SOBRE DERIVADAS GENERALIZADAS DE PEANO (*)

por Ernesto Corominas (Mendoza)

La historia de las derivadas de Peano se remonta casi a los fundamentos del cálculo infinitesimal; pero mejor será limitarse a Lagrange. Lagrange en su Teoría de las funciones analíticas decía que si se quería justificar rigurosamente el cálculo infinitesimal debía introducirse el concepto de derivada partiendo del desarrollo de Taylor, sin embargo, la evolución histórica posterior siguió un camino muy diverso al definir Cauchy la derivada como el límite del cociente incremental; con ello pudo introducirse el rigor que deseaba Lagrange, aunque el desarrollo de Taylor pasaba a ser una consecuencia, o teorema, deducida de los principios y nociones fundamentales del cálculo. A pesar de todo, las ideas de Lagrange no quedaron del todo olvidadas, ya que en las funciones de variable compleja el desarrollo de Taylor volvió a jugar un papel preponderante.

Cuando se reconoció el carácter intrínseco de las funciones analíticas quedó patentizado que si las derivadas se introducían mediante el desarrollo de Taylor se reducía enormemente el concepto de derivada, al quedar reducido el campo de aplicación a las funciones analíticas. De este modo quedaban excluídas del cálculo, no solamente las funciones casi analíticas sino también las clases más reducidas de las funciones infinitamente derivables y hasta las funciones con una sola derivada; la definición de Cauchy era mucho más amplia que la de Lagrange.

A pesar de todo, la idea de utilizar el desarrollo en serie de potencias del incremento para definir a las derivadas sucesivas

(*) Trabajo presentado en las *Primeras Jornadas Matemáticas Argentinas* realizadas en Buenos Aires y La Plata del 27 al 29 de julio de 1945.

era buena si previamente se introducían algunas variantes, por ejemplo, tomando un número finito de términos y dando una expresión del resto independiente de las mismas derivadas. Esta aguda modificación fué propuesta por el genial matemático italiano Peano, demostrando previamente que el resto es de la forma $o(h^n)$, esto es, un infinitésimo de orden superior a n. En definitiva tenemos que si una función admite n derivadas sucesivas ordinarias en un punto x se verifica que

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\,h+f''(x)\,\frac{h^2}{2!}+\ldots+f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!}+o(h^n) \quad (1)$$

es decir, que en el entorno de un punto la función coincide con un polinomio del incremento de grado n, cuando se prescinde de infinitésimos de orden superior, esto es, de orden superior a n.

Peano invirtió los términos de la cuestión tomadno esta propiedad, que era un teorema para las derivadas de Cauchy, como definidora de las derivadas. Así, siempre que una función en el entorno de un punto coincida con un polinomio de grado n del incremento, salvo infinitésimos de orden superior, diremos que la función tiene n derivadas sucesivas que son precisamente los coeficientes del desarrollo multiplicdos por las respectivas factoriales. En una palabra, la igualdad (1) es la misma definición de las derivadas.

Evidentemente cuando existan las n derivadas ordinarias, la definición de Peano será equivalente a la de Cauchy, lo que no siempre sucede, según veremos después. Es interesante destacar que para la primera derivada ambas definiciones son equivalentes pues, en efecto, si

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\,h+o(h)$$

se deduce

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\rightarrow f'(x) \qquad (h\rightarrow 0)$$

y recíprocamente.

Con la definición de Peano dejamos de definir las derivadas sucesivas reiterando la definición de derivada primera, ya que definimos las n derivadas simultáneamente a partir de la función, dejando de ser necesariamente cada una de ellas la derivada de la anterior. Por lo demás, cuando se habla de derivada n-ésima, aunque se defina directamente a partir de la función, existen todas las anteriores, puesto que se han definido simultáneamente con ella. Estas consideraciones, inmanentes en la misma definición, son las que más caracterizan y distinguen a estas derivadas de las corrientes.

