LAS FUNCIONES DE GREEN DE LA ECUACION DE KLEIN-GORDON

por

MARIO SCHÖNBERG

Departamento de Física, San Pablo (Brasil)

(Recibido el 1 de noviembre de 1946)

(Continuación)

8. — *Ondas con energías positiva y negativa.*

Consideremos las dos funciones

$$D^{(+)}(x) = \frac{i}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[i(\vec{K},\vec{r}) - ik_0 x_0\right]\frac{d_3\vec{K}}{k_0} \tag{140}$$

$$D^{(-)}(x) = \frac{i}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[i(\vec{K},\vec{r}) + ik_0 x_0\right]\frac{d_3\vec{K}}{k_0} \tag{141}$$

$D(x)$ puede ser expresado en términos de $D^{(+)}(x)$ y $D^{(-)}(x)$:

$$D(x) = \frac{1}{2}\left[D^{(+)}(x) - D^{(-)}(x)\right]. \tag{142}$$

Las funciones $D^{(\pm)}(x)$ son soluciones de la ecuación de Klein-Gordon

$$(\Box + \chi^2)\, D^{(\pm)}(x) = 0, \tag{143}$$

como se puede ver fácilmente si tenemos presenta (140) y (141). $D^{(\pm)}(x)$ puede ser caracterizada como la solución de (143) que satisface las condiciones iniciales

$$[D^{(\pm)}(x)]_{(x_0=0)} = \frac{i}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i(\vec{K},\vec{r})]\frac{d_3\vec{K}}{k_0} = \frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}H_0^{(1)}(i\chi r) \quad (144)$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_0}D^{(\pm)}(x)\right]_{(x_0=0)} = \pm\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i(\vec{K},\vec{r})]d_3\vec{K} = \pm 2\pi\delta(\vec{r}). \quad (145)$$

Las funciones $D^{(\pm)}(x)$ pueden ser expresadas mediante funciones de Hankel:

$$D^{(\pm)}(x) = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}F^{(\pm)}(r, x_0) \quad (146)$$

$$F^{(+)}(r,x_0) = \begin{cases} \frac{1}{2}H_0^{(2)}(\chi\sqrt{x_0^2-r^2}) & x_0 > r \\ -\frac{1}{2}H_0^{(1)}(\chi\sqrt{x_0^2-r^2}) & r > x_0 > -r \\ -\frac{1}{2}H_0^{(1)}(\chi\sqrt{x_0^2-r^2}) & -r > x_0 \end{cases} \quad (148)$$

$$F^{(-)}(r,x_0) = \begin{cases} -\frac{1}{2}H_0^{(1)}(\chi\sqrt{x_0^2-r^2}) & x_0 > r \\ -\frac{1}{2}H_0^{(1)}(\chi\sqrt{x_0^2-r^2}) & r > x_0 > -r \\ \frac{1}{2}H_0^{(2)}(\chi\sqrt{x_0^2-r^2}) & -r > x_0. \end{cases} \quad (147)$$

Por medio de $D^{(\pm)}(x)$ podemos formar otra solución real de la ecuación de Klein-Gordon, que tiene gran importancia:

$$D_1(x) = \frac{i}{2}[D^{(+)}(x) + D^{(-)}(x)]. \quad (149)$$

Esta función es bien conocida y aparece en la teoría del positrón.

$D_1(x)$ es la solución de la ecuación de Klein-Gordon determinada por los valores iniciales

$$[D_1(x)]_{(x_0=0)} = \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial r} H_0(i\chi r) \tag{150}$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_0} D_1(x)\right]_{(x_0=0)} = 0. \tag{151}$$

9. — Hasta ahora hemos considerado la ecuación de Klein-Gordon como referida a un campo de ondas mesónicas. Ahora supondremos que la ecuación de Klein-Gordon está referida a un campo de ondas electrónicas, para investigar la contribución de las ondas con energías negativa y positiva.

Las ecuaciones (140) y (141) muestran que $D^{(+)}(x)$ está formada por la superposición de ondas planas con energía positiva $\exp[i(\vec{K},\vec{r}) - i k_0 x_0]$ mientras que $D^{(-)}(x)$ está formada por la superposición de ondas con energía negativa

$$\exp[i(\vec{K},\vec{r}) + i k_0 x_0].$$

La función $D(x)$ es una solución de la ecuación de Klein-Gordon formada por la superposición de ondas con energías de ambos signos, como resulta de (142). $D_1(x)$ está también formada por la superposición de ondas con energías negativa y positiva.

Es notable que las funciones $D^{(\pm)}(x-x')$ no se anulan cuando (x') está afuera del cono de luz de (x), como se ve en las ecuaciones (146), (147) y (148). Por lo tanto las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon representadas por $D^{(\pm)}(x)$ contienen acciones con velocidades de propagación mayores de c. Como $D^{(\pm)}(x)$ son las únicas soluciones invariantes de la ecuación de Klein-Gordon que pueden ser formadas por superposición de ondas planas con el mismo signo de la energía y todas las longitudes de onda posibles, se ve que *es necesario considerar soluciones de la ecuación de Klein-Gordon formadas por la superposición de ondas de ambas energías (negativa y positiva), para evitar acciones con velocidades de propagación mayores de c.*

De (140) y (141) obtenemos

$$D^{(\pm)}(x) = \frac{1}{2\pi r}\int_0^\infty e^{\pm i k_0 x_0}(e^{iKr} - e^{-iKr})\frac{dK}{k_0} \tag{152}$$

$$K = \sqrt{K_1^2 + K_2^2 + K_3^2}. \tag{153}$$

La ecuación (152) da la descomposición de $D^{(\pm)}(x)$ en ondas incidentes y emergentes, que corresponden a e^{-iKr} y e^{iKr}, respectivamente. Es interesante observar que si aplicamos la interpretación usual a las ondas esféricas de $D^{(-)}(x)$ tendríamos que considerar la onda emergente con energía negativa $\frac{1}{r}\exp[ik_0 x_0 + iKr]$ como una onda incidente, porque los radios de las esferas cuyos puntos tienen la misma fase, decrecen cuando x_0 crece; la onda de energía negativa incidente $\frac{1}{r}\exp[ik_0 x_0 - iKr]$ aparece como una onda emergente, con la interpretación usual.

Las expresiones de $D(x-x')$,

$$D(x-x') = \frac{1}{2}[G_{rel}(x, x') - G_{av}(x, x')], \tag{154}$$

$$D(x-x') = \frac{1}{2}[D^{(+)}(x-x') - D^{(-)}(x-x')], \tag{155}$$

que corresponden respectivamente desde los puntos de vista de los campos de ondas mesónicas y electrónicas, corresponden también a diferentes descomposiciones de los campos radiativos en ondas emergentes e incidentes. Mientras en (154) están las ondas emergentes del campo retardado y las ondas incidentes de los campos avanzados, en (155) hay dos clases de ondas emergentes e incidentes originadas en las energías negativas y positivas. La teoría de Dirac de los fotones de energía negativa ([12]) puede ser considerada como una tentativa de introducir una descomposición del tipo (155) en el campo electromagnético.

Las singularidades de $D^{(\pm)}(x-x')$ en el cono de luz de (x), no nos permiten obtener soluciones $\psi^{(\pm)}(x)$ de la ecuación homogénea de Klein-Gordon referida a una inhomogeneidad $4\pi\rho(x)$ similar a $\psi_{irr}(x)$, y que contenga solamente ondas con energía negativa o positiva. En verdad, una tal solución sería

$$\psi^{(\pm)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} D^{(\pm)}(x-x')\,\rho(x')\,d_4 x', \tag{156}$$

pero la integral del miembro derecho de (156) no tiene significado debido a las singularidades de las funciones $D^{(\pm)}(x-x')$ sobre el cono de luz de (x). Para poder dar un significado a la integral de (156) podemos usar integración compleja para la variable x_0, pero aún usando integración compleja no podemos definir soluciones del tipo $\psi^{(\pm)}$ formadas solamente por superposición de ondas de energía negativa y positiva.

