DEDUCCION SENCILLA DE LA TEORIA DEL EICONAL

por Ricardo Gans
(Instituto de Física — La Plata)

En la óptica geométrica, tanto en la propiamente dicha como en la electrónica, el eiconal desempeña un importante papel, pues es la función mediante la cual se deducen de la manera más sencilla las fallas de un objetivo. A continuación deduciremos las fórmulas pertinentes basándonos únicamente en los elementos del análisis y de la teoría de las ecuaciones diferenciales.

Hay varios eiconales. Preferiremos el de Seidel, pues la interpretación de las variables que llevan su nombre es particularmente sencilla.

Supondremos que el medio óptico sea inhomogéneo, vale decir, que el índice de refracción N sea función de las coordenadas. El caso de la óptica propiamente dicha, en que N es constante por partes, resulta entonces como límite, y es matemáticamente menos sencillo que el caso de la inhomogeneidad.

1. — *Los fundamentos*

Partimos del principio de Fermat, según el cual el tiempo de la propagación de la luz entre dos puntos fijos p_0 y p_1 es estacionario, y como la velocidad $v = c/N$ (c es la velocidad de la luz en el vacío) y $dt = ds/v$, resulta

$$\delta \int_{p_0}^{p_1} N\, ds = 0. \tag{1}$$

Tomemos z como variable independiente, de manera que ($x' = dx/dz,\ y' = dy/dz$),

$$\delta \int_{z_0}^{z_1} N(x, y, z) \,.\, \sqrt{1 + x'^2 + y'^2} \,.\, dz = 0 \tag{1'}$$

o, con la abreviación

$$F = N \,.\, \sqrt{1 + x'^2 + y'^2}, \tag{2}$$

$$\delta \int_{z_0}^{z_1} F \,.\, dz = 0 \tag{1''}$$

esto es,

$$\int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \,.\, \delta\, x + \frac{\partial F}{\partial y} \,.\, \delta\, y + \frac{\partial F}{\partial x'} \,.\, \delta\, x' + \frac{\partial F}{\partial y'} \,.\, \delta\, y' \right) dz = 0. \tag{3}$$

Como la variación y la diferenciación conmutan, tenemos

$$\delta\, x' = \frac{d}{dz}\, \delta\, x \quad , \quad \delta\, y' = \frac{d}{dz}\, \delta\, y.$$

Introduciendo estas relaciones en la (3) y aplicando integración por partes, obtenemos

$$\int_{z_0}^{z_1} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial x'} \right) \delta x + \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dz} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \delta y \right] dz +$$
$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial x'} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y'} \,.\, \delta y \right)_{p_0}^{p_1} = 0. \tag{4}$$

De esta ecuación concluimos, en virtud de la arbitrariedad de δx y δy,

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial F}{\partial x'} \right) - \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \; \frac{d}{dz}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{5}$$

y

$$\delta x_1 = \delta y_1 = \delta x_0 = \delta y_0 = 0. \tag{6}$$

Las ecuaciones (5) son las ecuaciones de Euler de la teoría de las variaciones. Las (6) expresan que los dos extremos, p_0 y p_1, de la curva, quedan invariados.

Primer corolario: Si en un dominio del espacio N es constante de manera que, según la (2), $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$, resulta de las (5) que $\frac{\partial F}{\partial x'} = \text{const.}, \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const.}$, o, en virtud de la (2), $\frac{dx}{ds} = \text{const.}, \frac{dy}{ds} = \text{const.}$, vale decir, la dirección del haz no varía; o bien, en un medio homogéneo la propagación de la luz es rectilínea.

Segundo corolario: Admitimos que N sea discontinuo en una superficie. No restringimos la generalidad si ponemos el eje z normalmente a esta superficie en un punto de la misma. Si integramos las ecuaciones (5) respecto de z desde un punto p_1 situado en una orilla de la superficie hasta el punto p_2 situado frente a p_1 en la otra orilla, obtenemos

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x'}\right)_{p_1}^{p_2} = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_{p_1}^{p_2} = 0$$

o, por el significado de F (véase la (2)),

$$N_2 \left(\frac{dx}{ds}\right)_2 = N_1 \left(\frac{dx}{ds}\right)_1, \quad N_2 \left(\frac{dy}{ds}\right)_2 = N_1 \left(\frac{dy}{ds}\right)_1. \tag{7}$$

Estas dos ecuaciones expresan la ley de refracción de Snellius.