Con un ejemplo veremos mejor lo antedicho a la vez que se apreciará bien claramente la mayor generalidad de estas derivadas. Sea $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \operatorname{sen} e^{\frac{1}{x^2}}$, para $x \neq 0$, y nula en el origen. El primer factor de la función, y por lo tanto la función toda, es un infinitésimo de tipo exponencial, siendo por consiguiente de orden mayor que n arbitrario. Así resulta que la función coincide con un polinomio idénticamente nulo, cuando se prescinde de infinitésimos de orden superior: la función admite, pues, infinitas derivadas y todas son nulas. Por otro lado la función derivada $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} \operatorname{sen}. e^{\frac{1}{x^2}} - \frac{2}{x^3} \cos. e^{\frac{1}{x^2}}$ es discontinua en el origen (con oscilación infinita) y por consiguiente f(x) no admite derivada segunda; además ninguna de las infinitas derivadas de Peano es derivable P (Peano) por ser todas discontinuas.

Peano mismo estudió fácilmente las propiedades formales de sus derivadas que, naturalmente son las mismas que para las corrientes. Después para encontrarnos con un progreso real debemos llegar hasta el año 1935 en que el matemático francés Denjoy publica un trabajo fundamental sobre el problema de la nueva derivación donde sienta las bases para su ulterior estudio.

Denjoy comenzó estudiando el punto básico para toda derivada, a saber, si ella determina la primitiva o función de la cual procede. A tal efecto ideó un proceso transfinito y constructivo que permitiera el cálculo efectivo de la primitiva, generalizando su conocida totalización; de este modo solucionó de un golpe dos problemas: por un lado daba directamente la primitiva con lo cual quedaba resuelto por el otro, el problema de si la derivada determinaba a la primitiva, en una palabra, demostró también el teorema fundamental del cálculo integral. Sometidas a esta prueba esencial las nuevas derivadas dejaban de ser una mera curiosidad, ya que sobre ellas podía construirse una teoría análoga y paralela a la de nuestro cálculo; como en la integración se podía ampliar el campo de aplicación manteniendo en pié las ideas fundamentales.

Para profundizar las analogías se nos planteó de un modo natural indagar si se podía demostrar el teorema fundamental del cálculo integral correlativamente a como se hace en cálculo. Por otro lado como la demostración de Denjoy utilizaba los números transfinitos también nos propusimos eliminarlos para satisfacer a los que todavía mantienen escrúpulos o repugnancia hacia tal método de razonar que, además de cómodo y seguro, es de una eficacia extraordinaria. La pauta es bien conocida: comenzar por los teoremas del valor medio, y así lo hicimos.

En anteriores comunicaciones a la Unión Matemática Argentina, ya dimos cuenta de que todos los teoremas del valor medio pueden generalizarse para las derivadas de Peano; con ello la analogía con las derivadas ordinarias quedó definitivamente confirmada. No volveremos sobre la cuestión y pasaremos adelante.

Como consecuencia del teorema del incremento finito generalizado hemos demostrado la propiedad distributiva para la derivación, es decir, que la derivada m-ésima de la derivada n-ésima es precisamente la derivada $(n+m)$-ésima de la función, o de otra manera

$$[f^{(n)}(x)]^{(m)} = f^{(n+m)}(x) \quad \text{o} \quad D^m D^n f(x) = D^{m+n} f(x)$$

pero en cambio, como ya dijimos antes pueden existir $D^n f(x)$ y $D^{n+m} f(x)$ sin que la primera admita derivada m-ésima; esta es la única característica de la derivación ordinaria que se pierde. La mayor generalidad de las derivadas (P) se obtiene, pues, a un precio bien módico.