10. — Las singularidades de $D^{(\pm)}(x)$ pueden ser convenientemente analizadas por medio de las expresiones $F^{(\pm)}(r, x_0)$, similar a aquellas de $F(r, x_0)$ dadas en la sección 2. Tenemos

$$F^{(+)}(r, x_0) = \frac{1}{4}[1 + \operatorname{sgn}(x_0 - r)]\, H_0^{(2)}(\chi \sqrt{x_0^2 - r^2}) -$$

$$- \frac{1}{4}[1 - \operatorname{sgn}(x_0 - r)]\, H_0^{(1)}(\chi \sqrt{x_0^2 - r^2}) =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x_0 - r)\, J_0(\chi \sqrt{x_0^2 - r^2}) - \frac{i}{2} N_0(\chi \sqrt{x_0^2 - r^2}). \qquad (157)$$

De manera análoga obtenemos

$$F^{(-)}(r, x_0) = -\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x_0 + r)\, J_0(\chi \sqrt{x_0^2 - r^2}) -$$

$$- \frac{i}{2} N_0(\chi \sqrt{x_0^2 - r^2}). \qquad (158)$$

De (157) y (158) obtenemos

$$F^{(-)}(r, x_0) = F^{(+)}(r, -x_0). \qquad (159)$$

N_0 es la función de Neumann de orden cero, de acuerdo con la denominación usada por Courant-Hilbert (2). Es la función de Weber de orden cero, según la denominación de G. N. Watson, que la designa por Y_0. $N_0(u)$ tiene una singularidad logarítmica en el punto $u = 0$.

(160)

$$N_0(u) = \frac{2}{\pi} J_0(u) \cdot (\log \frac{u}{2} + C) + \text{series de potencias pares en } u$$

$C = 0{,}5772157\ldots$ (constante de Euler) (161)

Necesitaremos la expresión de la derivada $\frac{d}{du}N_0(u)$ que se toma generalmente como

$$\frac{d}{du}N_0(u)=N_1(u). \tag{162}$$

$N_1(u)$ es la función de Neumann de primer orden

$$N_1(u)=\frac{2}{\pi}J_1(u)\left(\log\frac{u}{2}+C\right)-\frac{2}{\pi u}+$$

$$+\text{series de potencias impares en } u. \tag{163}$$

Sin embargo, la fórmula (162) no es adecuada para los métodos simbólicos que estamos usando. Debemos tomar

$$\frac{d}{du}N_0(u)=-N_1(u)-2i\,\delta(u). \tag{164}$$

La ecuación (164) resulta inmediatamente de (160) teniendo en cuenta que

$$\frac{d}{du}\log u=\frac{1}{u}-i\pi\,\delta(u). \tag{165}$$

Obtenemos de (157) y (158), y teniendo presente (18) y (164)

$$D^{(+)}(x)=\frac{\delta(x_0-r)}{r}-\frac{\chi}{2}\frac{\operatorname{sgn}(x_0-r)}{\sqrt{x_0^2-r^2}}J_1\left(\chi\sqrt{x_0^2-r^2}\right)+$$

$$+\frac{i\chi}{2}\frac{N_1\left(\chi\sqrt{x_0^2-r^2}\right)}{\sqrt{x_0^2-r^2}}-\delta(x_0^2-r^2). \tag{166}$$

$$D^{(-)}(x)=\frac{\delta(x_0+r)}{r}+\frac{\chi}{2}\frac{\operatorname{sgn}(x_0+r)}{\sqrt{x_0^2-r^2}}J_1\left(\chi\sqrt{x_0^2-r^2}\right)+$$

$$+\frac{i\chi}{2}\frac{N_1\left(\chi\sqrt{x_0^2-r^2}\right)}{\sqrt{x_0^2-r^2}}-\delta(x_0^2-r^2). \tag{167}$$

Teniendo presente (29) y (30) obtenemos de (166) y (167)

$$D^{(+)}(x-x') = G^{1}_{ret}(x,x') + \frac{\chi}{2}\frac{H_1^{(1)}(\chi\sqrt{(x^\mu-x'^\mu)(x_\mu-x'_\mu)})}{\sqrt{(x^\mu-x'^\mu)(x_\mu-x'_\mu)}} - \\ -\delta([x^\mu-x'^\mu][x_\mu-x'_\mu]). \tag{168}$$

$$D^{(-)}(x-x') = G_{av}(x,x') + \frac{\chi}{2}\frac{H_1^{(1)}(\chi\sqrt{(x^\mu-x'^\mu)(x_\mu-x'_\mu)})}{\sqrt{(x^\mu-x'^\mu)(x_\mu-x'_\mu)}} - \\ -\delta([x^\mu-x'^\mu][x_\mu-x'_\mu]). \tag{169}$$

Estas ecuaciones son importantes porque muestran la relación entre las funciones $D^{(\pm)}(x-x')$ y las funciones de Green para las soluciones avanzada y retardada. También son importantes desde otro punto de vista, ya que muestran las relaciones entre las funciones de Green y la solución fundamental $V(x,x')$ de la ecuación de Klein-Gordon, por ser

$$V(x,x') = -\frac{\pi\chi}{2}\frac{N_1(\chi\sqrt{(x^\mu-x'^\mu)(x_\mu-x'_\mu)})}{\sqrt{(x^\mu-x'^\mu)(x_\mu-x'_\mu)}}. \tag{170}$$

Obtenemos de (168) y (169)

$$D_1(x-x') = iG(x,x') + \frac{i\chi}{2}\frac{H_1^{(1)}(\chi\sqrt{(x^\mu-x'^\mu)(x_\mu-x'_\mu)})}{\sqrt{(x^\mu-x'^\mu)(x_\mu-x'_\mu)}} - \\ -i\delta([x^\mu-x'^\mu][x_\mu-x'_\mu]). \tag{171}$$

Cuando $\chi=0$, la solución fundamental se torna

$$[V(x,x')]_{(\chi=0)} = \frac{1}{(x^\mu-x'^\mu)(x_\mu-x'_\mu)} \tag{172}$$

y

$$[D^{(+)}(x-x')]_{(\chi=0)} = [D(x-x')]_{(\chi=0)} - \frac{i}{\pi}[V(x,x')]_{(\chi=0)} \tag{173}$$

$$[D^{(-)}(x-x')]_{(\chi=0)} = -[D(x-x')]_{(\chi=0)} - \frac{i}{\pi}[V(x,x')]_{(\chi=0)} \tag{174}$$

$$[D_1(x-x')]_{(\chi=0)} = \frac{1}{\pi}[V(x, x')]_{(\chi=0)} \cdot \qquad (175)$$

Es importante hacer notar que tenemos siempre

$$D^{(+)}(x-x') = D(x-x') - \frac{i}{\pi} V(x-x') + \text{términos regulares.} \qquad (176)$$

$$D^{(-)}(x-x') = -D(x-x') - \frac{i}{\pi} V(x-x') + \text{términos regulares.} \qquad (177)$$

$$D_1(x-x') = \frac{1}{\pi} V(x-x') + \text{términos regulares.} \qquad (178)$$

Designamos aquí con «términos regulares» a aquellos que no divergen cuando el intervalo entre los puntos (x) y (x') se anula. Resulta de (176) y (177) que las integrales del miembro derecho de (156) no tienen significado debido a las singularidades de $V(x, x')$. Las singularidades de $V(x, x')$ no son las mismas en el caso general cuando $\chi \neq 0$ y en el caso particular cuando $\chi = 0$; esta circunstancia da cuenta de la no validez del principio de Huyghens para campos cuyo cuanto tiene masa finita.

11. — *Funciones de Green en el campo de la integración compleja.*

Schrödinger (5) ha demostrado que la solución retardada de la ecuación inhomogénea de Klein-Gordon, que corresponde a un punto fuente en movimiento, puede ser expresada como una integral compleja que contiene a $\frac{N_1(\chi u)}{u}$, es decir, la solución fundamental $V(x, x')$. El método de Schrödinger puede ser extendido a cualquier clase de inhomogeneidad lo mismo que a otros tipos de soluciones de las ecuaciones inhomogéneas de Klein-Gordon. Veremos que la solución fundamental es una especie de función de Green si se utiliza integración compleja con respecto a la variable tiempo.

