# CARTOGRAFIA Y CURVAS DE ESCALA

por

JOHN DE CICCO

Department of Mathematics
Columbia University
New York, New York (U.S.A.)

1. *Introducción.* — KASNER y el autor han estudiado la geometría de las curvas de escala en una cartografía general. Vamos a presentar aquí un resúmen de nuestra obra precedente y de los nuevos resultados obtenidos sobre el mismo tema. Véase la bibliografía al final del artículo.

Indicaremos por $(x, y)$ las coordenadas curvilíneas generales de un punto sobre una superficie $\Sigma$ y también las coordenadas cartesianas sobre un plano $\pi$. El cuadrado del elemento lineal $dS$ de $\Sigma$ es

$$dS^2 = E(x, y)\, dx^2 + 2F(x, y)\, dx\, dy + G(x, y)\, dy^2 \tag{1}$$

donde $H^2 = EG - F^2 > 0$ y el cuadrado del elemento lineal $ds$ de $\pi$ es $ds^2 = dx^2 + dy^2$. Esto define una transformación $T$ entre los puntos de $\Sigma$ y los de $\pi$ tal que puntos correspondientes son aquellos y solamente aquellos representados por las mismas coordenadas. A toda representación particular de la superficie $\Sigma$ sobre el plano $\pi$ le llamaremos un *cartograma*. Por tanto, un cartograma depende no sólo de la superficie $\Sigma$ sino también de la transformación $T$. El cartograma se dirá conforme o no conforme, según lo sea la transformación $T$.

La *función de escala* $\sigma = ds/dS$ es la razón entre los elementos de arco de curvas correspondientes en $\pi$ y en $\Sigma$ respectivamente, respecto la transformación $T$. Está definida por la fórmula

$$\sigma^2=\left(\frac{ds}{dS}\right)^2=\frac{1+y'^2}{E+2Fy'+Gy'^2} \tag{2}$$

donde el ápice indica la derivada respecto $x$. En general, $\sigma$ depende no solamente del punto $(x, y)$ sino también de la pendiente $y'$. Unicamente es independiente de la dirección si $T$ es conforme. La escala $\sigma$ se reduce a una constante únicamente en el caso en que $\Sigma$ es desarrollable y la transformación $T$ es el desarrollo de $\Sigma$ sobre $\pi$ seguido de una semejanza en $\pi$.

Una *curva de escala* es un lugar de puntos de $\Sigma$ o de $\pi$ para los cuales la escala $\sigma$ toma un mismo valor. La totalidad de las curvas de escala para un cartograma dado está definida por $\sigma=$constante. Para un cartograma no conforme existen $\infty^2$ curvas de escala. Para un cartograma conforme existen $\infty^1$ curvas de escala, excepto en el caso de degeneración ya mencionado en que cualquier curva es una curva de escala. En lo sucesivo omitiremos este caso degenerado, de manera que supondremos que $\sigma$ es siempre una función no constante.

Este artículo se refiere al estudio de la geometría de las curvas de escala en el plano $\pi$. Consideraremos teoremas generales referentes a curvas de escala para los dos casos de cartogramas conformes y no conformes.

## CARTOGRAMAS NO CONFORMES

2. *La ecuación diferencial de las* $\infty^2$ *curvas de escala.* — Puesto que la representación $T$ de $\Sigma$ sobre $\pi$ no es conforme, se deduce que la función de escala $\sigma$ es una función del elemento lineal $(x, y, y')$, donde $y'$ está presente explícitamente. Por tanto, *en los cartogramas no conformes hay siempre* $\infty^2$ *curvas de escala.*

Eliminando la constante $\sigma$ de la ecuación (2) por derivación, encontramos que la ecuación diferencial de nuestras $\infty^2$ curvas de escala es

$$y''=\frac{(1+y'^2)[E_x+y'(E_y+2F_x)+y'^2(2F_y+G_x)+y'^3G_y]}{2[-F+y'(E-G)+y'^2F]}. \tag{3}$$

No todo sistema de $\infty^2$ curvas puede representar las curvas de escala de un cartograma no conforme, puesto que según (3) debe existir una relación algebraica especial entre sus primeras derivadas.