2. — *Los grados de aproximación*

Nos limitaremos al caso más importante de la óptica: aquél en que el sistema tenga un eje óptico, es decir, que N sea simétrico alrededor de este eje; tomando este eje como eje z, N será una función de $r^2 = x^2 + y^2$ y z.

Si desarrollamos N según potencias de r, resulta

$$N = n - \frac{p}{2} \cdot (x^2 + y^2) + q\,(x^2 + y^2)^2 + \dots, \tag{8}$$

donde $n, p, q, \ldots$ son funciones de z. El hecho de que en (8) no figuran las potencias impares de r es consecuencia de la suposición de que N no posee irregularidades en el eje de las z.

De esto podemos darnos cuenta también de la siguiente manera: si desarrollamos N en serie de x e y —con coeficientes que son, por supuesto, funciones de z— deben anularse los coeficientes de las potencias impares de x y aquellos de y, porque N permanece invariante al cambiar x por $-x$ e y por $-y$. Además, no debe variar N al cambiar x por y, y al mismo tiempo y por $-x$, pues este cambio corresponde a la rotación del sistema de coordenadas en $\pi/2$ y, en virtud de la simetría supuesta de N, éste no debe variar en tal transformación. Esto da la igualdad de los coeficientes de x^2 e y^2, como también la de los coeficientes de x^4 e y^4. Así resulta

$$N = n - \frac{p}{2}(x^2 + y^2) + q\,(x^4 + y^4) + 2q'\,x^2 y^2 + \ldots .$$

Finalmente, debe ser $q' = q$ pues introduciendo coordenadas polares mediante $x = r\cos\varphi$, $y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi$, N no debe depender de φ en virtud de la simetría de rotación. Por consiguiente, resulta la (8).

Además vale

$$\sqrt{1 + x'^2 + y'^2} = 1 + \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2) - \frac{1}{8}(x'^2 + y'^2)^2 + \ldots . \tag{9}$$

La condición de convergencia $x'^2 + y'^2 < 1$ no es prácticamente ninguna restricción porque solamente nos interesan ángulos relativamente pequeños entre el haz y el eje.

De la (2) resulta, pues, teniendo en cuenta las (8) y (9),

$$F = n + \frac{n}{2}(x'^2 + y'^2) - \frac{p}{2}(x^2 + y^2) + q(x^2 + y^2)^2 - \frac{n}{8}(x'^2 + y'^2)^2$$

$$- \frac{p}{4}(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) + \ldots = F_0 + F_2 + F_4, \tag{10}$$

en que

$$F_0 = n(z)$$

$$F_2 = \frac{n}{2}(x'^2 + y'^2) - \frac{p}{2}(x^2 + y^2) \tag{11}$$

$$F_4 = q(x^2 + y^2)^2 - \frac{n}{8}(x'^2 + y'^2)^2 - \frac{p}{4}(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2).$$

3. — *La óptica geométrica gaussiana*

Si las distancias entre un punto del haz y el eje óptico, como también los ángulos entre los mismos, son tan pequeños que podemos limitarnos en F a F_0 y F_2, despreciando F_4 y los términos de orden mayor, resulta la óptica gaussiana o paraxial.

De las (5) obtenemos en este caso

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(nx') + px = 0 \\ \frac{d}{dz}(ny') + py = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Ambas ecuaciones, en las que n y p son funciones de z, son ecuaciones diferenciales de segundo orden, lineales y homogéneas. Si $U(z)$ y $V(z)$ son dos soluciones particulares de ellas, $u = aU + bV$, $v = cU + eV$ también son soluciones, con valores arbitrarios de las constantes a, b, c y e. Podemos determinar estas constantes de tal manera que en el plano z_0, al que llamaremos plano objeto,

$$u(z_0) = 1, \quad u'(z_0) = 0; \quad v(z_0) = 0, \quad v'(z_0) = 1. \tag{13}$$

Estas soluciones particulares sean el fundamento de nuestros razonamientos.

$$\begin{aligned} x &= l\,u + \lambda\,v \\ y &= m\,u + \mu\,v \end{aligned} \tag{14}$$

es entonces la solución más general del sistema (12), siendo l, λ, m, μ constantes de integración.

Para el plano objeto $z=z_0$, resulta de las (14), mediante las (13)

$$x_0=l, \; y_0=m; \; x'_0=\lambda, \; y'_0=\mu \tag{15}$$

vale decir, l, m son las coordenadas del haz en el plano objeto; λ, μ los ángulos entre el haz y el eje óptico en este plano.