Consideremos las integrales $Y^{(+)}$ e $Y^{(-)}$:

$$Y^{(+)} = -\frac{i}{\pi}\int_{(L+)} V(x,x')\,\rho(x')\,dx'_0. \tag{179}$$

$$Y^{(-)} = -\frac{i}{\pi}\int_{(L-)} V(x,x')\,\rho(x')\,dx'_0. \tag{180}$$

L^+ y L^- son los caminos de integración representados en la fig. 2. Teniendo presente (163) y (170) obtenemos

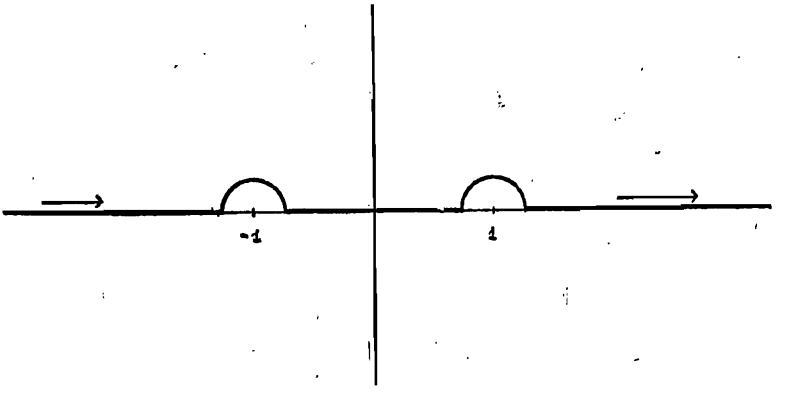

Fig. 2.

$$Y^{(+)} = \chi\int_{-\infty}^{\bar{x}_0} \frac{J_1(\chi\sqrt{(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)})}{\sqrt{(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)}}\,\rho(x')\,dx'_0 - \left[\frac{\rho(x')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]_{(x'_0=\bar{x}_0)}. \tag{181}$$

$$\bar{x}_0 = x_0 - |\vec{r}-\vec{r}'|. \tag{182}$$

$$Y^{(-)} = \chi\int_{\bar{\bar{x}}_0}^{+\infty} \frac{J_1(\chi\sqrt{(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)})}{\sqrt{(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)}}\,\rho(x')\,dx'_0 - \left[\frac{\rho(x')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]_{(x'_0=\bar{x}_0)}. \tag{183}$$

$$\bar{\bar{x}}_0 = x_0 + |\vec{r}-\vec{r}'|. \tag{184}$$

De donde

$$\psi_{rel}(x) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d_3x' \int_{(L+)} V(x, x') \rho(x') \, dx'_0. \tag{185}$$

$$\psi_{av}(x) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d_3x' \int_{(L-)} V(x, x') \rho(x') \, dx'_0. \tag{186}$$

Podemos reemplazar en (185) y (186) la función $V(x, x')$ por alguna otra función $U(x, x')$ tal, que la diferencia $V(x, x') - U(x, x')$ sea analítica y regular para todo valor real de x'_0.

Es notable que no es de ninguna manera necesario que $\sqrt{(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)}\, U(x, x')$ sea una función del argumento $s = \sqrt{(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)}$; y si es una función de este argumento, no necesariamente debe ser una solución de la ecuación de Bessel

$$\frac{d^2f}{ds^2} + \frac{1}{s}\frac{df}{ds} + \left(1 - \frac{1}{s^2}\right) f = 0. \tag{187}$$

Las consideraciones precedentes muestran que si tratamos de definir las funciones $\psi^{(\pm)}(x)$ por medio de integración compleja, en el miembro derecho de (156), tenemos una gran arbitrariedad. En verdad, debemos necesariamente usar integración real con respecto a x'_0 para los términos que provienen de la parte de $D^{(\pm)}(x - x')$ que se asemeja a δ; por otra parte hay términos que pueden ser integrados por integración compleja o real, pero el resultado depende esencialmente de la clase de integración que se utilice.

Las consideraciones precedentes, referentes a la posibilidad de reemplazar $V(x, x')$ por otras funciones muestran que tenemos

$$\psi_{rel}(x, x') = i \int_{-\infty}^{+\infty} d_3x' \int_{(L+)} D_1(x - x') \rho(x') \, dx'_0. \tag{188}$$

$$\psi_{av}(x, x') = i \int_{-\infty}^{+\infty} d_3x' \int_{(L-)} D_1(x - x') \rho(x') \, dx'_0. \tag{189}$$

Si ponemos

$$2\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots dx'_0 = \int_{(L+)} \ldots dx'_0 + \int_{(L-)} \ldots dx'_0 \qquad (190)$$

obtenemos

$$\psi_{lig}(x) = i \int_{-\infty}^{+\infty} D_1(x-x')\, \rho(x')\, dx'_0. \qquad (191)$$

El método de obtener soluciones de la ecuación inhomogénea de Klein-Gordon por intermedio de $V(x, x')$, está relacionado con el usado por Sommerfeld para la ecuación de D'Alembert (13). Ya hemos visto que la función $V(x, x')$ se convierte en $s^{-2} = [(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)]^{-1}$ cuando $\chi = 0$; de manera que la fórmula de Sommerfeld puede ser obtenida de (185) colocando $\chi = 0$. Veremos en la siguiente sección que el método de Sommerfeld puede ser extendido a la ecuación de Klein-Gordon.

12. — Consideremos la ecuación diferencial elíptica

$$(\Delta - \chi^2)\,\psi = \left(\sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial^2}{\partial y_\mu{}^2} - \chi^2\right)\psi = -4\pi\rho. \qquad (192)$$

La función $W(y, y')$

$$W(y, y') = -\frac{\pi\chi}{2}\frac{N_1(\chi R)}{R} \qquad (193)$$

$$R = \sqrt{\sum_{\mu=0}^{3}(y_\mu - y'_\mu)^2} \qquad (194)$$

es una solución de la ecuación

$$(\Delta - \chi^2)W = -4\pi^2\,\delta(y_0 - y'_0)\,\delta(y_1 - y'_1)\,\delta(y_2 - y'_2)\,\delta(y_3 - y'_3). \qquad (195)$$

Sea Ω un volumen del espacio cuatridimensional encerrado por la superficie Σ. Para dos funciones ϕ, ψ cualesquiera, re-

gulares en Ω, tenemos

$$\int_{(\Omega)} (\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi)d\Omega = \int_{(\Sigma)} \left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right) d\boldsymbol{\Sigma} \qquad (196)$$

n = normal exterior a $\boldsymbol{\Sigma}$.

Tomemos ψ como solución de (192) que se anula en el infinito y $\phi = W(y, y')$; el dominio de integración sea todo el espacio cuatridimensional, menos una pequeña esfera S con centro en el punto (y) y radio ε. Como

$$\left(\sum_{\mu=0}^{3} \frac{\partial^2}{\partial y'^2_\mu} - \chi^2\right) W(y, y') = 0 \qquad (197)$$

en Ω, obtenemos de (196) y (192)

(198)

$$-4\pi \int_{\Omega} W(y, y')\,\rho(y')\,d\Omega = \int_{(S)} \left[W(y, y')\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial}{\partial n} W(y, y')\right] dS.$$

Cuando ε tiende hacia cero, el primer término bajo la integral en el miembro derecho de (198) da una contribución nula a la integral, porque la mayor singularidad de $W(y, y')$ es R^{-2}. Por lo tanto

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{(S)} \left[W(y, y')\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial}{\partial n} W(y, y')\right] dS$$

$$= -\psi(x) \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{(S)} \frac{2}{R^3}\, dS = -4\pi^2\psi(x). \qquad (199)$$

De donde

$$\psi(y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W(y, y')\,\rho(y')\,d_4y'. \qquad (200)$$

La ecuación (195) es una consecuencia evidente de la (200).

La ecuación elíptica (192) se transforma en la ecuación in-

homogénea de Klein-Gordon por el cambio de variables

$$y_0 = ix_0, \quad y_1 = x_1, \quad y_2 = x_2, \quad y_3 = x_3. \tag{201}$$

$W(y, y')$ se transforma en $V(x, x')$. Las ecuaciones (185) y (186) se pueden considerar como las formas transformadas de (200).

