CONDICIONES DE APLICABILIDAD DE LA ECUACION DE DANIEL BERNOULLI (*)

por

NICOLÁS KRIVOSHEIN.

SUMMARY. — The conditions of applicability of the Daniel Bernoulli's equation to the movement of a perfect compressible fluid are discussed.

a) All that conditions may be deduced from the consideration of the vector-field $2\omega \wedge V$ (ω — angular velocity, V — linear velocity), taken from the equations of hydrodynamics in the Lamb-Gromeko form.

b) In the potential movement, stationary or not, the Daniel Bernoulli's equation holds in the whole space occupied by the fluid. For the stationary movement, it takes the classic form; for the non-stationary, the term $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ must be jointed to the left side.

c) In the stationary vortex-motion, the Daniel Bernoulli's equation in its classic form holds for each of the surfaces $E =$ Const, where grad $E = -2\omega \wedge V$; E is the specific energy or differs in a constant from it.

d) If the vortex-lines follow the stream-lines, the Daniel Bernoulli's equation holds in the whole space occupied by the fluid.

e) The case when vortex-lines and stream-lines form a right-angled network, adds nothing to the general case.

A condition for the possibility of such a movement are established, where from three special forms and one more general may be deduced.

f) Cases of applicability of the Daniel Bernoulli's equation to the non-stationary vortex motion are discussed, too. They are all of a very special character and of doubtfull use in practice.

But in the most general case, *always* may be witten an equation similar to the Daniel Bernoulli's, that holds on each one of the stream or vortex-lines.

It is shown that a temporal distortion (such as a solitary wave etc.) of a stationary motion, can produce a change in the distribution of the vortices, and whence, the motion after the passage of the wave etc., not always will remain stationary.

(*) Relatado en la sesión del Congreso de Matemática, Física y Astronomía, celebrado en Rosario el 21 de setiembre de 1945.

1. — *Exposición del problema.*

La ecuación de Daniel Bernoulli

$$\frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + + z = \text{const.} \qquad (1)$$

(donde: v = velocidad del fluido

g = aceleración terrestre

p = presión

γ = peso específico

z = altura del punto)

se usa en Hidráulica en esta forma (que se considera clásica) o en unas formas algo modificadas y se aplica exclusivamente a *puntos que se encuentran sobre el mismo filete.*

En los textos de Hidrodinámica se cita generalmente otro caso de aplicación de la misma ecuación: *cuando el movimiento es potencial, ella se aplica en toda la extensión del fluido* (*). Respecto al primer caso de aplicación, se impone entonces otra condición más: que el movimiento debe ser estacionario.

Resulta que estos no son los únicos casos de aplicabilidad de dicha ecuación, y que, aparte de eso, se puede extender el campo de sus aplicaciones variando la constante del segundo miembro.

De esto y de algunos detalles más, nos ocuparemos en la exposición que sigue.

Previamente es menester observar lo siguiente:

a) *Notaciones vectoriales*

Emplearemos las que usa el prof. Butty, con pequeñas modificaciones. En vez de las letras negritas usaremos los siguientes tipos:

Escalares: *a*, *A*; vectores a, A

Vector unitario ã; valor absoluto |a|

(*) Unicamente en la Hidráulica de Fordeheimer (traducción castellana de la 3ª edición alemana) hay mención de un caso algo más general. Véase más adelante.

Producto escalar $\mathrm{a} \times \mathrm{b}$

» vectorial $\mathrm{a} \wedge \mathrm{b}$

grad A, div A, rot A, $\nabla^2 A$ como de costumbre; $a \nabla b$ en vez de (a grad) b.

Las reglas de $\wedge$ y rot: *concordantes* con el sistema de coordenadas (en las figuras, izquierdas);

b) En lo sucesivo vamos a emplear el sistema absoluto de medidas, siendo $\rho = \dfrac{p}{g}$ la densidad del fluido;

c) Salvo casos especiales, vamos a tratar con fluido compresible, siendo entonces el trabajo específico (por unidad de masa) $P = \displaystyle\int \frac{dp}{\rho}$ en vez de $\dfrac{p}{\rho}$;

d) En vez del potencial $+gz$ de la gravedad pondremos $-\displaystyle\int^{s} \mathrm{R} \times \breve{\mathrm{v}}\, ds$ (R = fuerza específica, ds = elemento del filete); en el caso de fuerzas potenciales ($\mathrm{R} = -\mathrm{grad}\ U$) pondremos U;

e) El fluído consideraremos *perfecto* (sin viscosidad ni turbulencia).

2. — *Ecuación de Lamb y Gromeko.*

Una forma de las ecuaciones de hidrodinámica, deducida independientemente por varios autores (*), pero más conocida bajo estos dos nombres, es muy propicia para hacer investigaciones acerca del carácter de movimiento de los fluídos. Se la deduce fácilmente de las clásicas ecuaciones de Euler.

He aquí las ecuaciones de Lamb y Gromeko:

En forma analítica

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\frac{u^2+v^2+w^2}{2}+v\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)-w\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-X=0\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{u^2+v^2+w^2}{2}+w\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)-u\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-Y=0\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{u^2+v^2+w^2}{2}+u\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)-v\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-Z=0
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

(*) Apareció en la primera edición (1879) de Hidrodinámica de H. Lamb. I. S. Groméko (profesor de la Universidad de Kazañ) la dedujo en el año 1881 o siguientes. Luego sigue Minchin (1889). Véase A. Satkwich. Aerodinámica.

