CURVAS PARALELAS SOBRE SUPERFICIES DE CURVATURA CONSTANTE

por

E. VIDAL ABASCAL

1. - *Introducción.* — El objeto de esta nota es generalizar la definición de curvas paralelas sobre una superficie y obtener una expresión invariante para este paralelismo sobre las superficies de curvatura constante, que generaliza la conocida expresión

$$J = \left(F - \frac{2\pi}{K}\right)^2 + \left(\frac{L}{\sqrt{K}}\right)^2,$$

invariante para las curvas geodésicamente paralelas.

2. - *Curvas paralelas.* — Definición. - *Sobre una superficie de curvatura constante* $x = x(v^1, v^2)$, *llamamos curvas paralelas a otra dada C (continua, diferenciable y con las dos primeras derivadas continuas), según un ángulo* ω, *aquellas formadas por los puntos que se obtienen considerando en cada punto de la curva C la geodésica que forme con ella el ángulo* ω *y tomando sobre estas geodésicas una distancia constante* ρ. Como caso particular, cuando $\omega = \frac{\pi}{2}$, se obtienen las curvas llamadas geodésicamente paralelas.

Suponiendo la curva simple C cerrada, correspondiente a $v^1 = 0$, de longitud L y que limita un área F sobre una porción de superficie regular $x = x(v^1, v^2)$, siendo su curvatura función de v^2, $K(v^2)$, he demostrado, en otro trabajo (¹), que el área limi-

---

(¹) E. VIDAL ABASCAL, *Area engendrada sobre una superficie por un arco de geodésica cuando uno de sus extremos recorre una curva fija y longitud de la curva descrita por el otro extremo.* Rev. Mat. Hisp. Amer., T. VII, nº 3.

tada por la curva C y la que se obtiene cuando el ángulo que forma la geodésica con C es variable $\omega(0, v^2)$ y sobre ellas se toman las distancias, también variables, $\rho(v^2)$, se halla por la fórmula

$$(1)\quad F_\rho - F = \int_0^L \frac{\operatorname{sen}\omega(0,v^2)\operatorname{sen}[\rho(v^2)\sqrt{K(v^2)}]}{\sqrt{K(v^2)}}\,dv^2 -$$

$$-\int_0^L \frac{\varkappa_g(v^2)-\omega'(0,v^2)}{K(v^2)}\operatorname{sen}[\rho(v^2)\sqrt{K(v^2)}]\,dv^2.$$

Suponiendo ahora C_ρ paralela a C, según la definición dada, será $\omega = \text{const.}$, $\rho = \text{const.}$, $K = \text{const.}$, se deduce

$$(2)\qquad F_\rho - F = L\,\frac{\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}[\rho\sqrt{K}]}{\sqrt{K}} - \frac{\cos[\rho\sqrt{K}]-1}{K}\,(2\pi - KF)$$

con la condición de validez de que para todo v^2 y para v^1, tal que $0 \leqq v^1 \leqq \rho$, sea

$$\operatorname{sen}\omega\cos[v^1\sqrt{K}] + \frac{\varkappa_g(0,v^2)}{\sqrt{K}}\operatorname{sen}[v^1\sqrt{K}] > 0.$$

3. - *Longitud de la curva paralela.* — Si a partir de C_ρ, paralela a C, tomamos $-\rho$, sobre las mismas geodésicas, obtendremos la curva de partida C, (representando por $\omega(\rho, s)$, el ángulo variable en que encuentra la geodésica a C_ρ) se deduce de (1)

$$F = F_\rho - \frac{\operatorname{sen}[\rho\sqrt{K}]}{\sqrt{K}}\int_0^{L_\rho}\operatorname{sen}\omega(\rho,s)\,ds - (\cos[\rho\sqrt{K}]-1)\left(\frac{2\pi}{K} - F_\rho\right)$$

o sea

$$F = F_\rho\cos[\rho\sqrt{K}] - \frac{\operatorname{sen}[\rho\sqrt{K}]}{\sqrt{K}}\int_0^{L_\rho}\operatorname{sen}\omega(\rho,s)\,ds - \frac{2\pi}{K}(\cos[\rho\sqrt{K}]-1)$$

de donde

$$(3) \qquad F_\rho \cos[\rho\sqrt{K}] = F +$$

$$+\frac{\operatorname{sen}[\rho\sqrt{K}]}{\sqrt{K}}\int_0^{L_\rho} \operatorname{sen}\omega(s)\,ds + \frac{2\pi}{K}(\cos[\rho\sqrt{K}]-1)$$