De (3) se observa que *hay tres direcciones de inflexión y dos direcciones cuspidales para las curvas de escala. Las direcciones cuspidales son siempre ortogonales y coinciden con las direcciones características.* Según un teorema de TISSOT las direcciones características son las de la única red ortogonal sobre $\pi$ que por una transformación no conforme $T$ se convierte en una red ortogonal sobre $\Sigma$.

3. *Caracterización del sistema de $\infty^2$ curvas de escala.* — Sean $(X, Y)$ las coordenadas cartesianas relativas al punto $(x, y)$, del centro de curvatura de una curva de escala en el punto $(x, y)$. Para un punto fijo $(x, y)$, los centros de curvatura correspondientes (lugar de los centros) de las $\infty^1$ curvas de escala que pasan por el punto fijo, describen la cúbica

$$\begin{aligned} G_\gamma X^3 - (2F_\gamma + G_x)X^2Y + (E_\gamma + 2F_x)XY^2 - E_xY^3 \\ + 2[-FX^2 + (E-G)XY + FY^2] = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

*El lugar de los centros de curvatura (lugar de los centros) es una cúbica general que tiene un nodo en el punto fijo $(x, y)$ y las direcciones de las tangentes en el nodo coinciden con las direcciones características.*

Esta propiedad pertenece no solamente a toda familia de $\infty^2$ curvas de escala, sino también a familias más generales de curvas. Si una familia de curvas posee la propiedad precedente, debe ser definida por una ecuación diferencial de la forma

$$y'' = \frac{(1+y'^2)(\alpha+\beta y'+\gamma y'^2+\delta y'^3)}{2(-\eta+\varepsilon y'+\eta y'^2)}. \tag{5}$$

Esta familia representará curvas de escala únicamente si las seis funciones $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$, $\eta$ de $(x, y)$ satisfacen las dos ecuaciones diferenciales de segundo orden

$$\begin{aligned} M_\gamma &= N_x \\ \alpha_y + N\alpha &= \delta_x + \varepsilon_{xy} + N\varepsilon_x + \varepsilon N_x + M(\delta + \varepsilon_y + \varepsilon N) \end{aligned} \tag{6}$$

donde $M$ y $N$ están definidos por

$$(\varepsilon^2+4\eta^2)M=\varepsilon(\alpha-\gamma)+2\eta(\beta-\delta)-4\eta\eta_x+2\varepsilon\eta_y-\varepsilon\varepsilon_x-2\eta\varepsilon_y,$$

$$(\varepsilon^2+4\eta^2)N=-2\eta(\alpha-\gamma)+\varepsilon(\beta-\delta)-2\varepsilon\eta_x-4\eta\eta_y+2\eta\varepsilon_x-\varepsilon\varepsilon_y. \tag{7}$$

*Existen esencialmente* $\infty^2$ *superficies que poseen la misma familia de* $\infty^2$ *curvas de escala.* Si la superficie $\Sigma$ con el elemento lineal (1) está representada sobre el plano $\pi$ de manera que la ecuación diferencial (3) representa las curvas de escala, el elemento lineal $dS'$ de cualquier superficie $\Sigma'$ con las mismas curvas de escala debe estar dado por

$$dS'^2=adS^2+bds^2 \tag{8}$$

donde $a\neq 0$ y $b$ son constantes.

La clase de las curvas de escala es convertida en sí misma únicamente por el grupo conforme. Esto vale también para las clases de curvas definidas por ecuaciones diferenciales del tipo (5).

Obsérvese que los resultados de esta sección son válidos solamente para el caso general en que la cúbica (4) no es degenerada.

