrm{sen}\vartheta'}{c}\right]$$

si ponemos:

$$(1{,}6) \qquad \nu' = \nu \frac{1+\beta\cos\vartheta}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$(1{,}7) \qquad \frac{\cos\vartheta'}{c} = \frac{\cos\vartheta+\beta}{c+u\cos\vartheta}$$

$$\frac{\mathrm{sen}\vartheta'}{c} = \frac{\mathrm{sen}\vartheta\sqrt{1-\beta^2}}{c+u\cos\vartheta}.$$

Se ve que las dos ecuaciones (1,7) son idénticas con (1,1), mientras que la ecuación (1,6) es distinta de la (1,5). Sólo para $\vartheta = 0$ ambas expresiones se confunden con (1,4).

Lo dicho respecto de aberración y efecto Doppler se puede decir también del tercer concepto, de la presión de luz o de radiación en general: en Física Experimental se llega fácilmente a la expresión:

(1,8) $$p = 2\,D\cos^2\varphi$$

para la presión p que ejerce un haz de rayos paralelos que incide sobre un espejo bajo el ángulo φ, significando D la densidad de energía; en la teoría de la relatividad, interesa el caso del espejo móvil, y, aparte de los resultados dados en el libro, ya clásico de *Laue* (9), los varios investigadores llegaron a distintos valores, como enseña la bibliografía dada por *Ives* (10) en un trabajo publicado en 1942. Este autor llegó al resultado que una radiación de la velocidad c que incide normalmente sobre un espejo que se acerca, también normalmente, con la velocidad u ejerce la presión:

(1,9) $$p = 2\,D\,\frac{1+\beta}{1-\beta}$$

y menciona los valores encontrados por *Lorentz* y *Poynting-Abraham* respectivamente:

$$p = D$$
$$p = D\,(1+\beta)$$

para el caso de una superficie completamente absorbente, mientras que él encuentra en este caso, de acuerdo con (1,9):

$$p = D\,\frac{1+\beta}{1-\beta}.$$

Interesa su resultado que la presión de radiación (1,9) es invariante respecto de una transformación de Lorentz.

II. *Efecto Doppler y aberración.*

Para tratar el problema general, sea acústico, sea óptico, llamamos V la velocidad de la onda en su medio, sea la velocidad del sonido en el aire, sea la de la luz en el medio del índice de refracción $n = \frac{c}{V}$. Suponemos que el emisor se halle en gran distancia, es decir, que la onda pueda ser considerada como plana.

A. *Emisor y medio en reposo, observador se acerca.*

Eligiendo A como origen del sistema $S(x, y)$ (Fig. 2), la fase emitida en $t_1 = 0$ en A llegará a B ($AB = r$, ángulo con (x) sea ϑ), en $t_2 = \frac{V}{r}$. La fase emitida en A en el momento τ_0 llegará a B en el momento $t_2 + \tau_0$, a un observador

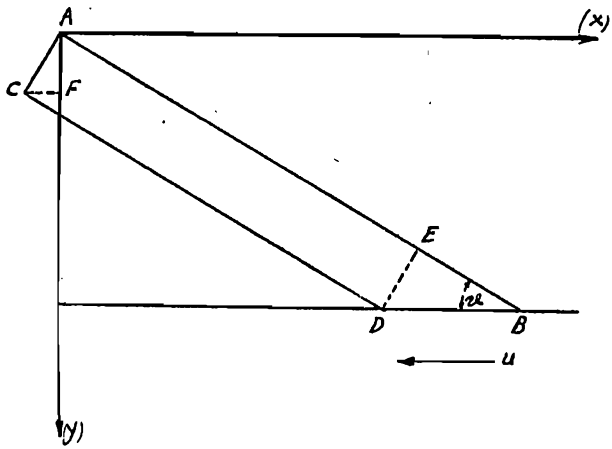

Fig. 2

que se mueve con la velocidad u hacia la izquierda no llegará; él recibirá la fase emitida por un punto C del plano de ondas, en el momento t_4.

Tenemos:

$$BD = u(t_4 - t_2) = u\tau$$
$$BE = u\tau\cos\vartheta$$
$$DE = u\tau\operatorname{sen}\vartheta$$

y así para las coordenadas de los 4 puntos A, B, C, D:

A: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, $t_1 = 0$

B: $x_2 = r\cos\vartheta$, $y_2 = r\operatorname{sen}\vartheta$, $t_2 = \frac{r}{V}$

C: $x_3 = -u\tau\operatorname{sen}^2\vartheta$, $y_3 = u\tau\operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta$, $t_3 = \tau_0$

D: $x_4 = r\cos\vartheta - u\tau$, $y_4 = r\operatorname{sen}\vartheta$, $t_4 = \tau_0 + \frac{r - u\tau\cos\vartheta}{V}$

Y resulta:

$$\tau = \frac{\tau_0}{1+\frac{u}{c}\cos\vartheta}, \tag{2,1}$$

es decir, hemos encontrado el efecto *D. clásico* o *según el cálculo* de *S*.