Y ahora viene algo muy curioso. Aún en el caso en que $f^{(n+1)}(x)$ no sea la derivada de $f^{(n)}(x)$, siguen en pie los teoremas del valor medio, por ejemplo, $f^{(n)}(x+h) - f^{(n)}(x) = hf^{(n+1)}(x+\text{h})$ a pesar de que la función del segundo miembro no sea la derivada de la del primer miembro. Lo mismo acontece cuando las derivadas, sin relación entre ellas, no son consecutivas. Una generalización se presenta naturalmente después de eso; *definiremos a $f^{(n+m)}(x)$ como derivada m-ésima de $f^{(n)}(x)$.*

Si aplicamos la anterior definición a la función $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} \operatorname{sen} . e^{\frac{1}{x^2}} - \frac{2}{x^3} \cos . e^{\frac{1}{x^2}}$ (derivada de $e^{-\frac{1}{x^2}} \operatorname{sen} . e^{\frac{1}{x^2}}$) resulta tener infinitas derivadas todas nulas y en cambio no es derivable (P) por ser discontinua. Este nuevo concepto permite derivar funciones discontinuas (no todas) manteniendo en pie los teoremas de la media.

La mayor generalidad de la derivación de Peano es evidente cuando se considera un solo punto, pero para un solo punto y hasta para un conjunto numerable de puntos no merecería la pena preocuparse de ninguna innovación. Será necesario estudiar si puede darse un ejemplo de función derivable (P) y no diferenciable en ningún punto. Referente a este punto hemos obtenido el siguiente teorema:

Cuando una derivada n-ésima de Peano es acotada en todo un segmento se confunde en todo él con la correspondiente derivada ordinaria.

El mismo teorema se puede dar en forma puntual considerando acotada a una función en un punto cuando lo es en todo un entorno del mismo. Para derivadas acotadas las definiciones de Cauchy y de Peano son equivalentes, luego la novedad de la derivación (P) se circunscribe a las derivadas no acotadas. Para las derivadas finitas, sabemos por un razonamiento de Baire, que son puntualmente no acotadas, esto es, que en el interior de un segmento cualquiera se puede encontrar otro en que la función es acotada y, en estos segmentos, se confundirán las dos derivadas. Resulta, pues, que las derivadas finitas se confunden para conjuntos abiertos densos topológicamente, lo que no es ótice para que dicho conjunto sea de medida infinitamente pequeña.

La demostración del anterior teorema, principal motivo de la comunicación, presenta analogías con la demostración de ciertos teoremas de carácter tauberianos o inversos, que como es bien sabido pertenecen a la teoría de la sumación de series divergentes. En particular el parecido es notable con el teorema de Hardy que afirma la convergencia de las series sumables Cesaro (C_1) cuando el término general es de la forma $0\left(\frac{1}{n}\right)$. Una tal analogía con un criterio de convergencia induce a pensar que será difícil dar una condición necesaria y suficiente para dilucidar cuando las dos derivaciones coincidirán, piénsese solamente en que nunca se da un criterio definitivo, lo que obliga a formular una sucesión de criterios cada vez más afinados. En nuestro caso la condición dada es simplemente suficiente, puesto que existen derivadas ordinarias no acotadas.

La semejanza con los teoremas tauberianos no termina aquí, ya que la generalización debida a Landau del teorema de Hardy tiene correlativo en nuestra teoría. El teorema de Landau se limita a reemplazar la doble acotación de Hardy $u = 0\left(\frac{1}{n}\right)$ por una acotación simple $u_n < 0\left(\frac{1}{n}\right)$ o $u_n > 0\left(\frac{1}{n}\right)$. Así, si se substituye la hipótesis de la doble acotación de la derivada (P) por la acotación superior, o inferior, de la misma manera se puede concluir que ambas derivaciones coinciden.

Son muchas las analogías y contactos que se pueden establecer entre estos estudios de la derivación y otros capítulos de la Matemática. Aparte de la sumación de series, de lo que ya hemos hablado, se nos han presentado estrechas relaciones con el álgebra y el cálculo de diferencias finitas y, dentro de este cálculo, especialmente con las ecuaciones a diferencias finitas y el teorema de Poincaré. Con ello se confirma una vez más las múltiples aplicaciones que puede tener la fecunda teoría de funciones de variable real en el resto de la matemática.