4. *Curvas de escala del tipo de velocidades.* Si las curvas paramétricas de $\Sigma$ no son ortogonales, es decir, $F\neq 0$, la cúbica lugar geométrico (4) puede degenerar en tres rectas, dos de las cuales son las tangentes a las curvas características correspondientes al punto fijo y la otra es la recta general

$$G_yX+E_xY-2F=0. \tag{9}$$

*En este caso las* $\infty^2$ *curvas de escala forman un sistema de velocidades.* (Un sistema de velocidades se define en general por una ecuación diferencial de la forma $y''=(1+y'^2)(\psi-y'\varphi)$, donde $\varphi$ y $\psi$ son funciones arbitrarias de $x, y$). Las $\infty^2$ curvas de escala (3) forman un sistema de velocidades si y únicamente si se verifica

$$
\begin{aligned}
G_\gamma(E-G) &= F(E_x + G_x + 2F_\gamma) \\
-E_x(E-G) &= F(E_\gamma + G_\gamma + 2F_x).
\end{aligned} \tag{10}
$$

La ecuación diferencial de las $\infty^2$ curvas de escala es entonces

$$
y'' = \frac{1}{2F}(1+y'^2)(-E_x + y'G_\gamma). \tag{11}
$$

*Si las curvas de escala forman una familia natural, las curvas características constituyen una red isoterma.* Si la familia de curvas de escala es un sistema completo de trayectorias isogonales de una familia isoterma (*conformal rectilinear wex*), las curvas $E-G=$ constante y $F=$ constante forman una red isoterma.

*Un sistema de $\infty^2$ curvas de escala puede ser del tipo cúbico (Lie-Liouville) cuando y únicamente cuando sea un sistema de velocidades.*

Si las curvas paramétricas son ortogonales, o sea $F=0$, la cúbica (4) únicamente puede degenerar si $G_\gamma=0$ o $E_x=0$. En tal caso la cúbica está formada por la tangente a una de las curvas características y por una cónica tangente a la otra curva característica en el punto dado. Este caso puede también presentarse si las curvas paramétricas no son ortogonales.

Para el caso en que $F=0$, las $\infty^2$ curvas de escala forman un sistema de velocidades cuando $G_\gamma = E_x = 0$. La ecuación diferencial (3) es entonces

$$
y'' = \frac{1}{2(E-G)}(1+y'^2)(E_\gamma + y'G_x). \tag{12}
$$

En este caso la cúbica (4) consta de las tangentes a las curvas características correspondientes al punto fijo y de la recta

$$
-G_xX + E_\gamma Y + 2(E-G) = 0. \tag{13}
$$

5. *Cartogramas con escalas rectilíneas.* — Vamos a determinar la clase de superficies $\Sigma$ para las cuales existe un mapa de $\Sigma$ sobre el plano $\pi$ tal que las curvas de escala coincidan con

la totalidad de las $\infty^2$ rectas. Esta clase de superficies $\Sigma$ es

$$dS^2 = a_0(ydx - xdy)^2 + 2(a_1dx + b_1dy)(ydx - xdy) + \\ + a_2dx^2 + 2c_2dxdy + b_2dy^2. \quad (14)$$

Para esta clase de superficies se encuentra

$$H^2 = (a_0a_2 - a_1^2)x^2 + 2(a_0c_2 - a_1b_1)xy + (a_0b_2 - b_1^2)y^2 \\ + 2(a_1c_2 - a_2b_1)x + 2(a_1b_2 - b_1c_2)y + (a_2b_2 - c_2^2). \quad (15)$$

La curvatura de Gauss $G$ está dada por

$$H^4G = -2a_0H^2 + a_0(c_2^2 - a_2b_2) + a_2b_1^2 - 2a_1b_1c_2 + a_1^2b_2. \quad (16)$$

por consiguiente, la curvatura de Gauss $G$ resulta ser una función racional de $x, y$.

En el caso general (14), las $\infty^1$ rectas de escala correspondientes a una escala dada son tangentes a una cónica. Variando $\sigma$ se encuentra que estas cónicas forman un sistema de cónicas homofocales, compuesto por cónicas con centro o por parábolas, según que sea $a_0 \neq 0$, o $a_0 = 0$.

Si la curvatura de Gauss $G$ es constante, ella debe ser cero. En tal caso es $a_0 = a_1 = b_1 = 0$. Esto significa que si la superficie $\Sigma$ es de curvatura constante y las curvas de escala son todas líneas rectas, $\Sigma$ es una superficie desarrollable y la representación de $\Sigma$ sobre $\pi$ es el desarrollo de $\Sigma$ sobre $\pi$ seguido de una transformación afín. A una escala dada $\sigma$ corresponde un haz de rectas paralelas.