Resultará el efecto según el cálculo de *S'*, si aplicamos a los cuatro puntos la transformación de *Lorentz*:

$$x' = \frac{x+ut}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad \text{etc.}$$

Se obtiene fácilmente:

$$\tau' = \tau_0 \frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u}{v}\cos\vartheta}, \tag{2,2}$$

es decir, la expresión (1,6) para la frecuencia. Y para la velocidad de propagación de la fase se halla:

$$V'\cos\vartheta' = \frac{V\cos\vartheta+u}{1+\frac{uV}{c^2}\cos\vartheta} \tag{2,3}$$

$$V'\operatorname{sen}\vartheta' = \frac{V\operatorname{sen}\vartheta\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{uV}{c}\cos\vartheta}.$$

Comp. la Fig. 3: los puntos B' y D' coinciden en S'; C' está situado en $A'B'$ que forma con (x') el ángulo ϑ'.

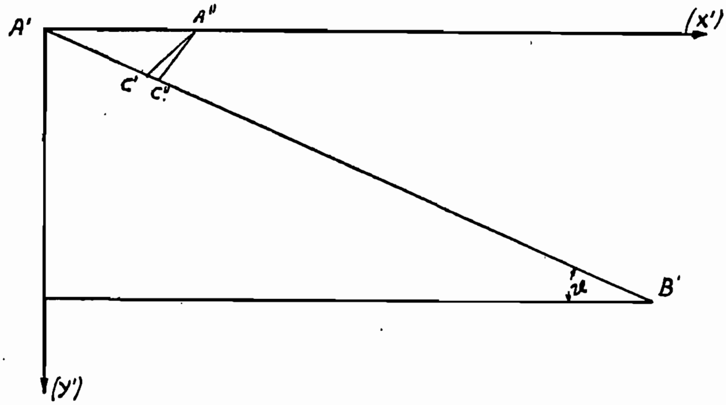

Fig. 3

Se debe observar además lo siguiente: mientras que en S los puntos A y C pertenecen al frente de ondas (los sucesos son simultáneos), no es así para los puntos A'' y C' (los sucesos en A'' y en C' no son simultáneos). El suceso simultáneo al suceso de A'' corresponde al punto C''; significando C' C'' el camino que recorrió la fase con su velocidad V' en el intervalo de tiempo correspondiente. El cálculo da que el frente de ondas en S' forma con el eje (y') un ángulo ϑ'', menor que el ángulo ϑ, pero mayor que ϑ', siendo:

$$\operatorname{tg} \vartheta'' = \frac{\operatorname{sen}\vartheta \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{\cos\vartheta + \frac{u V}{c^2}}, \tag{2,4}$$

es decir, el frente de ondas forma con (y') el ángulo ϑ''. En realidad, aplicando a la ecuación del frente de ondas en S la transformación de *Lorentz,* es decir, poniendo en:

$$x \cos \vartheta + y \operatorname{sen} \vartheta - v\, t = 0$$

$$x = \frac{x'-ut'}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad \text{etc.,}$$

resultará:

$$x' - \cos \vartheta'' + y' \operatorname{sen} \vartheta'' - v''\, t' = 0,$$

si ponemos:

$$\frac{1}{V''} \cos \vartheta'' = \frac{\cos\vartheta + \frac{u V}{c^2}}{V+u \cos\vartheta} \tag{2,5}$$

$$\frac{1}{V''} \operatorname{sen} \vartheta'' = \frac{\operatorname{sen}\vartheta \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{V+u \cos\vartheta},$$

o usando directamente la expresión para la fase en S:

$$\Phi = \nu_0 \left[t - \frac{x \cos\vartheta + y \operatorname{sen}\vartheta}{V} \right]$$

y aplicando la $T.$ de $L.$, obtenemos:

$$\Phi = \nu' \left[t' - \frac{y' \cos\vartheta'' + y' \operatorname{sen}\vartheta''}{V''} \right]$$

siendo:

$$\text{(2,2)} \qquad \nu'' = \nu_0 \frac{1 + \frac{u}{V}\cos\vartheta}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$\text{(2,5)} \qquad \frac{1}{V''}\cos\vartheta'' = \frac{\cos\vartheta + \frac{uV}{c^2}}{V+u\cos\vartheta}$$

$$\frac{1}{V''}\operatorname{sen}\vartheta'' = \frac{\operatorname{sen}\vartheta\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{V+u\cos\vartheta}$$