13. — Podemos usar como funciones de Green para la integración compleja una función sin singularidades logarítmicas $U(x, x')$

$$U(x, x') = \frac{i\pi\chi}{2} \frac{J_1(\chi|\sqrt{(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)}|)}{\sqrt{(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)}} + \\ + \frac{1}{(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)}. \tag{202}$$

Se ve fácilmente que

$$\psi_{ret}(x) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d_3x' \int_{(L+)} U(x, x')\, \rho(x')\, dx'_0. \tag{203}$$

$$\psi_{av}(x) = \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d_3x' \int_{(L-)} U(x, x')\, \rho(x')\, dx'_0. \tag{204}$$

14. — La función $\frac{J_1(\chi s)}{s}$.

Hemos visto que las varias funciones de Green de la ecuación de Klein-Gordon difieren de las correspondientes para la ecuación de D'Alembert en términos que contienen a la función $\frac{J_1(\chi s)}{s}$. Como estos términos se refieren precisamente al diferente comportamiento de los campos mesónico y electromagnético es importante examinar las propiedades de $\frac{J_1(\chi s)}{s}$.

$\frac{J_1(\chi s)}{s}$ es una solución de la ecuación de Klein-Gordon

$$(\Box+\chi^2)\,\frac{J_1(\chi s)}{s}=0, \tag{205}$$

que es igual a $-\frac{\chi}{2}$ sobre el cono de luz de (x). De donde resulta que

$$(\Box+\chi^2)\left[\frac{J_1(\chi s)}{4s}\,(1+\mathrm{sgn}\,(s^2))\right]=\chi\delta(s^2) \tag{206}$$

$$(\Box+\chi^2)\left[\frac{J_1(\chi s)}{2s}\{1+\mathrm{sgn}\,(x_0-x'_0-|\vec{r}-\vec{r}'|)\}\right]=$$

$$=\chi\,\frac{\delta(x_0-x'_0-|\vec{r}-\vec{r}'|)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}. \tag{207}$$

$$(\Box+\chi^2)\left[\frac{J_1(\chi s)}{2s}\{1-\mathrm{sgn}\,(x_0-x'_0+|\vec{r}-\vec{r}'|)\}\right]=$$

$$=\chi\,\frac{\delta(x_0-x'_0+|\vec{r}-\vec{r}'|)}{|\vec{r}-\vec{r}'|}. \tag{208}$$

Estas fórmulas conducen inmediatamente a la expresión de las funciones de Green de la ecuación de Klein-Gordon; basta tener presente que

$$\Box\delta(s^2)=4\pi\delta(x_0-x'_0)\,\delta(x_1-x'_1)\,\delta(x_2-x'_2)\,\delta(x_3-x'_3). \tag{209}$$

No podemos obtener una solución de la ecuación homogénea de Klein-Gordon de la forma

$$\psi_{ir}(x)=\frac{\chi}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{J_1(\chi s)}{s}\,\rho(x')\,d_4x' \tag{210}$$

porque $\frac{J_1(\chi s)}{s}$ diverge cuando $s^2=-\infty$. Si limitamos la integración a la región del espacio-tiempo interior a los semiconos

del pasao o del futuro del punto (x), o a toda la región interior al cono de luz de (x) no obtenemos ninguna otra solución de la ecuación homogénea de Klein-Gordon debido a las ecuaciones (206), (207) y (280). Consideremos sin embargo las funciones

$$\overline{\psi}_{irr}^{(+)}(x) = \frac{\chi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [1+\mathrm{sgn}\,(x_0 - x'_0 - |\vec{r}-\vec{r}'|)] \frac{J_1(\chi s)}{s} \rho(x')\, d_4x'. \tag{211}$$

$$\overline{\psi}_{irr}^{(-)}(x) = \frac{\chi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [1-\mathrm{sgn}\,(x_0 - x'_0 + |\vec{r}-\vec{r}'|)] \frac{J_1(\chi s)}{s} \rho(x')\, d_4x'. \tag{212}$$

Obtenemos de (207) y (208)

$$(\Box+\chi^2)\,\overline{\psi}_{irr}^{(+)}(x) = \chi^2 [\psi_{ret}(x)]_{(\chi=0)}. \tag{213}$$

$$(\Box+\chi^2)\,\overline{\psi}_{irr}^{(-)}(x) = \chi^2 [\psi_{av}(x)]_{(\chi=0)}. \tag{214}$$

De donde

$$\psi_{ret}(x) = \frac{1}{\chi^2} \Box\, \overline{\psi}_{irr}^{(+)}(x) \tag{215}$$

$$\psi_{av}(x) = \frac{1}{\chi^2} \Box\, \overline{\psi}_{irr}^{(-)}(x) \tag{216}$$

$\overline{\psi}_{irr}^{(+)}$ $\overline{\psi}_{irr}^{(-)}$ pueden ser convenientemente expresados por integrales complejas

$$\overline{\psi}_{irr}^{(+)}(x) = \frac{\chi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d_3x' \int_{(L+)} \frac{J_1(\bar{\chi}|s|)}{s} \rho(x')\, dx'_0. \tag{217}$$

$$\overline{\psi}_{irr}^{(-)}(x) = -\frac{\chi}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d_3x' \int_{(L-)} \frac{J_1(\chi|s|)}{s} \rho(x')\, dx'_0. \tag{218}$$

L^+ y L^- son los caminos de integración representados en la fig. 2. Las ecuaciones (217) y (218) evidentemente están relacionadas con las (203) y (204).

15. — M. Riesz (7) ha dado un método de integración de las ecuaciones de diferenciales parciales hiperbólicas de segundo orden en las cuales aparecen funciones que están vinculadas a las soluciones fundamentales de Hadamard. En el caso de la ecuación de Klein-Gordon la función de Riesz es $Z^\alpha(x, x')$

$$Z^\alpha(x, x') = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}{\Gamma(l+1)\,\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}-l\right)} \chi^{2l} Z_0^{\alpha+2l}(x, x') \tag{219}$$

$$Z_0^\alpha(x, x') = \frac{2\pi}{H(\alpha)} [(x^\mu - x'^\mu)(x_\mu - x'_\mu)]^{\frac{\alpha-4}{2}} = \frac{2\pi}{H(\alpha)} s^{\alpha-4} \tag{220}$$

$$H(\alpha) = \pi 2^{\alpha-1} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}-1\right). \tag{221}$$

Se ve fácilmente que

$$Z^\alpha(x, x') = \frac{1}{2^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \left(\frac{s}{\chi}\right)^{\frac{\alpha-4}{2}} J_{\frac{\alpha-4}{2}}(\chi s). \tag{222}$$

$Z_0^\alpha(x, x')$ es la función de Riesz para la ecuación de D'Alembert; está relacionada con la solución fundamental mediante esta ecuación

$$Z_0^\alpha(x, x') = \frac{2\pi}{H(\alpha)} \Big[V(x, x') \Big]_{(\chi=0)}^{\frac{\alpha-4}{2}}. \tag{223}$$

Se ve inmediatamente que

$$(\Box + \chi^2)\, Z^{\alpha+2} = Z^\alpha. \tag{224}$$

Riesz ha demostrado que

$$[\psi_{rel}(x)]_{(\chi=0)} = I_{re.}{}^2 \rho(x) \tag{225}$$

$$I_{rel}{}^{\alpha}\rho(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [1+\mathrm{sgn}(x_0 - x'_0 - |\vec{r}-\vec{r'}|)] Z_0{}^{\alpha}(x,x')\rho(x')\, d_4x'. \quad (226)$$

La integral del miembro derecho de (226) tiene significado para valores de α con parte real mayor que dos, pero si consideramos $I_{rel}{}^{\alpha}\rho(x)$ como una función del parámetro complejo α, puede ser prolongada analíticamente para otros valores de α. La prolongación analítica para valores con parte real $R\alpha$ positiva puede ser efectuada por una integración parcial. Efectivamente, pongamos $\xi = x'_0 - x_0$ y obtendremos

$$s^{\alpha-4} = \frac{1}{\alpha-2}\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\, s^{\alpha-2}. \quad (227)$$

De donde

$$I_{rel}{}^{\alpha}\rho(x) = \frac{1}{2^{\alpha-2}\left[\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2}\int_{-\infty}^{+\infty} d_3x' \int_{-\infty}^{-|\vec{r}-\vec{r'}|} \frac{1}{\xi}\left(\frac{\partial}{\partial\xi}\, s^{\alpha-2}\right)\rho(x')\, d\xi. \quad (228)$$