Por consiguiente, *no existe una representación no conforme de la esfera o pseudoesfera sobre un plano tal que las curvas de escala coincidan con la totalidad de las $\infty^2$ rectas del plano*. De aquí se deduce que el único mapa, conforme o no, de una esfera sobre un plano tal que las curvas de escala sean líneas rectas en la proyección de Mercator en cuyo caso se tiene una simple infinidad de rectas paralelas como curvas de escala.

## CARTOGRAMAS CONFORMES

6. *Familias casi-isotermas.* — Si el mapa $T$ de $\Sigma$ sobre el plano $\pi$ es conforme, se obtiene que la función de escala $\sigma$ es una

función del punto $x, y$ únicamente. El cuadrado del elemento lineal $dS$ de $\Sigma$ es de la forma

$$dS^2 = e^{2\lambda(x,y)}(dx^2 + dy^2). \tag{17}$$

La función de escala $\sigma = ds/dS$ está dada por $\sigma = e^{-\lambda(x,y)}$. La curvatura de Gauss $G$ de $\Sigma$ vale

$$G = -e^{-2\lambda(x,y)}(\lambda_{xx} + \lambda_{yy}) \tag{18}$$

y la curvatura geodésica $k$ de una curva de $\Sigma$ es

$$k = \frac{y'' - (1+y'^2)(\lambda_y - y'\lambda_x)}{e^{\lambda}(1+y'^2)^{3/2}}. \tag{19}$$

Como $\sigma$ se supone que no es una constante, se deduce que *en los cartogramas conformes hay siempre* $\infty^1$ *curvas de escala.*

Toda familia de $\infty^1$ curvas en $\pi$ o en $\Sigma$ puede representar las curvas de escala de un mapa conforme $T$ sobre el plano $\pi$ de cualquier superficie $\Sigma$ de una cierta clase. Diremos que una familia de $\infty^1$ curvas es *casi-isoterma* si ella representa las curvas de escala de un mapa conforme de una superficie $\Sigma$ sobre un plano $\pi$ de manera que la curvatura de Gauss $G$ sea constante a lo largo de lás curvas de escala.

*Una familia de curvas $f(x,y) = cte.$ es casi isoterma si y solamente si $f$ satisface la ecuación en derivadas parciales de cuarto orden*

$$\left(f_y\frac{\partial}{\partial x} - f_x\frac{\partial}{\partial y}\right)\left[\frac{\left(f_y\frac{\partial}{\partial x} - f_x\frac{\partial}{\partial y}\right)\left((f_{xx}+f_{yy})\right)}{\left(f_y\frac{\partial}{\partial x} - f_x\frac{\partial}{\partial y}\right)\left((f_x^2+f_y^2)\right)}\right] = 0. \tag{20}$$

En este caso es posible encontrar una función $\lambda = \lambda(f)$ tal que $\lambda$ satisfaga a una ecuación en derivadas parciales de segundo orden de la forma

$$\lambda_{xx} + \lambda_{yy} = \varphi(\lambda), \tag{21}$$

lo cual justifica el nombre adoptado de familias casi-isotermas.

El logaritmo de la función de escala $\sigma$ satisface también a una ecuación diferencial de la misma forma.

Si $\lambda$ satisface a una ecuación diferencial de la forma (21), $\lambda(x, y) = c$ define una familia casi-isoterma de curvas y $c$ se llama el *parámetro casi-isotermo.*

7. *Familias isotermas y familias paralelas de tipo casi-isotérmico.* Toda familia isoterma es casi-isoterma, pero no toda familia casi-isoterma es isoterma. Por ejemplo la familia de elipses semejantes $x^2 + 2y^2 = \text{cte.}$ es casi-isoterma, pero no es isoterma.