Así la ecuación (2,2), en la cual escribimos lógicamente ν'' en vez de ν', representa el efecto Doppler, las ecuaciones (2,5) dan la velocidad y el ángulo de incidencia en el sistema S', interpretándose con *Schaefer* como dirección de un rayo de luz la de la normal a su plano de ondas y como velocidad aquella con la cual se propaga este plano o frente de ondas. Se demuestra fácilmente también que:

$$\text{(2,6)} \qquad V'' = V' \cos(\vartheta'' - \vartheta').$$

Mencionamos entre paréntesis el caso clásico: mediante la transformación de *Galileo* obtenemos la fase en S':

$$\Phi = \nu''\left[t' - \frac{y'\cos\vartheta'' + y'\operatorname{sen}\vartheta''}{V''}\right]$$

siendo

$$\nu'' = \nu_0\left(1 + \frac{V}{u}\cos\vartheta\right)$$

$$\frac{1}{V''}\operatorname{sen}\vartheta'' = \frac{\cos\vartheta}{V+u\cos\vartheta}$$

$$\frac{1}{V''}\operatorname{sen}\vartheta'' = \frac{\operatorname{sen}\vartheta}{V+u\cos\vartheta};$$

se ve que resulta el efecto Doppler clásico (2,1); además que:

$$V'' = V + u\cos\vartheta \qquad \vartheta'' = \vartheta,$$

mientras que la velocidad con la cual se propaga la fase se calcula mediante:

$$V' \cos \vartheta' = V \cos \vartheta + u$$
$$V' \operatorname{sen} \vartheta' = V \operatorname{sen} \vartheta.$$

Y se verifica la ecuación (2,6):

$$V'' = V \cos (\vartheta - \vartheta').$$

Definiéndose como ángulo de aberración el ángulo entre la nueva y la primitiva dirección del rayo, en la Física clásica no hay aberración de la luz!

B. *Caso general.* El medio S^0 se halla en reposo; en él la luz tiene la velocidad $V^0 = V_0$ y el rayo incide bajo el ángulo ϑ^0 con el eje (x^0). El emisor se aleja con la velocidad v (hacia la izquierda, el observador se acerca con la velocidad u, como antes. Sistema del emisor: S, sistema del observador S'.

Escribiendo en el medio S^0 la fase:

$$\Phi = \nu^0 \left[t^0 - \frac{x^0 \cos\vartheta^0 + y^0 \operatorname{sen}\vartheta^0}{V_0} \right],$$

transformamos con *Lorentz* al sistema S y obtenemos:

$$\Phi = \nu_0 \left[t - \frac{x \cos\vartheta + y \operatorname{sen}\vartheta}{V} \right],$$

poniendo:

$$\nu^0 = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{V_0} \cos\vartheta} \tag{2,7}$$

$$\frac{1}{V} \cos \vartheta = \frac{\cos\vartheta^0 + \frac{v V_0}{c^2}}{V_0 + v \cos\vartheta^0} \tag{2,8}$$

$$\frac{1}{V} \operatorname{sen} \vartheta = \frac{\operatorname{sen}\vartheta^0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{V_0 + v \cos\vartheta^0}.$$

Se ve que (2,7) representa el efecto Doppler que se observa en el sistema S^0, y es él de la fórmula (1,6), por lo tanto podemos escribir la fase en S^0 también

$$\phi = \nu_0 \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1+\frac{v}{V_0}\cos\vartheta^0}\left[t^0 - \frac{x^0\cos\vartheta^0+y^0\operatorname{sen}\vartheta^0}{V_0}\right]$$

y transformando ahora a S', como arriba, tendremos:

$$\phi = \nu''\left[t' - \frac{x'\cos\vartheta''+y'\operatorname{sen}\vartheta''}{V''}\right],$$

si ponemos:

$$\nu'' = \nu_0 \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\,\frac{1+\frac{v}{V_0}\cos\vartheta^0}{1+\frac{v}{V_0}\cos\vartheta^0} \tag{2,9}$$

$$\frac{1}{V''}\cos\vartheta'' = \frac{\cos\vartheta^0+\frac{uV_0}{c^2}}{V_0+u\cos\vartheta^0} \tag{2,10}$$

$$\frac{1}{V''}\operatorname{sen}\vartheta = \frac{\operatorname{sen}\vartheta^0\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{V_0+u\cos\vartheta^0}$$

El efecto Doppler de (2,9) depende prácticamente de la diferencia entre u y v, la aberración de (2,10) de la velocidad u relativa al sistema S^0.