En forma vectorial

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{v^2}{2} + \operatorname{rot} \mathrm{v} \wedge \mathrm{v} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - \mathrm{R} = 0. \qquad (2')$$

Donde $\mathrm{v}(u, v, w)$ es la velocidad y $\mathrm{R}(X, Y, Z)$ la fuerza exterior.

En adelante usaremos $2\omega = \operatorname{rot} \mathrm{v}$ para indicar la doble velocidad angular de las partículas.

Significado físico de los términos.

$\dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial t}$ = variación del campo de velocidades con el tiempo (*)

$\dfrac{v^2}{2}$ = energía cinética específica (por unidad de masa)

$\operatorname{rot} \mathrm{v} \wedge \mathrm{v} = 2\omega \wedge \mathrm{v}$ = un vector que más adelante estudiaremos y que desempeña el papel principal en el fenómeno.

$\dfrac{1}{\rho} \operatorname{grad} p$ = empuje ejercido sobre el fluído por la diferencia de presiones.

R = empuje ejercido por las fuerzas exteriores (gravedad, etc.).

3. — *Vector* $2\omega \wedge \mathrm{v}$ *y su significado.*

Por la conocida propiedad del producto vectorial, este vector debe ser perpendicular tanto a v como a ω (fig. 1). Sucediendo

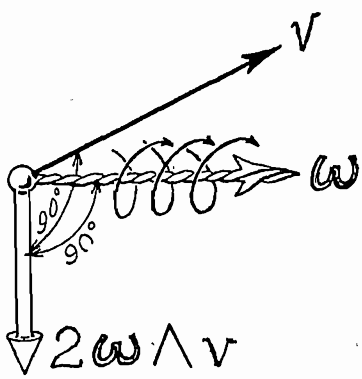


Fig. 1

(*) No es aceleración, la cual se expresa por $\dfrac{d\mathrm{v}}{dt} = \dfrac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} + \mathrm{v} \nabla \mathrm{v}$

así en todos los puntos del espacio ocupado por el fluído, deben los vectores $2\omega \wedge v$ formar un campo vectorial cuyas líneas son normales tanto a los filetes como a las líneas de vórtice.

Este campo en el caso general no es solenoidal, es decir div $(2\omega \wedge v) \neq 0$, lo que se comprueba por un ejemplo sencillo (fig. 2). En un chorro cilíndrico que se mueve a través de

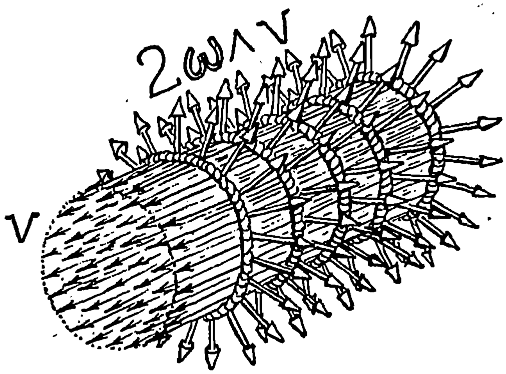


Fig. 2

un líquido en reposo, los vórtices forman una envoltura alrededor del chorro. Los vectores $2\omega \wedge v$ se dirigen entonces hacia afuera de dicha envoltura, siendo adentro (por el teorema de Gauss) div $(2\omega \wedge v) > 0$.

En un movimiento rectilíneo $2\omega \wedge v$ siempre se dirige *desde la región de velocidades grandes hacia la de velocidades menores.* Este hecho es de importancia y más adelante volveremos a analizarlo.

En el caso de un movimiento curvilíneo cuya velocidad *no* crece hacia el centro de curvatura de los filetes, $2\omega \wedge v$ se dirige como en la fig. 3, es decir, hacia aquel centro.

En las ecuaciones (2) o (2') los términos tienen la dimensión de *fuerza* específica (referida a la unidad de masa) (*). Por eso el vector $2\omega \wedge v$ debe también tener carácter de fuerza o por lo menos debe poder interpretarse como tal.

(*) La dimensión de la fuerza específica es igual a la de la aceleración.

$-\frac{\partial v}{\partial t}$ y $-\operatorname{grad}\frac{v^2}{2}$ son fuerzas de inercia.

$-\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p$ es la fuerza resultante debida a la desigualdad de las fuerzas interiores p;

R es la fuerza exterior.

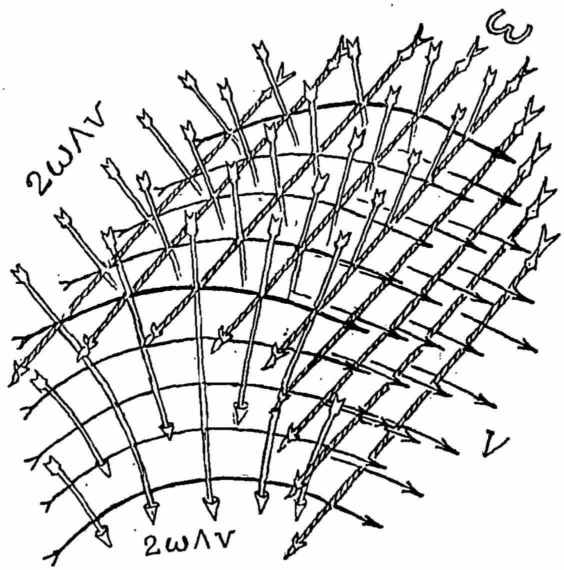


Fig. 3

Si se vuelve a seguir, paso a paso, la deducción de las ecuaciones de Lamb y Gromeko, se verá que $2\omega \wedge v$ es también una parte de las fuerzas de inercia. En efecto:

$$\frac{dv}{dt}+\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p-R=0 \tag{3}$$

(ecuación de Euler en forma resumida)

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial t}+v\nabla v \tag{4}$$

$\dfrac{dv}{dt}$ = aceleración total

$\dfrac{\partial v}{\partial t}$ = parte de la aceleración, debida a la variación del campo

$v \nabla v$ = parte debida al traslado de las partículas en el campo.