*Si las $\infty^1$ curvas de escala de un mapa conforme de una superficie $\Sigma$ sobre un plano $\pi$ forma un sistema isotermo tal que la curvatura de Gauss $G$ sea constante a lo largo de toda curva de escala, $\Sigma$ es o bien desarrollable, o bien aplicable sobre una superficie de revolución.*

En el primer caso las curvas de escala pueden ser cualquier familia isoterma (y el mapa conforme es de carácter perfectamente general), mientras que en el segundo caso las curvas de escala deben ser o rectas paralelas o círculos concéntricos (y el mapa conforme es de carácter especial).

*Una familia casi-isoterma en el plano $\pi$ está formada por curvas paralelas únicamente cuando consiste en rectas paralelas o en círculos concéntricos. La superficie asociada $\Sigma$ debe ser o desarrollable o aplicable sobre una superficie de revolución.*

Si una superficie desarrollable $\Sigma$ está representada conformemente sobre un plano $\pi$ con curvas de escala paralelas, la representación o mapa $T$ es igual al producto del desarrollo de $\Sigma$ sobre $\pi$ por una de las transformaciones $U = u^n$, $U = \log u$, $U = e^u$ (donde $u = x + iy$, $v = x - iy$ son las coordenadas mínimas de un punto), seguido de una semejanza. Esto es completamente diferente a lo que ocurre en el caso isotermo donde la representación conforme es completamente arbitraria.

Si una superficie $\Sigma$ de curvatura de Gauss $G$ constante, distinta de cero, está representada conformemente sobre el plano $\pi$ con curvas de escala isotermas o paralelas, estas curvas de escala deben ser rectas paralelas o círculos concéntricos. Por tanto *los únicos mapas conformes de la esfera sobre un plano con curvas de escala paralelas o isotermas son la proyección de Mercator (con curvas de escala rectilíneas), y las proyecciones estereográ-*

*ficas y de Lambert (con escalas circulares) seguidas de una semejanza.*

8. *Representación conforme parcialmente geodésica.* — Un famoso teorema de Beltrami establece que si una superficie $\Sigma$ se puede representar biunívocamente sobre un plano de manera que sus $\infty^2$ geodésicas se representen sobre las $\infty^2$ rectas del plano, la superficie $\Sigma$ tiene curvatura de Gauss constante. Vamos ahora a estudiar lo que ocurre cuando no todas las geodésicas están representadas por rectas.

KASNER ha demostrado que en cualquier representación biunívoca de una superficie $\Sigma$ sobre un plano $\pi$ (o, más generalmente, sobre otra superficie $\Sigma'$), existen a lo sumo 3 $\infty^1$ geodésicas que estén representadas por rectas (o por geodésicas de $\Sigma'$), a no ser que lo estén todas.

En una representación o mapa conforme, hay a lo sumo $\infty^1$ geodésicas de $\Sigma$ a las que corresponden rectas de $\pi$ (puesto que a las 2 $\infty^1$ líneas mínimas de $\Sigma$ ya corresponden las 2 $\infty^1$ líneas mínimas de $\pi$). KASNER ha demostrado que un mapa conforme transforma exactamente $\infty^1$ geodésicas de $\Sigma$ en rectas de $\pi$, las curvas de escala de la representación deben formar una familia de curvas paralelas y la familia de sus curvas ortogonales es la familia de geodésicas mencionada.

*Si una superficie $\Sigma$ de curvatura de Gauss constante está representada conformemente sobre un plano $\pi$ de manera que $\infty^1$ geodésicas de $\Sigma$ estén representadas por rectas de $\pi$, las curvas de escala son rectas paralelas o círculos concéntricos.*

Para el caso de una superficie desarrollable o de una esfera, estos mapas son los descritos en el n.º 7.

Es imposible representar conformemente una esfera sobre un plano de manera que los $\infty^2$ círculos máximos se transformen en rectas. Las tres representaciones clásicas, estereográfica (de Ptolomeo), Mercator y de Lambert son las únicas representaciones conformes que transforman el máximo número posible ($\infty^1$) de geodésicas en líneas rectas.