Ahora bien, para la luz en el vacío tenemos $V_0 = c$, y también en los sistemas S y S' la velocidad de la luz será c. Las fórmulas se simplifican:

$$\nu'' = \nu_0 \frac{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\,\frac{1+\frac{u}{c}\cos\vartheta^0}{1+\frac{v}{c}\cos\vartheta^0} \tag{2,11}$$

$$\cos\vartheta'' = \frac{\cos\vartheta^0+\frac{u}{c}}{1+\frac{u}{c}\cos\vartheta^0} \tag{2,12}$$

$$\operatorname{sen} \vartheta = \frac{\operatorname{sen}\vartheta^0 \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{u}{c}\cos\vartheta^0}$$

Podemos elegir también en vez del sistema S^0 cualquier otro sistema $\overline{S}$ que se mueve con respecto a S^0 con la velocidad W; entonces S tendrá relativo a $\overline{S}$ la velocidad $V=[v-W]$, y S' la velocidad $U=[u-W]$, significando los corchetes las diferencias relativistas.

Entonces tendremos:

$$\cos\overline{\vartheta} = \frac{\cos\vartheta^0 + \frac{W}{c}}{1+\frac{W}{c}\cos\vartheta^0} \quad \text{etc.}$$

o también:

$$\cos\overline{\vartheta}^0 = \frac{\cos\overline{\vartheta} - \frac{W}{c}}{1-\frac{W}{c}\cos\overline{\vartheta}} \quad \text{etc.}$$

$$u = \frac{U+W}{1+\frac{UW}{c^2}}$$

$$v = \frac{V+W}{1+\frac{VW}{c^2}}$$

Reemplazando estos valores en las ecuaciones (2,11) y (2,12), obtenemos:

$$(2{,}13) \qquad \nu'' = \nu_0 \frac{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}} \; \frac{1+\frac{U}{c}\cos\overline{\vartheta}}{1+\frac{V}{c}\cos\overline{\vartheta}}$$

$$(2{,}14) \qquad \cos\vartheta'' = \frac{\cos\overline{\vartheta} + \frac{U}{c}}{1+\frac{U}{c}\cos\overline{\vartheta}}$$

$$\operatorname{sen}\vartheta'' = \frac{\operatorname{sen}\overline{\vartheta}\sqrt{1-\frac{U^2}{c^2}}}{1+\frac{U}{c}\cos\overline{\vartheta}}$$

(2,13) enseña que el efecto Doppler siempre depende de la velocidad relativa: Estrella-Tierra (2.14), que la aberración de la velocidad de la Tierra relativa al sistema de referencia que es arbitrario; así la aberración queda incógnita; sólo los cambios de U pueden producir el cambio del ángulo de aberración, conocido. En especial, puede elegirse como sistema de referencia una estrella o también la Tierra; en el primer caso hay una aberración, pero desconocida, y el efecto Doppler que corresponde a u; si la estrella se mueve normal al rayo visual, él es igual a cero. En el segundo caso no hay aberración, pero después de medio año habrá aberración, teniendo entonces la Tierra la velocidad $2u$.

III. *Reflexión de una radiación en un espejo móvil.*

Es claro que el problema implica el cálculo de la energía y del volumen, y por lo tanto de la densidad de energía de una radiación dada antes y después de la reflexión en un espejo móvil; conociendo esas magnitudes resultará también la presión de la radiación sobre el espejo y también sobre un cuerpo absorbente.

Conocido es que mediante el principio de *Fermat* se llega fácilmente a la ley de reflexión de la luz en el vacío en un espejo móvil que da la teoría de la relatividad: teniendo el espejo la velocidad u_x en la dirección de la normal al espejo ($u_x = u \cos\chi$), se encontró, con $\frac{u_x}{c} = \beta_x$ la ley:

$$(3,1) \qquad \frac{1+\beta_x\cos\varphi}{\operatorname{sen}\varphi} = \frac{1-\beta_x\cos\bar{\varphi}}{\operatorname{sen}\bar{\varphi}},$$

idéntica con la ley de la relatividad especial:

$$(3,2) \qquad \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\bar{\varphi}}{2}} = \frac{1+\beta_x}{1-\beta_x}$$

φ significa el ángulo de incidencia, $\bar{\varphi}$ el ángulo de reflexión.