Por integración parcial obtenemos de (228), para $R\alpha > 2$

$$I_{rel}{}^{\alpha}\rho(x) = -\frac{1}{2^{\alpha-2}\left[\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2}\int_{-\infty}^{+\infty} d_3x' \int_{-\infty}^{-|\vec{r}-\vec{r'}|} s^{\alpha-2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\rho}{\xi}\right) d\xi. \quad (229)$$

Esta fórmula nos permite prolongar analíticamente $I_{rel}{}^{\alpha}\rho(x)$ para $R\alpha > 0$; así obtenemos

$$I_{rel}{}^{2}\rho(x) = -\int_{-\infty}^{+\infty} d_3x' \int_{-\infty}^{-|\vec{r}-\vec{r'}|} \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\rho}{\xi}\right) d\xi = -\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\rho}{\xi}\right)_{(\xi=-|\vec{r}-\vec{r'}|)} d_3x' =$$

$$= [\psi_{rel}(x)]_{(\chi=0)}. \quad (230)$$

Podemos escribir fórmulas análogas a la (225), para la ecuación de Klein-Gordon

$$\psi_{rel}(x) = J_{rel}{}^{2}\rho(x) \quad (231)$$

$$\psi_{av}(x) = J_{av}{}^{2}\,\rho(x). \tag{232}$$

Para valores de α con parte real mayor que dos

$$J_{rel}{}^{\alpha}\,\rho(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [1+\mathrm{sgn}\,(x_0 - x'_0 - |\vec{r}-\vec{r'}|)]\, Z^{\alpha}(x,x')\,\rho(x')\,d_4x' \tag{233}$$

$$J_{av}{}^{\alpha}\,\rho(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [1-\mathrm{sgn}\,(x_0 - x'_0 + |\vec{r}-\vec{r'}|)]\, Z^{\alpha}(x,x')\,\rho(x')\,d_4x'. \tag{234}$$

Para otros valores de α los funcionales $J_{rel}{}^{\alpha}$ y $J_{av}{}^{\alpha}$ están definidos por prolongación analítica. Así, por ejemplo, obtenemos de (229) y (219)

$$J_{rel}{}^{\alpha}\,\rho(x) = \frac{1}{2^{\alpha-2}\left[\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2} \int_{-\infty}^{+\infty} [1+\mathrm{sgn}\,(x_0 - x'_0 - |\vec{r}-\vec{r'}|)]\, s^{\alpha-2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_0}\left[\frac{\rho(x')}{x_0 - x'_0}\right] d_4x' + 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} [1+\mathrm{sgn}\,(x_0 - x'_0 - |\vec{r}-\vec{r'}|)]\,\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\chi^{2l}}{H(\alpha+2l)} \frac{s^{\alpha-4+2l}}{\Gamma(l+1)\,\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}-l\right)}\,\rho(x')\,d_4x'. \tag{235}$$

Y en forma análoga obtenemos

$$J_{av}{}^{\alpha}\,\rho(x) = \frac{1}{2^{\alpha-1}\left[\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]^2} \int_{-\infty}^{+\infty} [1-\mathrm{sgn}\,(x_0 - x'_0 + |\vec{r}-\vec{r'}|)]\, s^{\alpha-2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x'_0}\left[\frac{\rho(x')}{x_0 - x'_0}\right] d_4x' + 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} [1-\mathrm{sgn}\,(x_0 - x'_0 + |\vec{r}-\vec{r'}|)]\,\Gamma\left(1-\frac{2}{\alpha}\right)$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\chi^{2l}}{H(\alpha+2l)} \frac{s^{\alpha-4+2l}}{\Gamma(l+1)\,\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}-l\right)}\,\rho(x')\,d_4x'. \tag{236}$$

Resulta de (235) y (236) que

$$J_{ret}^{2}\,\rho(x) = I_{ret}^{2}\,\rho(x) -$$

$$\frac{\chi}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[1+\mathrm{sgn}\,(x_0-x'_0-|\vec{r}-\vec{r'}|)]\frac{J_1(\chi s)}{s}\,\rho(x')\,d_4x' \qquad (237)$$

$$J_{av}^{2}\,\rho(x) = I_{av}^{2}\,\rho(x) -$$

$$\frac{\chi}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}[1-\mathrm{sgn}\,(x_0-x'_0+|\vec{r}-\vec{r'}|)]\frac{J_1(\chi s)}{s}\,\rho(x')\,d_4x' \qquad (238)$$

$$I_{av}^{\alpha}\,\rho(x) = [J_{av}^{\alpha}\,\rho(x)]_{(\chi=0)}. \qquad (238a)$$

Obtuvimos pues (231) y (232). Hemos demostrado la validez de (231) y (232) haciendo uso de nuestro conocimiento previo de las soluciones avanzada y retardada de la ecuación inhomogénea de Klein-Gordon. Así hemos deducido expresiones de aquellas soluciones del tipo de Riesz, sin usar el método de Riesz. Ahora deduciremos directamente por este método la (231) y (232). Resulta de la definición de los funcionales J_{ret}^{α} y J_{av}^{α} que para valores de α cuya parte real es suficientemente grande

$$(\Box+\chi^2)\,J_{ret}^{\alpha+2}\,\rho(x) = J_{ret}^{\alpha}\,\rho(x) \qquad (239)$$

$$(\Box+\chi^2)\,J_{av}^{\alpha+2}\,\rho(x) = J_{av}^{\alpha}\,\rho(x), \qquad (240)$$

y

$$J_{ret}^{\alpha}\,J_{ret}^{\beta}\,\rho(x) = J_{ret}^{\alpha+\beta}\,\rho(x), \qquad (241)$$

$$J_{av}^{\alpha}\,J_{av}^{\beta}\,\rho(x) = J_{av}^{\alpha+\beta}\,\rho(x). \qquad (242)$$

Estas ecuaciones son evidentemente válidas para todos los valores del parámetro α para el cual podemos definir los funcionales J por prolongación analítica. Se puede ver que la prolongación analítica es posible cuando $\alpha=0$; por lo tanto

$$(\Box+\chi^2)\,J_{ret}^{\alpha}\,\rho(x) = 4\pi\,\rho(x) \qquad (243)$$

$$(\Box+\chi^2)\,J_{av}^{\alpha}\,\rho(x) = 4\pi\,\rho(x), \qquad (244)$$

como consecuencia de (239) y (240); y

$$J_{rel}{}^{0}\,\rho(x)=4\pi\,\rho(x) \tag{245}$$

$$J_{av}{}^{0}\,\rho(x)=4\pi\,\rho(x), \tag{246}$$

como consecuencia de (241) y (242). Así obtenemos (231) y (232).

16. — Las consideraciones precedentes indican que el método de Riesz está basado en la posibilidad de definir el operador unidad y operadores diferenciales, como prolongación analítica de operadores integrales reales con parámetros complejos. Así obtenemos un método que nos permite evitar el uso de la función δ de Dirac, y sus derivadas. Para obtener un mejor discernimiento de estas cuestiones consideremos la integral de Riemann-Liouville de orden fraccional

$$Y^{\alpha}f(u)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{-\infty}^{u} f(t)\,(u-t)^{\alpha-1}\,dt. \tag{247}$$

Esta representación de Y^{α} es válida para valores de α con parte real positiva, pero puede fácilmente ser extendida a otros valores por prolongación analítica. La prolongación puede ser efectuada por integraciones parciales sucesivas, y conduce a las ecuaciones

$$Y^{0}f(u)=f(u) \tag{248}$$

$$Y^{-n}f(u)=\frac{d^{n}}{du^{n}}f(u), \tag{249}$$

donde n es un número entero positivo. Como

$$\int_{-\infty}^{x_0-\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} \mathbf{Z}^{\alpha}(x,x')\rho(x')\,dx'_0=\frac{1}{2^{\alpha/2}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)} \tag{250}$$

$$\int_{-\infty}^{x_0-\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}\left[(x_0-x'_0-\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|)(x_0-x'_0+\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|)\right]^{\frac{\alpha-4}{2}}\rho(x')\,dx'_0-$$

$$-\frac{1}{2^{\alpha/2}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\int_{-\infty}^{x_0-\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} s^{\alpha-4}\left[\frac{(\chi s)^2}{4\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}-\frac{(\chi s)^3}{16\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}+\ldots\right]\rho(x')\,dx'_0$$

y

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)}\int_{-\infty}^{x_0-\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}\left[(x_0-x'_0-\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|)\,(x_0-x'_0+\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|)\right]^{\frac{\alpha-4}{2}}\rho(x')\,dx'_0=$$

$$=Y^{\frac{\alpha-2}{2}}\left\{(x_0-x'_0+\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|)^{\frac{\alpha-4}{2}}\rho(x')\right\}_{(x'_0=x_0-\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|)} \qquad (251)$$