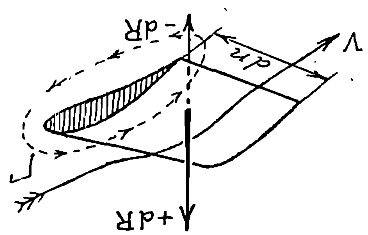
Luego, por la conocida fórmula vectorial:

$$v \nabla v = \operatorname{grad} \frac{v^2}{2} + \operatorname{rot} v \wedge v \tag{5}$$

descomponiéndose la segunda parte de la aceleración, a su vez, en dos partes, a saber: $\operatorname{grad} \dfrac{v^2}{2}$ — debida a la desigualdad de los *valores absolutos* de la velocidad (nótese que $v^2 = |v|^2$) en diferentes puntos; $\operatorname{rot} v \wedge v$ — debida a dos causas: 1) a la desigualdad de las direcciones de la velocidad y 2) a la parte de la desigualdad de los valores absolutos que distinguen el movimiento con vórtices del movimiento potencial.

De todo lo dicho se ve que $2\omega \wedge v = \operatorname{rot} v \wedge v$ tiene también el carácter de fuerza específica y que esta fuerza es debida a la presencia de los vórtices en el campo de velocidades. Llamaremos por eso dicho vector «*empuje de los vórtices*» (*) y atribuirémosle otro signo, como en las otras partes de la fuerza de inercia:

(*) Parece sorprendente la analogía de este empuje con el empuje de los vórtices adheridos a un cuerpo que se mueve en el fluído, y definido tal empuje por el teorema de Yukovsky $dR = \Gamma v\, dn$ (fig. a). Γ es la circulación alrededor del cuerpo. $+dR$ actúa sobre el cuerpo y $-dR$ sobre el fluído.



Pero esto es nada más que una analogía. 1) La fuerza $-dR$ de la fig. a es de otro signo que la fuerza Q de la fórmula (6). 2) Los vórtices adheridos al cuerpo se desplazan en el fluído, mientras que los vórtices verdaderos (ω) flotan con él (según el 2º teorema de Helmholtz).

$$\boxed{Q = -2\omega \wedge v} \tag{6}$$

En resumen puede decirse que *el movimiento del fluído se produce de tal manera como si sobre él actuara una fuerza adicional* $-2\omega \wedge v$ (*).

4. — *Caso cuando el movimiento puede permanecer poetncial.*

En el movimiento potencial $\omega = 0$ y por lo tanto $2\omega \wedge v = 0$; la ecuación (2′) se convierte entonces en

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \operatorname{grad} \frac{v^2}{2} + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p - R = 0. \tag{7}$$

Para que el movimiento *permanezca* potencial (y no solamente lo sea instantáneamente) es preciso que también $\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$.

Para cumplir esta condición hay que anular el rotor de (7):

$$2\frac{\partial \omega}{\partial t} + \operatorname{rot} \operatorname{grad} \frac{v^2}{2} + \frac{1}{\rho} \operatorname{rot} \operatorname{grad} p - \operatorname{rot} R = 0 \tag{8}$$

lo que conduce a

$$-R = \operatorname{grad} U \tag{10}$$

es decir que *las fuerzas exteriores deben tener potencial* (teorema de Lagrange).

Siendo muy raros los casos cuando R carezca de potencial (**) vamos a limitar nuestra consideración al caso de fuer-

---

(*) Nótese otra analogía: con la aceleración de Cariolis. Aquella es igual a $2\omega \wedge v$ donde ω es la velocidad angular del movimiento de arrastre y v, la velocidad relativa (aquí es al revés). Hay por eso una plena coincidencia de las fórmulas, pero el signo de la fuerza de inercia es otro.

(**) Por ejemplo, fuerzas electromagnéticas. Las fuerzas de gravedad en un fluído heterogéneo (termosifón, etc.) representan un caso distinto: el teorema de Lagrange tampoco vale pero por otra causa ($\rho \neq f(p)$).

zas potenciales, tanto para el movimiento potencial como también para el de vórtices. Se impone pues que

$$-\mathrm{R}\,\mathrm{grad}\,U \tag{10}$$

donde U es el potencial de las fuerzas exteriores.

Teniendo también en cuenta lo dicho en 1, b) se transforma la (7) en

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} + \mathrm{grad}\left(\frac{\mathrm{v}^2}{2} + P + U\right) = 0 \tag{11}$$

La expresión entre paréntesis es la energía específica total del fluído, a saber:

$\frac{\mathrm{v}^2}{2} =$ energía cinética

$P =$ energía de presión

$U =$ energía de las fuerzas exteriores.

