SOBRE LA ECUACION FUNCIONAL $f(f(x))=\dfrac{1}{x}$

por

J. L. Massera y A. Petracca

Nos proponemos resolver el tema N°. 50 (esta *Revista,* vol. X, pág. 154) propuesto por L. A. Santaló y que decía:
Estudiar la ecuación funcional

$$f(f(x))=\frac{1}{x}\cdot \tag{1}$$

Observando que la inversión $1/x$ en el plano complejo está dada por el producto de dos simetrías, una respecto del círculo de centro en el origen y radio unidad y otra respecto del eje real, y que la transformación involutoria

$$z=(1-x)/(1+x)\;.$$

conserva las simetrías y transforma la circunferencia y el eje real del plano x en el eje real y el eje imaginario del plano z, se ve que el problema de resolver la ecuación (1) es equivalente al de resolver la ecuación

$$f(f(x))=-x. \tag{2}$$

Por ejemplo, la ecuación (2) se satisface inmediatamente por $f(x)=ix$. De aquí se deduce que una solución de la ecuación funcional propuesta será

$$f(x)=\frac{1-\frac{1-x}{1+x}\,i}{1+\frac{1-x}{1+x}\,i}=\frac{(1+i)x+(1-i)}{(1-i)x+(1+i)}$$

como es fácil comprobar.

Probaremos el siguiente teorema:

La solución general de la (2) *está dada implícitamente por la relación*

$$F(x^2, y^2) = 0 \tag{3}$$

en que F es una función simétrica arbitraria.

Debe entenderse que este enunciado significa lo siguiente: 1º. Toda solución $y = f(x)$ de la (2) es una función implícita definida por una relación del tipo (3); 2º. Si una relación del tipo (3) define por lo menos una función implícita uniforme, hay por lo menos una de estas funciones implícitas que es solución de la (2).

He aquí la demostración:

1º. Sea $y = f(x)$ una solución de la (2). Se tiene

$$y = f(x), \quad f(y) = -x, \quad -y = f(-x), \quad f(-y) = x,$$

y multiplicando estas igualdades se obtiene la relación

$$y^2 f(y) f(-y) = x^2 f(x) f(-x) \tag{3'}$$

que es del tipo (3).

2º. Sea una relación del tipo (3) que defina por lo menos una función implícita. Entonces la ecuación

$$F(u, v) = 0 \tag{4}$$

tiene por lo menos una solución $v = \varphi(u)$ (uniforme) definida en un conjunto U. No hacemos ninguna hipótesis acerca de la naturaleza de esta función ni del conjunto U; pero si la función es continua admitiremos que U es un recinto. Sea V la imagen de U dada por la función φ.

Supongamos primero que U y V no tienen puntos comunes. Reduciendo si es necesario el conjunto U, podemos suponer que la correspondencia entre U y V es biunívoca. En virtud de la simetría de F, la inversa de φ es también una función implícita definida por (4). Entonces queda definida en el conjunto $W = U + V$ una función implícita de (4) que tiene carácter involutorio.

Si U y V tuvieran una parte común W, a cada punto w de W corresponde, por pertenecer a U, el punto v de V, y por pertenecer a V, un punto u de U, dados por las relaciones

$$v = \varphi(w), \quad w = \varphi(u).$$

Se tiene entonces:

$$F(w, v) = 0 \quad \text{y} \quad F(u, w) = 0,$$

y también, por la simetría de F,

$$F(w, u) = 0.$$

Pueden ocurrir ahora dos cosas:

a) $u \equiv v$ para todo w de W o de una parte de W, que llamaríamos W de ahora en adelante. Como $u \equiv v$ pertenece a W tenemos también en este caso definida una correspondencia involutoria en W dada por una función implícita de (4).

b) Si $u \not\equiv v$, es posible entonces, por reducción del conjunto U, obtener dos conjuntos U y V separados, y quedamos reducidos al caso ya indicado.

Definida así, por cualquiera de los caminos indicados una correspondencia involutoria en w, vamos a distinguir dos casos:

A) Dos puntos correspondientes de W, o de una parte de W, no están nunca sobre una misma semirrecta que parte del origen. Definimos entonces la función $y = f(x)$ como aquella determinación de $\sqrt{\varphi(x^2)}$ que cumple la condición

$$0 < \operatorname{Arg}(y/x) < \pi. \tag{5}$$

Esta función es una implícita de las definidas por (3). Además, si $z = f(f(x)) = f(y)$, se tendrá

$$z = \sqrt{\varphi(y^2)} = \sqrt{x^2} = \pm x$$

que, junto con las condiciones (5) y

$$0 < \operatorname{Arg}(z/y) < \pi$$

demuestra que $z = -x$, de modo que f es una solución de la (2).

B) Dos puntos correspondientes están siempre sobre una misma semirrecta que parte del origen. Suprimiendo entonces en W los puntos dobles de la involución, si los hubiera, se puede descomponer, de infinitas maneras, el conjunto restante en dos conjuntos W' y W'' sin puntos comunes, tales que cada uno de ellos sea imagen del otro en la correspondencia involutoria. Si W es un conjunto abierto y φ es continua, se puede obtener dos conjuntos W' y W'' que sean ambos recintos.