Por lo tanto tenemos

$$\int_{-\infty}^{x_0-\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} Z^{\alpha}(x,x')\,\rho(x')\,dx'_0=$$

$$\frac{1}{2^{\alpha/2}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\left[Y^{\frac{\alpha-2}{2}}\left\{(x_0-x'_0+\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|)^{\frac{\alpha-4}{2}}\rho(x')\right\}_{(x'_0=x_0-\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|)}\right.$$

$$\left.-\int_{-\infty}^{x_0-\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} s^{\alpha-4}\left[\frac{(\chi s)^2}{4\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)}-\frac{(\chi s)^3}{16\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)}+\ldots\right]\rho(x')\,dx'_0\right. \qquad (252)$$

De donde

$$\left[\int_{-\infty}^{x_0-\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|} Z^{\alpha}(x,x')\,\rho(x')\,dx'_0\right]_{(\alpha=2)}=\left[\frac{\rho(x')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}\right]_{(x'_0=x_0-\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|)}-$$

$$-\frac{\chi}{2}\int_{-\infty}^{x_0-\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}\frac{J_1(\chi s)}{s}\,\rho(x')\,dx'_0. \qquad (253)$$

Las ecuaciones (248) y (249) muestran que el uso de la prolongación analítcia de la integral de Riemann-Liouville conduce a los mismos resultados que se obtienen simbólicamente por

medio de integrales vinculadas a la función δ y sus derivadas. Como la forma de Riesz de las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon puede ser derivada de las propiedades de las integrales prolongadas de Riemann-Liouville, el método de Riesz puede ser considerado como un resultado del reemplazo de las integrales con funciones δ, por aquellas del tipo Riemann-Liouville. Así vemos las profundas analogías entre las ecuaciones (237) y (238) y aquellas obtenidas mediante G_{rel} y G_{av}. La ecuación (233) es análoga a la ecuación (23) para las funciones de Green.

17. — Se puede obtener fácilmente generalizaciones de las soluciones de la forma de Riesz.

Sea $\xi_{rel}(x, x'; \alpha)$ una función regular, de α, analítica, en un dominio que contiene el valor $\alpha = 0$ y tal que

$$\xi_{rel}(x, x'; \alpha) = \xi_{1,rel}(x, x'; \alpha) + \\ + \xi_{2,rel}(x, x'; \alpha)\,[1+\mathrm{sgn}\,(x_0 - x'_0 - |r-r'|)]; \qquad (254)$$

las funciones $\xi_{1,rel}$ y $\xi_{2,rel}$ deben satisfacer las condiciones

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \xi_{1,rel}(x, x'; \alpha)\,\rho(x')\,dx'_0\right]_{(\alpha=0)} = \left[\frac{\rho(x')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]_{(x'_0 = x_0 - |\vec{r}-\vec{r}'|)} \qquad (255)$$

$$\xi_{2,rel}(x, x'; 0) = -\frac{\chi}{4}\,\frac{J_1(\chi s)}{s}. \qquad (256)$$

Resulta

$$\psi_{rel}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \xi_{rel}(x, x'; \alpha)\,\rho(x')\,d_4x'. \qquad (257)$$

Las fórmulas de Riesz corresponden a la elección particular

$$\xi_{1,rel}(x, x'; \alpha) = Z_0{}^{\alpha}(x, x')\,[1+\mathrm{sgn}\,(x_0 - x'_0 - |r-r'|)] \qquad (258)$$

$$\xi_{2,rel}(x, x'; \alpha) = \Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}\right) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\chi^{2l} Z_0^{\alpha+2l}}{\Gamma(l+1)\,\Gamma\left(1-\frac{\alpha}{2}-l\right)}. \qquad (259)$$

Evidentemente ésta no es la elección más simple de $\xi_{1,rel}$ y $\xi_{2,rel}$.

Podríamos tomar $\xi_{2,rel}$ independiente de α.

18. — *Campos creados por fuentes puntuales.*

Hay una relación muy simple entre los campos creados por fuentes puntuales en movimiento y las funciones de Green. Llamemos $d\tau$ el elemento de línea de universo de la fuente puntual móvil; el correspondiente valor de $\rho(x)$ lo representaremos por una integral tomada a lo largo de la línea de universo del punto:

$$\rho(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\rho}(\tau)\, \delta(x_0 - x_0(\tau))\, \delta(x_1 - x_1(\tau)) \\ \delta(x_2 - x_2(\tau))\, \delta(x_3 - x_3(\tau)\, d\tau. \qquad (260)$$

La ecuación (35) se transforma, en este caso, en

$$(\Box + \chi^2)\, \psi_\rho = 4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\rho}(\tau) \prod_{\mu=0}^{3} \delta(x_\mu - x_\mu(\tau))\, d\tau. \qquad (261)$$

Por lo tanto

$$\psi_{\rho,rel}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{rel}(x, x(\tau))\, \bar{\rho}\,(\tau)\, d\tau \qquad (262)$$

$$\psi_{\rho,av}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{av}(x, x(\tau))\, \bar{\rho}(\tau)\, d\tau \qquad (263)$$

$$\psi_{\rho,irr}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} D(x - x(\tau))\, \bar{\rho}(\tau)\, d\tau. \qquad (264)$$

Por consiguiente

$$G_{rel}(x, x(\tau)) = \frac{\delta}{\delta\rho(\tau)} \psi_{\rho,rel}(x) \tag{265}$$

$$G_{av}(x, x(\tau)) = \frac{\delta}{\delta\rho(\tau)} \psi_{\rho,av}(x) \tag{266}$$

$$D(x-x(\tau)) = \frac{\delta}{\delta\rho(\tau)} \psi_{\rho,irr}(x). \tag{267}$$

Las funciones ψ_ρ también pueden ser usadas en el caso de una distribución nucleónica continua para obtener las diferentes clases de campos. Escribamos

$$\rho(x) = \rho(\vec{r}_0, \tau). \tag{268}$$

$\vec{r}_0$ es el vector de posición tridimensional, en el tiempo O, del elemento nucleónico de distribución que ocupa el punto (x); τ es la longitud de arco de la línea de universo de este elemento nucleónico. Evidentemente tenemos

$$\psi_{rel}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{rel}(x, \vec{r}_0)\, d\vec{r}_0 \tag{269}$$

$$\psi_{av}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{av}(x, \vec{r}_0)\, d\vec{r}_0, \tag{270}$$

con

$$\psi_{rel}(x, \vec{r}_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{rel}(x, x(\tau))\, \rho(\vec{r}_0, \tau)\, \frac{D(x_1(\tau), x_2(\tau), x_3(\tau))}{D(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})} \frac{dx_0}{d\tau} d\tau \tag{271}$$

$$\psi_{av}(x, \vec{r}_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{av}(x, x(\tau))\, \rho(\vec{r}_0, \tau) \frac{D(x_1(\tau), x_2(\tau), x_3(\tau))}{D(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})} \frac{dx_0}{d\tau} d\tau \tag{272}$$

$\dfrac{D(x_1(\tau), x_2(\tau), x_3(\tau))}{D(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)})}$ es el determinante jacobiano que da

los cambios en la densidad de la distribución nucleónica para un observador en reposo con respecto al elemento nucleónico en cuestión. Las $\psi(x, \vec{r}_0)$ son generalizaciones para el caso dinámico general del campo creado por un elemento nucleónico que, en el caso estático es $\rho(\vec{r}_0)\,|\vec{r}-\vec{r}'|^{-1}\,\exp[-\chi|\vec{r}-\vec{r}'|]$.