De (2) y (3)

$$\frac{2\pi}{K} + \frac{\operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}[\rho\sqrt{K}]}{\sqrt{K}}L - \frac{\cos[\rho\sqrt{K}]}{K}(2\pi - KF) =$$

$$= \frac{F}{\cos[\rho\sqrt{K}]} + \frac{\operatorname{sen}[\rho\sqrt{K}]}{K\cos[\rho\sqrt{K}]}\int_0^{L_\rho} \operatorname{sen}\omega(\rho, s)\,ds + \frac{2\pi}{K}\left(1 - \frac{1}{\cos[\rho\sqrt{K}]}\right)$$

de donde

$$(4) \qquad \int_0^{L_\rho} \operatorname{sen}\omega(\rho, s)\,ds = L\operatorname{sen}\omega\cos[\rho\sqrt{K}] + \frac{(2\pi - KF)\operatorname{sen}[\rho\sqrt{K}]}{\sqrt{K}}$$

por el teorema del valor medio $\int_0^{L_\rho} \operatorname{sen}\omega(\rho, s)\,ds = L_\rho \operatorname{sen}\omega^*$ sustituyendo este valor en (4), se obtiene

$$(5) \qquad L_\rho = \frac{L\operatorname{sen}\omega\cos[\rho\sqrt{K}]}{\operatorname{sen}\omega^*} + \frac{(2\pi - KF)\operatorname{sen}[\rho\sqrt{K}]}{\sqrt{K}\operatorname{sen}\omega^*}.$$

4. *Invariante paralelo*. De (2) y (5), se deduce

$$F_\rho - \frac{2\pi}{K} = \left(F - \frac{2\pi}{K}\right)\cos[\rho\sqrt{K}] + \frac{L\operatorname{sen}\omega\operatorname{sen}[\rho\sqrt{K}]}{\sqrt{K}}$$

$$\frac{L_\rho \operatorname{sen}\omega^*}{\sqrt{K}} = -\left(F - \frac{2\pi}{K}\right)\operatorname{sen}[\rho\sqrt{K}] + \frac{L}{\sqrt{K}}\operatorname{sen}\omega\cos[\rho\sqrt{K}]$$

de donde, elevando al cuadrado y sumando,

$$\left(F_\rho - \frac{2\pi}{K}\right)^2 + \frac{L_\rho^2 \operatorname{sen}^2\omega^*}{K} = \left(F - \frac{2\pi}{K}\right)^2 + \frac{L^2\operatorname{sen}^2\omega}{K}$$

expresión que generaliza el llamado invariante paralelo J, correspondiente a $\omega = \frac{2\pi}{K}$, ya que en este caso $\omega^* = \omega$.

5. - *Consecuencias.* — 1. El paralelismo que hemos definido no es recíproco; tomando a partir de C_ρ sobre las geodésicas que forman con ella el ángulo constante ω, la distancia ρ, no se obtiene, en general, la curva C, o sea, si C_ρ es paralela a C, C no es paralela a C_ρ.

La condición para que el paralelismo sea recíproco es que

$$\cos \omega(\rho, v^2) = \cos \omega \tag{6}$$

o sea, teniendo en cuenta que $\cos \omega(v^1, v^2) = \frac{\cos \omega}{\sqrt{g_{22}(v^1, v^2)}}$ ha de ser $\sqrt{g_{22}(v^1, v^2)} = 1$, pero

$$\sqrt{g_{22}} = \frac{\operatorname{sen} \omega \cos [\rho \sqrt{K}]}{\operatorname{sen} \omega(\rho, v^2)} + \frac{\varkappa_g(0, v^2) \operatorname{sen} [\rho \sqrt{K}]}{\sqrt{K} \operatorname{sen} \omega(\rho, v^2)}$$

de donde por (6)

$$\cos [\rho \sqrt{K}] + \varkappa_g \frac{\operatorname{sen} [\rho \sqrt{K}]}{\sqrt{K} \operatorname{sen} \omega} = 1$$

la condición será, por lo tanto,

$$\varkappa_g = (1 - \cos [\rho \sqrt{K}]) \frac{\sqrt{K} \operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen} [\rho \sqrt{K}]} = \sqrt{K} \operatorname{tg} \frac{\rho \sqrt{K}}{2} \operatorname{sen} \omega.$$

2. El área limitada por la curva C' paralela a C, será por la fórmula (2)

$$F_\rho - L_\rho \frac{\operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} [\rho \sqrt{K}]}{\sqrt{K}} - \frac{\cos [\rho \sqrt{K}] - 1}{K} (2\pi - K F_\rho) =$$

$$= - L_\rho \frac{\operatorname{sen} \omega \operatorname{sen} [\rho \sqrt{K}]}{\sqrt{K}} - \frac{\cos [\rho \sqrt{K}] - 1}{K} 2\pi + F_\rho \cos [\rho \sqrt{K}]$$

sustituyendo los valores de F_ρ y de L_ρ, se encuentra

$$F + \left(F + \frac{2\pi}{K} + L \frac{\operatorname{sen} \omega \cos [\rho \sqrt{K}] \operatorname{sen} [\rho \sqrt{K}]}{\sqrt{K}}\right) \left(1 - \frac{\operatorname{sen} \omega}{\operatorname{sen} \omega^*}\right).$$

SECCIÓN MATEMÁTICA
Observatorio de la Universidad de Santiago, España.

(²) E. VIDAL, *loc. cit.*