Ahora podemos establecer las condiciones de aplicabilidad de la ecuación de Daniel Bernoulli para este caso.

a) Si el movimiento es *estacionario* $\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} = 0$, la expresión entre paréntesis da directamente el primer miembro de la ecuación de Daniel Bernoulli:

$$\boxed{\frac{\mathrm{v}^2}{2} + P + U = \mathrm{Const}} \tag{12}$$

que en tal caso es válida en toda la extensión del fluído.

b) Si el movimiento es variable $\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} \neq 0\right)$ debe por lo menos ser $\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$, es decir rot $\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} = 0$; por eso, siendo

$$\mathrm{v} = \mathrm{grad}\,\varphi \tag{13}$$

donde ϕ es el potencial de las velocidades, resulta

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} = \operatorname{grad} \frac{\partial \phi}{\partial t} \tag{14}$$

y la ecuación de Daniel Bernoulli recibe un término adicional

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\mathrm{v}^2}{2} + P + U = \mathrm{Const}} \tag{15}$$

aplicable también en toda la extensión del fluído.

Las formas (12) y (15) son conocidas y clásicas.

5. — *Movimientos estacionarios con vórtices.*

Esta es la clase más importante de movimientos porque en ella ya se manifiestan las propiedades básicas de los movimientos en general, los que no se ven todavía en el movimiento potencial. Los movimientos más complicados agregan poco a estas propiedades.

La ecuación de un movimiento estacionario se deduce de la (2′) poniendo $\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} = 0$; vamos a mantener también la condición $\mathrm{R} = -\operatorname{grad} U$. Entonces resulta

$$\boxed{\operatorname{grad}\left(\frac{\mathrm{v}^2}{2} + P + U\right) + \operatorname{rot} \mathrm{v} \wedge \mathrm{v} = 0} \tag{16}$$

Ante todo, de esta ecuación se deduce que *en un movimiento estacionario* $\operatorname{rot} \mathrm{v} \wedge \mathrm{v}$ *debe formar un campo potencial,* condición conocida como necesaria para que pueda ser estacionario el movimiento (*). Entonces resulta que la fuerza Q definida en (6) tendrá un potencial; denominarémoslo $-E$:

$$\mathrm{Q} = -\operatorname{rot} \mathrm{v} \wedge \mathrm{v} = +\operatorname{grad} E. \tag{17}$$

(*) Véase H. LAMB, *Hydrodynamics* (1924), pág. 226.

Sustituyendo esto en (16):

$$\operatorname{grad}\left(\frac{v^2}{2}+P+U\right)=+\operatorname{grad}E \tag{18}$$

o bien

$$\boxed{\frac{v^2}{2}+P+U=\text{Const}+E} \tag{19}$$

que es la forma de la ecuación de Daniel Bernoulli para el movimiento estacionario.

La cantidad E puede expresar la energía total de una partícula diferiendo de ella en una constante de integración.

Siendo el vector $\operatorname{grad}E=-2\omega\wedge v$ perpendicular tanto a ω como a v, las superficies $E=\text{Const}$ están formadas por redes de filetes y de líneas de vórtice (fig. 4).

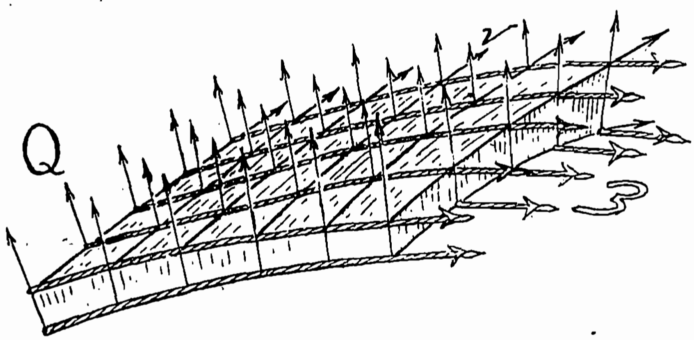


Fig. 4

Por consiguiente, las condiciones de aplicabilidad de la ecuación de Daniel Bernoulli en este caso son las siguientes:

a) *En cada una de las superficies formadas por la red de filetes y líneas de vórtice, la ecuación se aplica en su forma primitiva*

$$\boxed{\frac{v^2}{2}+P+U=\text{Const}} \tag{20}$$

b) *Para puntos que están sobre diferentes superficies, hay que introducir una variación de la constante del segundo miembro, de acuerdo a* (19).

Esta variación puede calcularse así:

$$E_2 - E_1 = -\int_{(1)}^{(2)} 2\omega \wedge \mathrm{v} \times d\sigma$$

donde $d\sigma$ es un elemento del camino de integración. Siendo $2\omega \wedge \mathrm{v}$ un vector potencial, el resultado no depende del camino.

6. — *Aplicaciones.*

En los textos de Hidráulica se suele aplicar la ecuación de Daniel Bernoulli a un solo filete, omitiendo los casos a) y b) del párrafo anterior. Mientras tanto, esos casos presentan un interés práctico.

Movimiento rectilíneo en un canal (fig. 5)

En este caso, como fácilmente se demuestra, las isótacas de una sección transversal representan líneas de vórtice (en la fig.