19. — *La función de Green para campos cuasiestáticos.*

Consideraremos ahora distribuciones nucleónicas tales que en los desarrollos de Fourier de $\rho(x)$ no haya frecuencias mayores que $c\chi$. El campo creado por una tal distribución puede ser llamada un campo cuasiestático. Veremos que es posible dar a la solución correspondiente a un campo cuasiestático una forma que describa convenientemente el pasaje del caso dinámico al estático.

En el caso del campo cuasiestático no hay diferencia entre los campos retardado, avanzado y ligado, de manera que podemos representar la solución de la ecuación (35) por $\psi(x)$, sin usar sufijo. Hemos visto que

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{i_3}(x, x')\,\rho(x')\,d_4x'. \tag{273}$$

Es conveniente reemplazar en (273) $G_{i_3}(x, x')$ por su desarrollo de Fourier para obtener una fórmula que muestre claramente la transición al caso estático.

(274)

$$G_{i_3}(x, x') = \frac{1}{2\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\int_{-\chi}^{\chi} \exp[-iK_0(x_0-x'_0)-\sqrt{\chi^2-K_0^2}\,|\vec{r}-\vec{r}'|]\,dK_0$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\chi}^{\chi} dK_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[-iK_0(x_0-x'_0)- \\ -\sqrt{\chi^2-K_0^2}\,|\vec{r}-\vec{r}'|]\,\rho(x')\,\frac{d_4x'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}. \tag{275}$$

Podemos pues escribir

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\chi}^{\chi} dK_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\sqrt{\chi^2 - K_0^2}\,|\vec{r} - \vec{r}'|\right] \frac{d_3 x'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-iK_0(x_0 - x'_0)\right] \rho(x')\, dx'_0 \qquad (276)$$

Cuando $\rho(x')$ no depende de x'_0

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-iK_0(x_0 - x'_0)\right] \rho(x')\, dx'_0 = \rho(x') \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-iK_0(x_0 - x'_0)\right] dx'_0 =$$

$$= 2\pi\, \rho(x')\, \delta(K_0), \qquad (277)$$

y obtenemos la solución estática de Yukawa

$$\psi_{est}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\chi|\vec{r} - \vec{r}'|\right] \rho(x') \frac{d_3 x'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \qquad (278)$$

Resulta de (126) que

$$G_{is}(x, x') = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G_{rel}(x, \bar{x}) \frac{\operatorname{sen} \chi(\bar{x}_0 - x'_0)}{\bar{x}_0 - x'_0}$$

$$\delta(\bar{x}_1 - x'_1)\, \delta(\bar{x}_2 - x'_2)\, \delta(\bar{x}_3 - x'_3)\, d_4 \bar{x} = \frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{sen}\left[\chi\left[x_0 - x'_0 - |\vec{r} - \vec{r}'|\right]\right]}{\left[(x_0 - x'_0) - |\vec{r} - \vec{r}'|\right] |\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$- \frac{\chi}{\pi} \int_{-\infty}^{-|\vec{r} - \vec{r}'|} \frac{\operatorname{sen} \chi(\bar{x}_0 - x'_0)}{\bar{x}_0 - x'_0} \frac{J_1\left(\chi \sqrt{(\bar{x}_0 - x'_0)^2 - |\vec{r} - \vec{r}'|^2}\right)}{\sqrt{(\bar{x}_0 - x'_0)^2 - |\vec{r} - \vec{r}'|^2}}\, d(\bar{x}_0 - x_0). \qquad (279)$$

La ecuación (279) muestra que $G_{is}(x, x')$ no diverge sobre el cono de luz de (x). Por lo tanto, las frecuencias isobaras no dan origen a acciones con velocidad de propagación igual a c.

20. — Schrödinger (5) ha señalado que las formas (133) y (134) de las soluciones retardadas de la ecuación de Klein-Gordon no indican con claridad la existencia de efectos de alcance y no muestran satisfactoriamente como ocurre la transición de un campo dinámico a uno estático. Podemos obtener una forma de la solución que es conveniente para la discusión de esta transición, separando en la función de Green las contribuciones de las frecuencias isobaras y no isobaras:

$$\psi_{rel}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{is}(x, x')\, \rho(x')\, d_4x' + \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{rel}(x, x')\, \rho(x')\, d_4x'. \qquad (280)$$

De donde

$$\psi_{rel}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\chi}^{+\chi} dK_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-iK_0(x_0 - x'_0) - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\chi^2 - K_0^2}\, |\vec{r} - \vec{r}'|\right] \rho(x') \frac{d_4x'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{rel}(x, x')\, \rho(x')\, d_4x'. \qquad (281)$$

En forma similar obtenemos

$$\psi_{av}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\chi}^{+\chi} dK_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-iK_0(x_0 - x'_0) - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\chi^2 - K_0^2}\, |\vec{r} - \vec{r}'|\right] \rho(x') \frac{d_4x'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{av}(x, x')\, \rho(x')\, d_4x'. \qquad (282)$$

En la transición al caso estático, los términos (281) y (282) que contienen a Γ tienden hacia cero, y aquellos que provienen de G_{is} se transforman en la solución de Yukawa (278). Se ve que la transición de un campo general a uno cuasiestático es en realidad más interesante que la transición de un campo cuasiestático a uno estático. La situación no es exactamente igual en el caso de los campos electromagnético y mesónico, porque en un campo electromagnético avanzado o retardado los efec-

tos de radiación desaparecen sólo en el caso estático, mientras que ya desaparecen en los campos mesónico cuasiestáticos. La consideración de los efectos de radiación muestran que en lugar de las descomposiciones (281) y (282), es físicamente más interesante tomar

$$\psi_{ret}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{is}(x, x')\, \rho(x')\, d_4x' + \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, x')\, \rho(x')\, d_4x' + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} D(x-x')\, \rho(x')\, d_4x' \qquad (283)$$

$$\psi_{av}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_{is}(x, x')\, \rho(x')\, d_4x' + \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma(x, x')\, \rho(x')\, d_4x' - \\ - \int_{-\infty}^{+\infty} D(x-x')\, \rho(x')\, d_4x'. \qquad (284)$$

En las ecuaciones (283) y (284) la parte radiativa que proviene de las frecuencias no isobaras, está separado de las contribuciones no radiativas de estas frecuencias.

Pudimos obtener expresiones de las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon que muestran claramente la transición a los campos estáticos, pero no indican convenientemente los efectos de alcance porque estos efectos pueden ser debidos tanto a frecuencias isobaras como a no isobaras, como hemos visto en la sección 7.

21. — *La función de Green exterior.*

Todas las funciones de Green que hemos considerado en las secciones precedentes desaparecen en la parte exterior del cono de luz del punto (x). Ahora examinaremos una función de Green que desaparece en el interior del cono de luz (x)

$$\widetilde{G}_{lig}(x, x') = G(x, x') + \frac{\chi}{2} \frac{J_1(\chi s)}{s} = \delta(s^2) + \\ + \frac{\chi}{4} \frac{J_1(\chi s)}{s} [1 - \mathrm{sgn}(s^2)]. \qquad (285)$$

$J_1(\chi s)$ diverge para $s = i\infty$; pero podemos obtener soluciones de la ecuación (35) por medio de $\widetilde{G}_{lig}(x, x')$ cuando $\rho(x')$ tiende hacia cero en el contorno del espacio, de tal manera que

$$\lim_{r' \to \infty} [1 - \mathrm{sgn}(s^2)] \frac{J_1(\chi s)}{s} \rho(x') = 0, \tag{286}$$

y la integral en (287) converge

$$\widetilde{\psi}_{lig}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widetilde{G}_{lig}(x, x')\, \rho(x')\, d_4 x'. \tag{287}$$

Aplicaciones físicas de este tipo de soluciones son desconocidas; sin embargo, son muy interesantes porque describen en forma relativísticamente invariante acciones con velocidad de propagación mayor que c.

Es importante notar que

$$[\widetilde{\psi}_{lig}(x)]_{\chi=0} = = [\psi_{lig}(x)]_{\chi=0} \tag{288}$$

Por lo tanto, en el caso de campo de cuanto de masa cero no existe la posibilidad de obtener acciones con velocidad de propagación mayor que c por medio de una función de Green externa.