Sean X', X''' los conjuntos que se obtienen de W' por medio de la transformación $x=\sqrt{u}$, y X'', X'''' los que se obtienen de W''. Los conjuntos de cada par son simétricos respecto del origen. Podemos suponer que todos estos conjuntos carecen de puntos comunes. Definimos ahora en el conjunto

$$X=X'+X''+X'''+X''''$$

la función uniforme $y=f(x)=\sqrt{\varphi(x^2)}$, tomando las siguientes determinaciones del radical:

Si x pertenece a X',	y pertenece a X''
» x » » X''',	y » » X''''
Si x pertenece a X'',	y pertenece a X'''
» x » » X'''',	y » » X'.

Entonces $f(x)$ es una implícita definida por (3) que satisface a la (2).

Es claro que podría haberse considerado, a los efectos de la demostración de la segunda parte del teorema, solamente el caso B. Pero entonces se perdería la posibilidad, especialmente interesante, de definir la función f en un recinto, posibilidad que, si la función φ lo permite, está brindada por las construcciones de los subcasos a) y A).

Ejemplos.

1°. La función x^i que satisface a la (1), se transforma como hemos dicho en una solución $y=f(x)$ de la (2) que está dada por la ecuación

$$\left(\operatorname{Log}\frac{1-x}{1+x}\right)^2+\left(\operatorname{Log}\frac{1-y}{1+y}\right)^2=0$$

que es del tipo (3).

2°. La función ix, solución de la (2), satisface a la ecuación

$$x^2+y^2=0.$$

3°. La ecuación

$$x^2+y^2=1$$

define la función $\sqrt{1-x^2}$, cuyas dos ramas, que pueden separarse en el plano tajeado según el segmento $(-1, 1)$, son soluciones de la (2).

4°. En el plano tajeado según los diámetros horizontal y vertical del círculo de radio $\sqrt[4]{4/3}$, pueden definirse (de acuerdo al criterio expuesto en A)), ramas uniformes de la función

$$y=\sqrt{\frac{-x^2+\sqrt{4-3x^4}}{2}}$$

dada implícitamente por la ecuación

$$x^4+x^2y^2+y^4=1,$$

que son soluciones de la (2).

5°. Sea la ecuación

$$x^2y^2=K^2. \tag{6}$$

No puede encontrarse ningún *recinto* en que pueda definirse una rama continua y uniforme que verifique la condición A). Para encontrar una solución de la (2) a partir de esta ecuación, se puede, por ejemplo, definir $y=K/x$ en el primer y tercer cuadrantes (abiertos) y $y=-K/x$ en el segundo y cuarto.

Este ejemplo permite resolver una pequeña dificultad. Podría ocurrir que la ecuación (3′) fuera una identidad, es decir que sus dos miembros fueran constantes. Entonces la (3′) no define a $f(x)$ como función implícita. En este caso la (3′) se reduce a la (6).

6°. La ecuación (K real)

$$\frac{y^2}{x^2}+\frac{x^2}{y^2}=K^2+\frac{1}{K^2}.$$

tiene las soluciones $y=\pm Kx$, $y=\pm x|K$, y está en el caso B). Sean los anillos circulares A_n del plano (u)

$$K^{2n}\leqq|u|<K^{2(n+1)} \qquad (-\infty<n<+\infty)$$

tajeados a los largo del semieje real positivo, y sea

$$W' = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_{2n} \qquad\qquad W'' = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_{2n+1}.$$

Se ve inmediatamente que si u pertenece a W', $v = Ku$ y $v = u|K$ pertenecen a W''. Sea ahora S_n la parte del anillo del plano (x)

$$K^n \leqq |x| < K^{n+1}$$

situada en el semiplano superior y S'_n la parte situada en el semiplano inferior. Los conjuntos X del caso B) pueden tomarse entonces de la siguiente manera,

$$X' = \Sigma S_{2n}, \quad X'' = \Sigma S_{2n+1}, \quad X''' = \Sigma S'_{2n}, \quad X'''' = \Sigma S'_{2n+1}.$$

Basta ahora definir

$$y = Kx \text{ en } X' \text{ y } X'''$$
$$y = -x/K \text{ en } X'' \text{ y } X''''.$$

Esa función satisface a (2). Se ve, en este caso, que puede incluso ampliarse los recintos X suprimiendo el tajo a lo largo del eje real.

INSTITUTO DE MATEMÁTICA Y ESTADÍSTICA,
MONTEVIDEO.

CRÓNICA

PRIMER COLOQUIO DE HISTORIA Y FILOSOFIA DE LA CIENCIA

Los días 18 y 20 de septiembre de 1945 se realizó en Buenos Aires, con el patrocinio de la *Unión Matemática Argentina* y la *Institución Cultural Española*, en la sede de esta última, el *Primer Coloquio de Historia y Filosofía de la Ciencia*. Se tuvo así el placer de ver reunidos a filósofos, físicos, matemáticos, químicos, etc., para tratar cuestiones científicas desde el punto de vista histórico-filosófico. El entusiasmo, la cordialidad, el número y la calidad de los asistentes contribuyeron al éxito completo de estas reuniones. De su im-