9. *Familias casi-isotermas de rectas y círculos.* — Lagrange demostró que las únicas familias de $\infty^1$ rectas o círculos que son isotermas son los haces. Nuestra generalización de este resultado es la siguiente:

*Las únicas familias de* $\infty^1$ *rectas, o* $\infty^1$ *círculos, que son de tipo casi-isotermo son los haces.* La superficie asociada $\Sigma$ debe ser o desarrollable o aplicable sobre una superficie de revolución.

Si una superficie desarrollable $\Sigma$ está representada conformemente sobre un plano $\pi$ de manera que las curvas de escala sean rectas o círculos, la representación es el producto de un desarrollo de $\Sigma$ sobre $\pi$ seguido de una de las transformaciones $U=u^n$, $U=\log u$, $U=e^u$ y de una semejanza.

*El único mapa conforme de la esfera sobre el plano cuyas curvas de escala son rectas, es la proyección de Mercator* (seguida de una semejanza). *Los mapas conformes de la esfera sobre el plano con curvas de escala circulares son la proyección estereográfica (Ptolomeo) y la de Lambert* (seguidas de una semejanza).

10. *Caracterización de las superficies aplicables sobre superficies de revolución.* — Puesto que vamos a ocuparnos ahora principalmente de las superficies de revolución, es conveniente introducir la siguiente terminología. Una superficie *esferiforme* (*sphere-like surface*) será una superficie de curvatura de Gauss constante, diferente de cero. Una superficie *vasiforme* (*vase-like surface*) será cualquier superficie aplicable sobre una superficie de revolución con curvatura de Gauss variable. Por tanto, toda superficie aplicable sobre una superficie de revolución puede ser desarrollable, esferiforme o vasiforme. Estas tres clases se excluyen mutuamente.

Adoptando coordenadas mínimas $u=x+iy$, $v=x-iy$, se ve fácilmente que si una superficie $\Sigma$ está representada conformemente sobre un plano $\pi$, el cuadrado de su elemento lineal está dado por

$$dS^2 = 2e^{\lambda(u,v)}\, du\, dv. \tag{22}$$

La escala $\sigma = ds/dS$ está dada por $\sigma = e^{-\lambda/2}/\sqrt{2}$ y la curvatura de Gauss vale

$$G = -e^{-\lambda}\lambda_{uv}. \tag{23}$$

La condición para que la superficie sea desarrollable es

$\lambda_{uv}=0$ y las condiciones para que sea esferiforme son $\lambda_{uuv}-\lambda_u\lambda_{uv}=0$ y $\lambda_{uvv}-\lambda_v\lambda_{uv}=0$.

*Una superficie $\Sigma$ con el elemento lineal (22) es vasiforme cuando y únicamente cuando se satisface idénticamente el siguiente sistema de dos ecuaciones en derivadas parciales de cuarto orden.*

$$\frac{G_{uu}}{G_u^2}-\frac{G_{vv}}{G_v^2}=\frac{1}{G_{uv}}\left(\frac{G_{uuv}}{G_u}-\frac{G_{uvv}}{G_v}\right)=\frac{\lambda_u}{G_u}-\frac{\lambda_v}{G_v}. \tag{24}$$

Esta es, esencialmente, la forma analítica de un teorema de KASNER que afirma que las únicas superficies con un sistema isotermo de geodésicas son aquellas aplicables sobre una superficie de revolución. En tal caso, el sistema isotermo de geodésicas es $v'=G_u/G_v$.

*En toda superficie vasiforme $\Sigma$ representada conformemente sobre un plano $\pi$, si las curvas de escala $\lambda=cte.$ coinciden con la familia $G=cte.$, las curvas de escala son rectas paralelas o círculos concéntricos. Si las curvas $G=cte.$ forman una familia de curvas paralelas del plano $\pi$, ellas coinciden con las curvas de escala $\lambda=cte.$ y por consiguiente son líneas rectas o círculos concéntricos.*

Este teorema es una consecuencia de las condiciones (24) para superficies vasiformes y de los teoremas mencionados en el n. 7.

11. *Superficies vasiformes para las cuales existen mapas conformes tales que las curvas de escala formas sistemas isotermos que no son ni rectas paralelas ni círculos concéntricos.* — Las razones por las cuales nos vamos a restringir a superficies vasiformes son las siguientes. Sea $\Sigma$ una superficie aplicable sobre una superficie de revolución; ella será desarrollable, esferiforme o vasiforme.