Podemos también conseguir una función de Green que desaparece exponencialmente para $s' = i\infty$ en la región exterior al cono de luz de (x).

$$G^+(x, x') = G(x, x') + D_1(x - x'). \tag{289}$$

$G^+(x,x')$ no se anula en el interior del cono de luz de (x) y tiene singularidades ordinarias sobre este cono de luz, que provienen del término $D_1(x - x')$.

No parece ser posible obtener una función de Green de la ecuación de Klein-Gordon que tiende hacia cero exponencialmente para $r' = \infty$, en la parte exterior del cono de luz de (x); se anula en el interior de este cono de luz y es relativísticamente invariante. Todas las funciones de Green de la ecuación de Klein-

Gordon sólo pueden diferir de $G(x, x')$ por una solución de la ecuación homogénea; conocemos solamente tres soluciones relativísticamente distintas $D^{(+)}(x-x')$, $D^{(-)}(x-x')$ y $\frac{J_1(\chi s)}{s}$; y es muy probale que no haya otras. Por medio de estas tres soluciones evidentemente no es posible derivar de $G(x, x')$ una función de Green que satisface a las condiciones que le hemos impuesto. Es importante hacer notar a este respecto que $\frac{J_1(\chi s)}{s}$ no es una solución de la ecuación homogénea de Klein-Gordon en todo el espacio cuatridimensional, ya que

$$(\Box+\chi^2)\,\frac{N_1(\chi s)}{s} = -\,2i\chi\,\delta(s^2). \tag{290}$$

La ecuación (290) es una consecuencia de la relación

$$-\,\frac{\chi}{2}\,\frac{N_1(\chi s)}{s} = D_1 - i\,\frac{\chi}{4}\,[1-\mathrm{sgn}(s^2)]\,\frac{J_1(\chi s)}{s} \tag{291}$$

que resulta de la expresión de D_1 en términos de funciones cilíndricas y de

$$(\Box+\chi^2)\left[\,\mathrm{sgn}(s^2)\,\frac{J_1(\chi s)}{s}\right] = 4\chi\,\delta(s^2), \tag{292}$$

que es evidentemente equivalente a la ecuación (206).

22. — Resulta de (290) que $\mathcal{G}(x, x')$

$$\mathcal{G}(x, x') = \delta(s^2) - \frac{i\chi}{2}\,\frac{N_1(\chi s)}{s}, \tag{294}$$

es una función de Green

$$(\Box+\chi^2)\,\mathcal{G}(x, x') = 4\pi\,\delta(x_0-x'_0)\,\delta(x_1-x'_1)\,\delta(x_2-x'_2)\,\delta(x_3-x'_3). \tag{295}$$

Por lo tanto $G^{(1)}(x, x')$ y $G^{(2)}(x, x')$

$$\mathcal{G}^{(1)}(x, x') = \delta(s^2) - \frac{\chi}{2}\,\frac{H_1^{(1)}(\chi s)}{s}, \tag{296}$$

$$\mathcal{G}^{(2)}(x,x') = \delta(s^2) + \frac{\chi}{2}\frac{H_1^{(2)}(\chi s)}{s}, \tag{297}$$

son también funciones de Green. Estas funciones de Green son notablemente más simples que aquellas consideradas hasta ahora, pero tienen singularidades ordinarias sobre el cono de luz de (x) y son complejas.

Es importante hacer notar que las funciones $\frac{N_1(\chi s)}{s}$, $\frac{H_1^{(1)}(\chi s)}{s}$ y $\frac{H_1^{(2)}(\chi s)}{s}$, aparte de tener un término que diverge como s^{-2} sobre el cono de luz, tienen también discontinuidades sobre el cono de luz provenientes de sus términos logarítmicos, porque el argumento de s salta de 0 a $\frac{\pi}{2i}$ cuando (x') atraviesa el cono de luz de (x). Los términos logarítmicos dan también origen a una divergencia, aparte de la discontinuidad. Todas las funciones de Green que hemos considerado tienen singularidades análogas a δ y discontinuidades simples sobre el cono de luz de (x), pero no todas tienen divergencias ordinarias. Hemos visto en la sección 2 que las discontinuidades simples y las del tipo δ están relacionadas, en el caso de las funciones de Green G, G_{ret} y G_{av}. Veremos ahora que algo análogo existe también en el caso de $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}^{(1)}$ y $\mathcal{G}^{(2)}$. Resulta de (164) que

$$\mathcal{G}(x,x') = \frac{i}{2s}\frac{d}{ds}N_0(\chi s) \tag{298}$$

$$\mathcal{G}^{(1)}(x,x') = \frac{1}{2s}\frac{d}{ds}H_0^{(1)}(\chi s) \tag{299}$$

$$\mathcal{G}^{(2)}(x,x') = -\frac{1}{2s}\frac{d}{ds}H_0^{(2)}(\chi s) \tag{300}$$

$\mathcal{G}(x,x')$ está relacionada con $\tilde{G}_{lig}(x,x')$ por la ecuación

$$\mathcal{G}(x,x') = \tilde{G}_{lig}(x,x') + iD_1(x-x'). \tag{301}$$

23. — *Acerca de la elección de la solución fundamental.*

Los matemáticos consideran generalmente a $V(x, x')$ como la solución fundamental de la ecuación de Klein-Gordon. Hemos visto que esto está justificado por una comparación con la ecuación elíptica (192). Sin embargo, la elección de $V(x, x')$ tiene algunos inconvenientes porque no es una solución de la ecuación homogénea de Klein-Gordon. Obtenemos de (290)

$$(\Box+\chi^2)\, V(x, x') = i\pi\, \chi^2\, \delta\,(s^2). \qquad (302)$$

Por lo tanto $V(x, x')$ no es enteramente la análoga de s^{-2} para el caso de la ecuación de Klein-Gordon. Parece preferible elegir $\pi D_1(x, x')$ como solución fundamental, porque es una solución de la ecuación homogénea de Klein-Gordon que se convierte en s^{-2} para $\chi = 0$. Otra ventaja de esta elección es que la función $\pi D_1(x-x')$ es real en todo el espacio-tiempo, otra propiedad de s^{-2} que no posee $V(x, x')$.

REFERENCIAS

(1) J. Hadamard: *Le problème de Cauchy*. París, 1932.
(2) Courant-Hilbert: *Methoden der Mathematischen Physik II*. Berlín.
(3) H. J. Bhabha: *Proc. Roy. Soc.* A, *172*. 384, 1939.
(4) E. C. C. Stückelberg: *Société de Physique et d'Histoire Naturelle de Genève*, 1939. (este trabajo no fué posible obtenerlo en el Brasil, el autor sólo conoce la referencia de Schrödinger acerca de su contenido).
(5) E. Schrödinger: *Proc. Roy. Irish Academy A, 57*, v, 1941.
(6) M. Schönberg: *Physica, 5*, 553 y 961, 1938.
Journal de Physique 1, 201, 1940.
(7) M. Riesz: *L'intégrale de Riemann-Liouville*. París. Gauthiers Villars, 1938.
(8) W. Pauli: *Rev. Mod. Phy., 15*, 175, 1943.
(9) M. Schönberg: *Phys. Rev., 67*, 193, 1945.
(10) P. A. M. Dirac: *Proc. Cam. Phil., 30*, 100, 1934.
(11) J. Leite Lopes y M. Schönberg: *Phys. Rev., 67*, 122, 1945.
(12) P. A. M. Dirac: *Proc. Roy Soc. A., 180*, 1, 1942.
(13) A. Sommerfeld: *En Frank-von Mises II*, Braunschweig, 1935.

S. Paulo. Departamento de Física de la Facultade de Ciencias, 15 de agosto 1946.

Nota: En un trabajo reciente (Nature, June 1, 1946, pág. 734) el profesor Gustafson cita un trabajo de N. E. Fremberg a aparecer en los Proc. Roy. Soc. y en el cual el método de Riesz se aplica a la ecuación de Klein-Gordon. El profesor Gustafson utiliza la fórmula (231) que es solamente un caso particular de un resultado general dado en la pág. 17 del trabajo de Riesz (referencia (7)).

(Traducido por J. Balseiro y D. Canals Frau)