La ley (3,1), llamada ley de *Titow* (11), y (3,2), ley de *Laue* (12), son idénticas también con la forma de *Harnack* (13):

(3,3)
$$\operatorname{sen}\bar{\varphi}=\frac{1+2\beta_x\cos\varphi+\beta_x^2}{\operatorname{sen}\varphi(1-\beta_x^2)}$$

$$\cos\bar{\varphi}=\frac{\cos\varphi+2\beta_x+\beta_x^2\cos\varphi}{1+2\beta_x\cos\varphi+\beta_x^2}$$

Por otra parte, la ley de reflexión balística de una masa m en una pared móvil es:

(3,4)
$$\bar{v}\operatorname{sen}\bar{\varphi}=v\operatorname{sen}\varphi$$

$$\bar{v}\cos\bar{\varphi}=v\cos\varphi+2u_x$$

o también:

$$\bar{v}_y=v_y$$

$$\bar{v}_x=v_x+2u_x.$$

Admitiendo que la masa m sea la función conocida de la masa de reposo m_0 y de la velocidad v, demostré ([14]) en 1942 que todas las formas mencionadas son nada más que casos especiales de la siguiente ley de reflexión:

(3,5)
$$\bar{v}_y=\frac{v_y\left(1-\frac{u_x^2}{c^2}\right)}{1+\frac{2u_xv_x}{c^2}+\frac{u_x^2}{c^2}}$$

$$\bar{v}_x=\frac{v_x+2u_x+v_x\frac{u_x^2}{c^2}}{1+\frac{2u_xv_x}{c^2}+\frac{u_x^2}{c^2}};$$

la ley para la luz es el caso especial del fotón de la velocidad c y de la masa de reposo igual a cero, la ley balística resulta inmediatamente, despreciando los términos con el cuadrado de c.

A. *Reflexión de una radiación corpuscular en el espejo móvil.*

Suponemos que en el momento $t=0$ sean emitidos por la superficie S (sección de S con el plano de dibujo: AE) o pasen por la misma pequeños cuerpos de la velocidad v que después de haber recorrido el camino l inciden sobre el espejo móvil, además que en este momento sea suspendida la emisión en S. La partícula de A ha llegado en B, donde empieza su reflexión bajo el ángulo $\bar{\varphi}$. Se busca ahora el tiempo

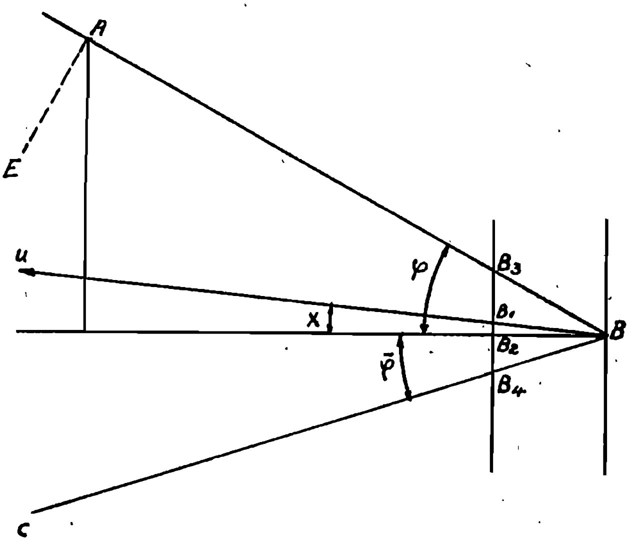

Fig. 4

t_1, en el cual ha llegado la última partícula emitida en A al espejo que por su parte se hallará en la posición $B_3 B_2 B_1 B_4$.

Así tendremos que en el momento $t_0 = \frac{l}{v}$ la «cabeza» de la radiación corpuscular se halla en B, su terminación en A; después del tiempo $t_0 + t_1$ la cabeza está en C, la terminación en B_3.

Por una consideración especial se investiga cómo el frente de la radiación (antes AE) está orientado después de la reflexión (Fig. 5). Se ve en la figura la nueva orientación del frente: en el tiempo en que la partícula emitida en E simultáneamente con la emitida en A, recorre el camino FH que le falta para llegar al espejo, la que estaba en B ha marchado con la velocidad $\bar{v}$ bajo el ángulo $\bar{\varphi}$ hacia J; así el nuevo frente será JH. Calculando el ángulo $\bar{\bar{\varphi}}$ que forma JH con el espejo o el eje (y), se encuentra; poniendo $AE = r, JH = \bar{r}$:

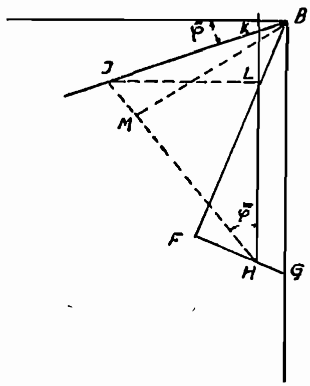

Fig. 5

$$\bar{r}\,\text{sen}\,\bar{\bar{\varphi}} = r\,\text{sen}\,\varphi\,\frac{1-\frac{u_x^2}{c^2}}{1+\frac{2u_xv_x}{c^2}+\frac{u_x^2}{c^2}}$$

$$\bar{r}\cos\bar{\bar{\varphi}} = \frac{r}{\cos\varphi}\left[1-\text{sen}^2\,\varphi\,\frac{1+\frac{u_x^2}{c^2}}{1+\frac{2u_xv_x}{c^2}+\frac{u_x^2}{c^2}}\right]$$

o también:

$$\text{tg}\,\bar{\bar{\varphi}} = \frac{v_y\left(1-\frac{u_x^2}{c^2}\right)}{v_x+2u_x\frac{v^2}{c^2}+v_x\frac{u_x^2}{c^2}}$$

o llamando $\bar{\bar{v}}$ la velocidad de propagación del frente reflejado, resulta:

(3,6)
$$\frac{1}{\bar{\bar{v}}}\,\text{sen}\,\bar{\bar{\varphi}} = \frac{v_y\left(1-\frac{u_x^2}{c^2}\right)}{v^2+2u_xv_x+v^2\frac{u_x^2}{c^2}}$$

$$\frac{1}{\bar{\bar{v}}}\cos\bar{\bar{\varphi}} = \frac{v_x+2u_x\frac{v^2}{c^2}+v_x\frac{u_x^2}{c^2}}{v^2+2u_xv_x+v^2\frac{u_x^2}{c^2}}$$

Se encuentra así que la nueva superficie S se escribe:

(3,7)
$$\bar{S} = S\,\frac{\bar{v}}{v}\,\frac{\text{sen}\bar{\varphi}}{\text{sen}\bar{\bar{\varphi}}}$$

y que la radiación reflejada se halla en el cilindro con la bases $\overline{S}$ y se extiende de B_3 hacia C. Introduciendo $B_3 C = l^*$, y el ángulo φ^*, se puede calcular la nueva altura $\overline{l}$; y se halla:

(3,8) $$\overline{l} = l \frac{\operatorname{sen}\overline{\overline{\varphi}}}{\operatorname{sen}\varphi}.$$

Y por lo tanto el nuevo volumen es:

(3,9) $$\overline{V} = \overline{S}\,\overline{l} = V \frac{\overline{v} \operatorname{sen} \overline{\varphi}}{v \operatorname{sen} \varphi} = V \frac{1 - \frac{u_x^2}{c^2}}{1 + \frac{2 u_x v_x}{c^2} + \frac{u_x^2}{c^2}}.$$

Ahora conocemos también la masa $\overline{m}$ después de la reflexión que según el trabajo citado (15) es:

$$\overline{m} = m \frac{1 + \frac{2 u_x v_x}{c^2} + \frac{u_x^2}{c^2}}{1 - \frac{u_x^2}{c^2}}$$

y multiplicando por c^2, su energía: encontrándose en la radiación incidente N partículas en cada cm³, la energía total es:

$$W = N V m c^2$$

y después de la reflexión:

(3,10) $$\overline{W} = W \frac{1 + \frac{2 u_x v_x}{c^2} + \frac{u_x^2}{c^2}}{1 - \frac{u_x^2}{c^2}}$$

Siendo:

$$D = \frac{W}{V}$$

la densidad de energía primitiva, tendremos después:

(1) $$\overline{D} = D \left[\frac{1 + \frac{2 u_x v_x}{c^2} + \frac{u_x^2}{c^2}}{1 - \frac{u_x^2}{c^2}} \right]^2$$

Por fin se calcula mediante el impulso que recibe cada masa por el espejo, el impulso total recibido por el mismo:

$$\Delta J = \frac{2W}{c^2} \frac{u_x + v_x}{1 - \frac{u_x^2}{c^2}}$$

el tiempo t_1 después del cual ha terminado la reflexión, y la superficie $\frac{S}{\cos\varphi}$, sobre la cual incide la radiación, la presión p y encontramos:

$$\text{(II)} \qquad p = \frac{2D}{c^2} \frac{(u_x + v_x)^2}{1 - \frac{u_x^2}{c^2}}$$

En estas dos fórmulas (I) y (II) están comprendidas todos los casos especiales para materia y luz en el vacío. En primer caso límite, de velocidades pequeñas, se debe interpretar la energía como energía cinética de los corpúsculos y se llegará a la expresión:

$$p = \frac{4D}{v^2}(u_x + v_x)^2 \quad \text{(presión newtoniana)}$$

que para el caso de reposo del espejo dará:

$$\text{(1,8)} \qquad p = 4\,D \cos^2 \varphi.$$

Además en este caso el volumen no cambia en la reflexión.