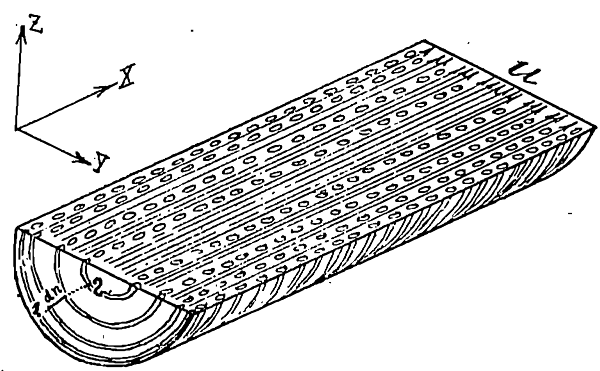


Fig. 5

5 las terminaciones de los vórtices se representan *simbólicamente* con circulitos, aunque sea continua su distribución), y

$$|\omega| = \frac{1}{2}\frac{\partial u}{dn} \tag{22}$$

donde dn es un elemento de la normal a las isótacas. Entonces de (21) sale

$$E_2 - E_1 = \int_{(1)}^{(2)} 2|\omega| u\, dn = \int_{(1)}^{(2)} \frac{\partial u}{dn} \cdot u \cdot dn = \Big|_1^2 \frac{u^2}{2} \tag{23}$$ *

Sustituyéndolo en (19) y teniendo en cuenta que $|v| = u$, se obtiene

$$P + U = \text{Const} \tag{24}$$

lo que constituye una demostración sencilla de que en este caso la distribución de las presiones será igual a la hidrostática.

Canal convergente o divergente (fig. 6)

En este caso puede determinarse previamente la distribución de la función E en una de las secciones (por ejemplo en I) (**).

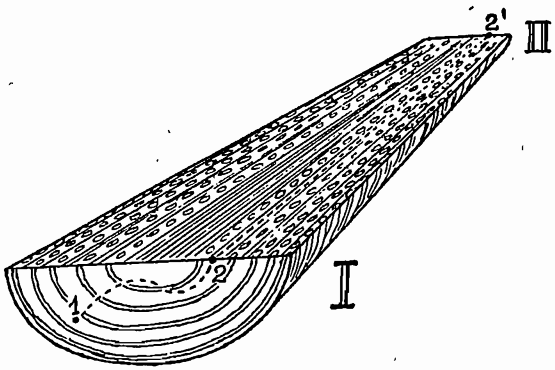


Fig. 6

(*) Esto constituye una demostración de lo dicho en el párrafo 3 sobre la relación entre E y las velocidades.

(**) Es ventajoso elegir la constante de integración de tal manera que E sea *igual* a la energía total de las partículas.

Si la convergencia no es demasiado brusca, (24) vale con aproximación para cada sección. Aplicando entonces (19) a las secciones I y II, resulta:

$$\frac{v_1^2}{2} - \frac{v_2^2}{2} + (P_1 + U_1) - (P_2 + U_2) = E_1 - E_2. \qquad (25)$$

La diferencia de las energías cinéticas se compone pues de dos partes: a) de la diferencia de los valores $(P+U)$ (con signo invertido); b) de la diferencia $E_1 - E_2$ pasando de punto a punto en la misma sección (*).

De esta manera se tiene una ecuación general para todo el canal (la (19)).

De ella se ve que si se toman puntos sobre dos filetes en dos secciones (fig. 7), resulta $E_4 - E_3 = E_2 - E_1$, y siendo

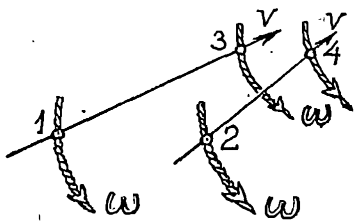


Fig. 7

$P + U = \text{Const.}$ en cada sección, se deduce que las diferencias de la función E y por lo tanto, también las diferencias de $\frac{v^2}{2}$ son las mismas en ambas secciones. Pero como v^2 crece más rápidamente que v, se deduce el conocido resultado que *en la sección donde las velocidades son mayores, sus diferencias son menores.*

7. — *Movimiento con vórtices estacionarios.*

Según el segundo teorema de Helmholtz, los vórtices se desplazan juntos con el fluído (empleando el lenguaje prác-

(*) *Siendo* $E =$ cont. en cada filete y en cada línea de vórtice.

tico, «flotan a la deriva») (*). Por lo tanto, en el movimiento estacionario, siendo una superficie $E = \text{Const}$ enteramente cubierta de líneas de vórtice, estas líneas no permanecen en sus posiciones, snio se desplazan en el sentido de v, deslizando sobre dicha superficie.

Por eso se debe crear constantemente nuevos vórtices allí donde comienzan los filetes, para cubrir la falta ocasoinada por la fuga de los vórtices anteriormente creados.

Resulta, pues, que la red de vórtices está en constante movimiento. Si el movimiento del fluído es laminar, el movimiento de los vórtices es invisible por ser continua su distribución, pero en el movimiento turbulento a veces se les puede individualizar y percibir su desplazamiento (**).

Ahora bien, puede encontrarse una subclase de movimientos donde los vórtices permanecen inmóviles. Esto implica que las líneas de vórtice coincidan con los filetes ($\omega \| v$), fig. 8.