Si $\Sigma$ es desarrollable, en cualquier mapa de la misma sobre un plano las curvas de escala forman una familia isoterma. Inversamente, cualquier sistema isotermo de curvas puede servir como sistema de curvas de escala de un mapa conforme de alguna superficie desarrollable sobre un plano.

Hemos demostrado que si una superficie esferiforme está representada conformemente sobre un plano de manera que las curvas de escala formen una familia isoterma, estas curvas de escala deben ser o rectas paralelas o círculos concéntricos.

Queda así justificada nuestra limitación a superficies vasiformes. El sistema isotermo de las curvas de escala no debe consistir en rectas paralelas ni en círculos concéntricos, pues es bien conocido que toda superficie aplicable sobre una superficie de revolución puede representarse conformemente sobre un plano de manera que las curvas de escala sean rectas paralelas o círculos concéntricos.

*Los elementos lineales de todas las superficies vasiformes para las cuales existen mapas de las mismas tales que las curvas de escala formen sistemas isotermos que no sean rectas paralelas ni círculos concéntricos, pueden ser reducidos, mediante convenientes transformaciones, a los siguientes tipos:*

$$dS^2 = \frac{ce^{uv}}{(uv)^n}\, du\, dv \qquad (25.1)$$

$$dS^2 = \frac{2e^{f(u)+g(v)}}{(u+v)^2}\, du\, dv \qquad (25.2)$$

$$dS^2 = \frac{[(au+b)(cv+d)]^{(n-2)}}{(u+v)^n}\, du\, dv, \quad \text{donde } n \neq 0,2 \qquad (25,3)$$

$$dS^2 = \frac{ce^{u+v}}{(u+v)^n}\, du\, dv, \quad \text{donde } n \neq 0,2 \qquad (25.4)$$

$$dS^2 = \frac{c(uv)^{(n-2)/2}}{(u+v)^n}\, du\, dv, \quad \text{donde } n \neq 0,2 \qquad (25.5)$$

$$dS^2 = \frac{c(uv)^k}{(uv-1)^n}\, du\, dv, \quad \text{donde } k \neq 0,\ n-2, \qquad (25.6)$$

$$dS^2 = \frac{c[u^{1+ib}\, v^{1-ib}]^{(n-2)/2}}{(u+v)^n}\, du\, dv, \quad \text{donde } b \neq 0 \qquad (25.7)$$

En el campo real hay esencialmente siete tipos de tales superficies vasiformes, pero en el campo imaginario únicamente hay seis tipos: los dos últimos (25.6) y (25.7) son equivalentes por una transformación conforme imaginaria.

Columbia University
New York, New York (U. S. A.)

BIBLIOGRAFIA

1. KASNER, *Isothermal systems of geodesics*, Transactions of the American Mathematical Society, vol. 5, pp. 55-60 (1904).
2. KASNER, *The problem of partial geodesic representation*, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 7, pp. 200-206 (1906).
3. DE CICCO, *New proofs of the theorems of Beltrami and Kasner on linear families*, Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 49, pp. 407-411 (1943).
4. KASNER and DE CICCO, *Ovals should be used to map airplane ranges*, Science news Letter, March 25, 1944, p. 200.
5. KASNER and DE CICCO, *Scale curves in conformal maps*, Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. 30, pp. 162-164 (1944).
6. KASNER and DE CICCO, *Scale curves in general cartography*, Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. 30, pp. 211-215 (1944).
7. KASNER and DE CICCO, *Geometry of scale curves in conformal maps*, American Journal of Mathematics, Vol. 67, pp. 157-166 (1945).
8. DE CICCO, *Conformal maps of surfaces with isothermal systems of scale curves*, American Journal of Mathematics, Vol. 68, pp. 137-146 (1946).
9. KASNER and DE CICCO, *The distortion of Angles in general cartography*, Proceedings of the National Academy of Sciences, Vol. 32, pp. 94-97 (1946).