En el segundo caso de fotones $(v = c)$, resultará

$$\text{(1a)} \qquad \bar{D} = D \left[\frac{1 + \frac{2u_x}{c} \cos\varphi + \frac{u_x^2}{c^2}}{1 - \frac{u_x^2}{c^2}} \right]^2$$

y:

$$\text{(IIa)} \qquad p = \frac{2D}{c^2} \frac{(u_x + c\cos\varphi)^2}{1 - \frac{u_x^2}{c^2}}$$

$$= 2\,D \frac{(\cos\varphi + \frac{u_x}{c})^2}{1 - \frac{u_x^2}{c^2}}$$

Para el espejo en reposo resulta:

$$p=2\,D\cos^2\varphi \quad \text{(presión maxwelliana)}.$$

Las fórmulas (Ia) y (IIa) comprenden como casos especiales de incidencia normal ($\varphi=0$) y movimiento del espejo en su normal de incidencia ($\chi=0$) las expresiones encontradas en 1942 por *Ives.*

Una consideración de los sucesos en el sistema del espejo mismo, es decir en el sistema S', dará las fórmulas correspondientes para la velocidad v'' y el ángulo ϑ'' del frente que ya conocemos en la primera parte como velocidad de la luz en S' (2,5):

$$\frac{1}{v''}\operatorname{sen}\vartheta''=\frac{\cos\vartheta+\frac{uV}{c^2}}{v+u\cos\vartheta} \tag{3,11}$$

$$\frac{1}{v''}\cos\vartheta''=\frac{\operatorname{sen}\vartheta\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{v+u\cos\vartheta}$$

Fórmula que corresponde a (3,6).

Para la energía en S' se halla:

$$W'=W\,\frac{1+\frac{uV}{c^2}\cos\vartheta}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{3,12}$$

y el volumen:

$$V'=V\,\frac{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}{1+\frac{uV}{c^2}\cos\vartheta} \tag{3,13}$$

Y por lo tanto la densidad de energía es:

$$D'=D\,\frac{\left(1+\frac{u^2}{c^2}\cos\vartheta\right)^2}{1-\frac{u^2}{c^2}} \tag{3,14}$$

y la presión de radiación:

$$p'=2\,D'\,\frac{v'^2}{c^2}\cos^2\phi'. \tag{3,15}$$

Es claro que en el sistema S' se encontrará igualdad de los ángulos de incidencia y reflexión de la radiación y la misma velocidad v'; las fórmulas para la velocidad v' y los ángulos deben ser las deducidas en el trabajo citado que consideran que en el sistema S' la normal de incidencia no es la misma que en S.

Finalmente se puede demostrar fácilmente que también en nuestro caso la presión de radiación es invariante, reemplazando en (3,15) el valor *de* D' y de $v' \cos \phi'$.

Ahora bien, para tratar el problema de la luz que se mueve en un medio del índice de refracción n con una velocidad $V_0 = \frac{c}{n}$, me limitaré en dar en pocas palabras los resultados:

B. *Reflexión de luz de la velocidad V en su medio en el espejo móvil.*

1. Definiendo como velocidad de la luz la velocidad de propagación del frente de ondas, se llega, para la velocidad de la luz reflejada, exactamente a las mismas fórmulas (3,6) que correspondían al frente de partículas.

2. La energía de la luz reflejada, será, de acuerdo con las consideraciones sobre el efecto Doppler de la Primera Parte:

$$\overline{\overline{W}} = W \frac{1 + \frac{2 u_x v_x}{c^2} + \frac{u_x^2}{c^2}}{1 - \frac{u_x^2}{c^2}} \tag{3,16}$$

Por lo tanto se modifican las expresiones para densidad de energía, en la cual resulta el mismo volumen que en el caso de partículas, y para la presión de la radiación, resulta:

$$\overline{\overline{D}} = D \frac{\left(1 + \frac{2 u_x v_x}{c^2} + \frac{u_x^2}{c^2}\right)\left(1 + \frac{2 u_x v_x}{v^2} + \frac{u_x^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{u_x^2}{c^2}\right)^2} \tag{Ib}$$

$$\overline{\overline{p}} = \frac{2D}{c^2} \frac{(u_x + v_x)\left(\frac{c^2 v_x}{v^2} + u_x\right)}{1 - \frac{u_x^2}{c^2}} \tag{IIb}$$