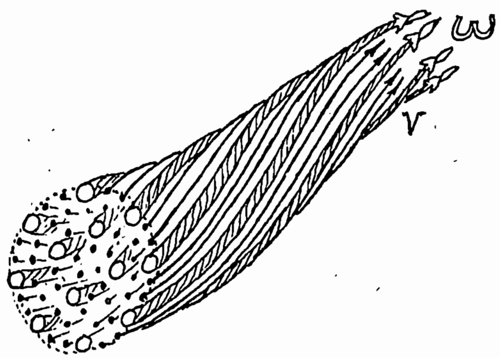


Fig. 8

En este caso también debe efectuarse continuamente el proceso de creación de vórtices, pero se lo realiza de otro modo: no se crean *nuevos* vórtices sino se alargan los *existentes*.

(*) La numeración de los teoremas de Helmholtz no es igual en todos los libros.

(**) El ejemplo, el más elocuente, representa la doble fila de vórtices estudiada por von Kármán.

En lo que se refiere a la ecuación de Daniel Bernolli para este caso, siendo

$$2\omega \wedge \mathrm{v} = O \qquad (26)$$

es también grad $E = O$ es decir $E = \text{Const}$, y *la ecuación* (20) *va a valer en todo el espacio, igual como en el caso de un movimiento potencial* (*).

8. — *Movimiento con vórtices normales.*

Consideremos ahora el caso contrario: líneas de vórtice normales a los filetes ($\omega \perp \mathrm{v}$) fig. 9.

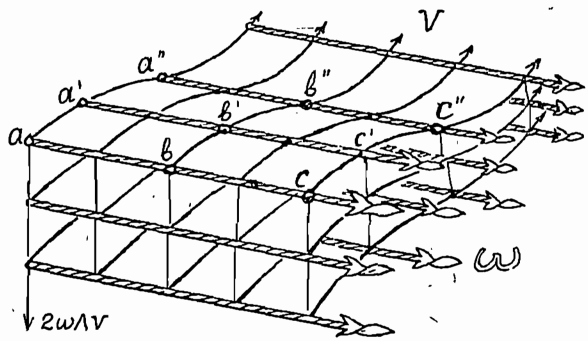


Fig. 9

En lo que se refiere a la aplicabilidad de la ecuación de Daniel Bernoulli, este caso no difiere en nada del caso general del párrafo 5, porque el vector $2\omega \wedge \mathrm{v}$ no se anula.

Interesante es solamente la condición de existencia de esta subclase de movimientos.

Teniendo en cuenta lo dicho en el párrafo anterior respecto del segundo teorema de Helmholtz, podemos formular la condición de existencia como sigue: el movimiento debe ser tal que una línea $a - b - c$, que es una línea de vórtice, normal a los filetes, después de desplazarse con el fluído a nuevas posiciones

(*) En los textos de Hidráulica este caso no se considera. Solamente Forchhemer lo menciona. Al cambio, se lo usa mucho en Aerodinámica, particularmente en la teoría de las alas.

$a' - b' - c'$, $a'' - b'' - c''$, etc., sea allí también normal a los filetes.

Ahora bien, todos los vórtices están en la superficie $a\,b\,c$, $a'\,b'\,c'$, $a''\,b''\,c''$ (fig. 8) no habiendo componente normal a ella, y por lo tanto, *en dicha superficie el movimiento es potencial,* pudiendo trazarse una red de filetes y líneas equipotenciales (fig. 10, líneas negras gruesas y finas) (*).

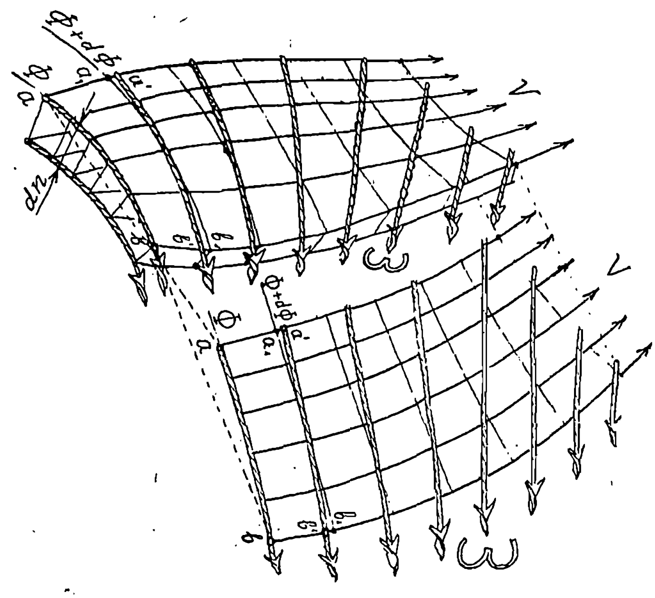


Fig. 10

Tracemos ahora una línea de vórtice $a\,b$ que coincide con la primera línea equipotencial a b. Al cabo de un tiempo dt este vórtice se desplazará a una nueva posición $a'\,b'$ tal que

$$a\,a' = |v_a|\,dt; \quad b\,b' = |v_b|\,dt \tag{27}$$

pero, según la regla del movimiento potencial,

$$|v_a| = \frac{d\Phi}{aa_1}; \quad |v_b| = \frac{d\Phi}{bb_1} \tag{28}$$

(*) La red (salvo caso particular dn=const) no será cuadrada sino solamente octogonal, por ser variable el espesor dn de una capa infinitamente delgada entre dos superficies vecinas.

y sustituyendo en (27)

$$aa' = \frac{d\phi dt}{aa_1}; \quad bb' = \frac{d\phi dt}{bb_1} \tag{29}$$

Las líneas isopotenciales son normales a los filetes; por eso, para cumplir la condición puesta en el comienzo, las líneas de vórtice deben coincidir con ellos, es decir

$$a\,a' = a\,a_1; \quad b\,b' = b\,b_1 \tag{30}$$

Entonces, de la (29) sigue, que $a\,a_1 = b\,b_1$, es decir, que *las líneas equipotenciales deben ser equidistantes.*

Ahora bien, de (28) resulta que $|v_a| = |v_b|$, o bien

$$\omega \nabla v \times v = O \tag{31}$$

es decir que *la velocidad no debe variar a lo largo de una línea de vórtice.*

Se puede ver que esta condición se cumple en los tres casos siguientes:

a) Movimiento rectilíneo uniforme (cmo en la fig. 5);

b) Movimiento plano (como en la fig. 9);

c) Movimiento con eje de simetría y vórtices circulares (fig. 11), y que hay un caso más general.

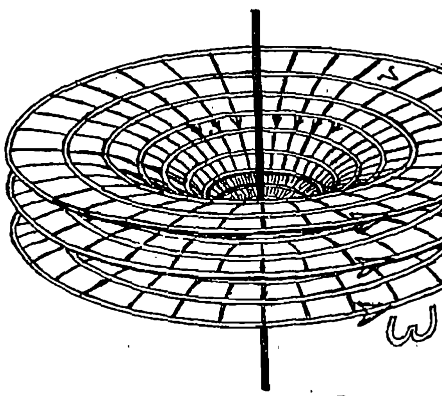


Fig. 11

9. — *Movimientos variables.*

En los textos de Hidráulica se los menciona como imposibles para aplicar la ecuación de Daniel Bernoulli, salvo el movimiento ya considerado en el párrafo 4 (ecuación 15).

Mientras tanto, se pueden encontrar algunos casos de su aplicación.

Tomando el rotor de la ecuación (2′)

$$\frac{\partial \operatorname{rot} \mathrm{v}}{\partial t} + \operatorname{rot} \operatorname{grad} \frac{\mathrm{v}^2}{2} + \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \mathrm{v} \wedge \mathrm{v}) + \frac{1}{\rho} \underbrace{\operatorname{rot} \operatorname{grad} p}_{= O} - \operatorname{rot} \mathrm{R} = O$$

o bien

$$2 \frac{\partial \omega}{\partial t} + \operatorname{rot} (2\omega \wedge \mathrm{v}) - \operatorname{rot} \mathrm{R} = O. \tag{31}$$

Se pueden distinguir los siguientes casos:

a)	R tiene potencial ($\operatorname{rot} \mathrm{R} = 0$)	a′) $2\omega \wedge \mathrm{v}$ es un campo potencial ($\operatorname{rot} \omega \wedge \mathrm{v}) = 0$)	$\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$
		a″) $2\omega \wedge \mathrm{v}$ es un campo arbitrario	$\frac{\partial \omega}{\partial t} \neq 0$
b)	R no tiene potencial ($\operatorname{rot} \mathrm{R} \neq 0$)	b′) $2\omega \wedge \mathrm{v}$ es un campo potencial ($\operatorname{rot} (\omega \wedge \mathrm{v}) = 0$)	$\frac{\partial \omega}{\partial t} \neq 0$
		b″) $2\omega \wedge \mathrm{v}$ es un campo arbitrario	$\frac{\partial \omega}{\partial t} \neq 0$
		b‴) Caso particular $\operatorname{rot} (2\omega \wedge \mathrm{v}) = \operatorname{rot} \mathrm{R}$	$\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$

a′) $\mathit{rot}\, \mathrm{R} = 0; \quad \mathrm{R} = -\mathit{grad}\, U; \quad \mathit{rot}\, (2\omega \wedge \mathrm{v}) = 0.$

Es un caso muy frecuente en la práctica: cuando el movimiento era durante un cierto tiempo estacionario, y luego, por un cambio en las fuerzas exteriores, se convierte en variable. Como ejemplo pueden citarse olas largas en los canales con corriente.

La configuración de los vórtices antes del cambio ocurrido era tal que satisfacía a la condición $\operatorname{rot} (2\omega \wedge \mathrm{v}) = 0$.

Cuando se produce el cambio, *en el primer instante* $\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$, es decir, no cambia el campo de vórtices. Pero en el instante siguiente, por cambiarse el campo de velocidades ($\text{¡}\ \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} \neq 0\,!$), se rompe dicha condición y por lo tanto $\frac{\partial \omega}{\partial t} \neq 0$.

En resúmen, *los cambios en el campo de vórtices aparecen con cierto atraso en comparación con los cambios en el campo de velocidades.* Por ejemplo, si v cambia proporcionalmente a t, ω cambiará proporcionalmente a t^2 (*).

Todo esto indica que *la ecuación de Daniel Bernoulli puede aplicarse en la forma* (19) *solamente a la fase inicial del movimiento variable,* mientras que para las fases más avanzadas es inaplicable, por carecer de potenial el vector $2\omega \wedge \mathrm{v}$ (véase el caso siguiente).

Esto induce a una interesante suposición sobre la estabilidad de los movimientos: si se perturba un movimiento estacionario, aunque la perturbación fuese causada por fuerzas potenciales, difícilmente se establezca otra vez un movimiento estacionario después de la desaparición de las fuerzas perturbadoras.