3. En el sistema del espejo habíamos encontrado para la velocidad v' y el ángulo de incidencia ϕ'(16):

$$v'_{\nu'} = v' \cos \phi' = \frac{u_x + v_x}{1 + \frac{u_x v_x + u_y v_y}{c^2}} \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{u_x^2}{c^2}}}$$

$$v'_{\tau'} = v' \operatorname{sen} \phi' = \frac{v_y\left(1 - \frac{u_x^2}{c^2}\right) + u_y\left(1 + \frac{u_x v_x}{c^2}\right)}{1 + \frac{u_x v_x + u_y v_y}{c^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u_x^2}{c^2}}}$$

en el caso de partículas; ahora, en el caso de la luz que en S tiene la velocidad v, encontramos:

$$\frac{v''_{\nu'}}{v''^2} = \frac{1}{v''} \cos \phi'' = \frac{\frac{u_x}{c^2} + \frac{v_x}{v^2}}{1 + \frac{u_x v_x + u_y v_y}{v^2}} \frac{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{\sqrt{1 - \frac{u_x^2}{c^2}}} \tag{3,17}$$

$$\frac{v''_{\tau'}}{v''^2} = \frac{1}{v''} \operatorname{sen} \phi'' = \frac{\frac{v_x}{v^2}\left(1 - \frac{u_x^2}{c^2}\right) + \frac{u_x}{c^2}\left(1 + \frac{u_x v_x}{v^2}\right)}{\left(1 + \frac{u_x v_x + u_y v_y}{v^2}\right) \sqrt{1 - \frac{u_x^2}{c^2}}}$$

4. Suponiendo que el espejo esté en reposo en el medio del índice de refracción n, y que en el sistema del espejo rija la ley de reflexión ordinaria, se llegará a las mismas expresiones (3,17) mediante la transformación de Lorentz generalizada, aplicada a la fase.

5. Todos los resultados ganados están en acuerdo con la suposición de que el quantum de luz en el medio del índice de refracción n tiene:

la energía $h\nu$

y el impulso $\frac{h\nu}{v}$.

6. En el caso de una masa m que tiene el impulso mv las tres ecuaciones que corresponden a la conservación de las energía y del impulso (de las cuales debe eliminarse la fuerza F) no son suficientes para calcular la ley de reflexión en el espejo móvil, sino se necesita además la invariante con respecto a la transformación de Lorentz:

$$m\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\overline{m}\sqrt{1-\frac{\overline{v}^2}{c^2}}$$

que es la masa de reposo.

En el caso de un quantum $h\nu$ que tiene el impulso $\frac{h\nu}{v}$ resulta lo mismo; la invariante con respecto a la transformación de Lorentz es:

$$\frac{h\nu}{v^2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\frac{h\overline{\overline{\nu}}}{\overline{\overline{v}}}\sqrt{1-\frac{\overline{\overline{v}}^2}{c^2}}$$

cuyo significado ignoro.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

1) P. Lenard: *Ann. d. Phys.*, *73*, 89, 1924.
2) P. Lenard: *ZS f. techn. Phys.*, *6*, 561, 1925.
3) P. Lenard: *Deutsche Physik*, *III*, - Lehmann, München 1937, p. 18.
4) R. Tomaschek: *ZS f. Phys.*, *33*, 153, 1925.
5) A. Kopff: *Phys. ZS*, *23*, 255, 1922.
6) H. Thirring: *ZS f. Phys.*, *33*, 153, 1925.
7) H. Emden: *Naturw.*, *14*, 333, 1926.
8) C. Schaefer: *Einführung in die Theoretische Physik. III.* - Gruyter, Berlin und Leipzig, p. 842.
9) M. von Laue: *Die Relativitactstheorie*, *I.* - Vieweg, Braunschweig, 1921, p. 196.
10) Herbert E. Ives: *Journ. of the Opt. Soc. of Am.*, *32*, 32, 1942.
11) A. M. Titow: *ZS f. Phys.*, *33*, 306, 1925.
12) M. von Laue, 1, c., 127.
13) A. Harnack: *Ann. d. Phys.*, *39*, 1056.
14) José Würschmidt: *Rev. Mat. y Fís. Teór.*, Univ. Nac. de Tucumán, *3*, 79, 1942.
15) José Würschmidt, *l. c.*, 91.
16) José Würschmidt, *l. c.*, 101.