Con esto de ninguna manera se quiere decir que las fuerzas perturbadoras, siendo potenciales, pueden crear vórtices: el segundo teorema de Helmholtz es siempre válido en el fluído perfecto, de manera que los vórtices son los mismos que antes de la perturbación, y sólo se ha cambiado su distribución en el fluído; la nueva distribución ya no puede producir movimiento estacionario.

Resulta que las fases avanzadas del movimiento (a′) son de carácter (a″), al que pasamos ahora.

a″) $rot\,\mathrm{R} = 0;\quad \mathrm{R} = -\,grad\,U;\quad rot\,(2\omega \wedge \mathrm{v}) \neq 0$

La ecuación de movimiento toma la forma

$$\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} + \mathrm{grad}\,\left(\frac{\mathrm{v}^2}{2} + P + U\right)\mathrm{U} + 2\omega \wedge \mathrm{v} = 0 \qquad (32)$$

(*) Con esas proporcionalidades el autor no pretende expresar resoluciones exactas: es simplemente una manera de describir el *carácter* de los fenómenos.

donde rot $(2\omega \wedge v) \neq 0$ y por lo tanto, las líneas de vórtice con los filetes ya no forman superficies (fig. 12), salvo un caso particular (véase más adelante).

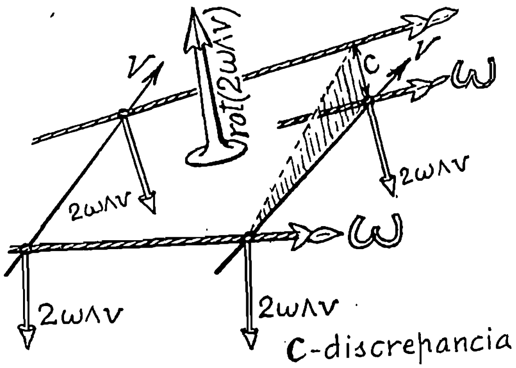


Fig. 12

Por eso, es imposible aplicar la ecuación de Daniel Bernoulli en toda una superficie. Pero se puede pensar en su aplicación en los filetes aparte y en las líneas de vórtice aparte. Para eso es preciso agregarle un término adicional $\int \frac{\partial v}{\partial t} \times d\sigma$ para tener en cuenta las fuerzas de inercia debidas al cambio del campo de velocidades. El procedimiento es análogo al del párrafo 4, caso b), ecuación (15), pero aquí no se puede expresar el término adicional en la forma $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ por ser rot $\frac{\partial v}{\partial t} \neq 0$, y por lo tanto, la aplicación práctica sería más difícil.

El caso particular que se ha mencionado, es *cuando rot* $(2\omega \wedge v)$ *es coplanar con* ω *y* v. Entonces los filetes y líneas de vórtice forman superficies. Pero en este caso la función cuyas superficies de nivel son estas superficies, *no es energía*, necesitándose por lo tanto introducir un factor integrante para poder establecer una acuación análoga a la de Daniel Bernoulli.

b′) *rot* R $\neq 0$; *rot* $(2\omega \wedge v) = 0$.

Para este caso se puede repetir todo lo dicho respecto al caso a′) con la sola modificación que en vez de U figurará $-\int R \times d\sigma$.

También aquí, solamente *al instante inicial se puede aplicar la ecuación de Daniel Bernoulli.*

b″) $rot\,\mathrm{R} \neq 0$; $rot\,(2\omega \wedge \mathrm{v}) \neq 0$.

Es análogo al caso a″) con la modificación introducida en b′) (*).

b‴) $rot\,(2\omega \wedge \mathrm{v}) = rot\,\mathrm{R}$.

Es un caso muy particular. Hay que elegir las fuerzas R de tàl manera que compensen el efecto de la mala distribución de los vórtices, consiguiendo $\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$. Esto debería hacerse aparte para cada caso de movimiento y difícilmente se realizaría en la práctica.

10. — *Resumen.*

a. Los criterios de aplicabilidad de la ecuación de Daniel Bernoulli se forman por medio del vector $2\omega \wedge \mathrm{v}$ de las ecuaciones de Lamb y Gromeko.

b. En el movimiento potencial, sea estacionario o no, la ecuación de Daniel Bernoulli es aplicable en toda la extensión del fluído; cuando el movimiento no es estacionario, se agrega $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$.

c. En el movimiento estacionario con vórtices, la ecuación de Daniel Bernoulli es aplicable en las superficies $E = \mathrm{Const}$ (siendo $\mathrm{grad}\,E = -2\omega \wedge \mathrm{v}$; E = energía específica total o difiere de ella en una constante).

d. En el movimiento con vórtices estacionarios (que coinciden con los filetes), la ecuación de Daniel Bernoulli es aplicable en toda la extensión del fluído.

e. El movimiento con vórtices normales a los filetes no difiere del caso general. Hay tres subclases particulares de este movimeinto y un caso más general.

f. Entre los movimientos variables con vórtices hay pocos casos de aplicabilidad de la ecuación de Daniel Bernoulli, y estos son muy particulares.

Asunción, 8 de Setiembre 1945.

(*) En todos los casos donde rot. $\mathrm{R} \neq 0$, es de utilidad el uso del teorema de Björknes sobre la variación de la circulación. Pero esto no tiene relación directa con la ecuación de Daniel Bernoulli.