Si $v(z)$ se anula no solamente para $z=z_0$ (véase la (13)) sino también para otro valor z_1 (*), el plano $z=z_1$ es el plano conjugado del plano $z=z_0$, pues cualesquiera que sean los valores λ y μ, es decir, todos los haces que salen del punto l, m en el plano objeto, se reúnen, en virtud de la propiedad $v(z_1)=0$ en el plano imagen $z=z_1$ en el mismo punto

$$x=l \,.\, u(z_1), \; y=m \,.\, u(z_1);$$

y $u(z_1)$ significa el aumento lateral.

Para todos los rayos que salen del punto en que el eje óptico corta al plano objeto z_0, vale $l=m=0$, y por la (14) son

$$x=\lambda v, \; y=\mu v$$

las ecuaciones de esta familia de haces. Los ángulos de los mismos con el eje son

$$x'=\lambda \,.\, v', \quad y'=\mu \,.\, v',$$

es decir, en el plano objeto, teniendo en cuenta la última relación (13),

$$x'_0=\lambda, \; y'_0=\mu,$$

y en el plano imagen

$$x'_1=\lambda \, v'(z_1), \quad y'_1=\mu \,.\, v'(z_1).$$

(*) En un medio inhomogéneo puede haber más de un valor z_1 para el cual $v(z_1)=0$, pero esto no nos interesa.

Por consiguiente, $v'(z_1)$ significa el aumento angular. De esta manera hemos determinado los sencillos significados de $u(z_1)$ y $v'(z_1)$.

Finalmente deduciremos una integral que nos hará falta a continuación. Las funciones u y v obedecen, según las (12), a las ecuaciones

$$\frac{d}{dz}(n\,u') + p\,u = 0$$

$$\frac{d}{dz}(n\,v') + p\,v = 0.$$

Multiplicando la segunda por u, la primera por $-v$ y sumándolas, resulta, por integración por pàrtes,

$$n(uv' - vu') = \text{const.}$$

Por las (13) se determina la constante, obteniéndose

$$n(uv' - vu') = n_0. \qquad (16)$$

Aplicando esta ecuación al plano imagen $z = z_1$, donde $v = 0$, resulta

$$n_1\, u_1\, v'_1 = n_0 = n_0\, u_0\, v'_0. \qquad (17)$$

En palabras: el producto del índice de refracción por el aumento lateral y por el aumento angular es un invariante de la representación (teorema de los senos).

4. — *Una aproximación superior*

En aproximación gaussiana nos hemos limitado al segundo orden en F, y por consiguiente al primer orden en x e y como funciones de l, λ, m, μ. Si tenemos en cuenta F_4, resultarán x e y hasta el tercer orden inclusive.

Según las (5) valen, con $F = F_0 + F_2 + F_4$,

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x'}\right)-\frac{\partial F_2}{\partial x}=-\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial F_4}{\partial x'}\right)-\frac{\partial F_4}{\partial x}\right]$$

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial F_2}{\partial y'}\right)-\frac{\partial F_2}{\partial y}=-\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial F_4}{\partial y'}\right)-\frac{\partial F_4}{\partial y}\right]$$

o, por la (11),

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dz}(nx')+px&=-\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial F_4}{\partial x'}\right)-\frac{\partial F_4}{\partial x}\right]\\ \frac{d}{dz}(ny')+py&=-\left[\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial F_4}{\partial y'}\right)-\frac{\partial F_4}{\partial y}\right],\end{aligned}\right.\qquad(18)$$

y si consideramos las ecuaciones en primera aproximación como resueltas, es decir, si conocemos $x(z)$ e $y(z)$ como soluciones de las (12), sustitueyndo éstos valores en la función F_4 definida por la (11), los segundos miembros de las (18) serán funciones conocidas de z, es decir, tenemos que integrar dos ecuaciones diferenciales de segundo orden, lineales e inhomogéneas, de la forma

$$x''+Px'+Qx=\varphi(z),\qquad(19)$$

en que

$$\varphi(z)=\frac{1}{n}\left[\frac{\partial F_4}{\partial x}-\frac{d}{dz}\left(\frac{\partial F_4}{\partial x'}\right)\right].\qquad(20)$$

Si u y v son soluciones particulares de la ecuación (19) homogeneizada, la solución de la inhomogénea (19) es

$$x=Au+Bv+\int_{z_0}^{z}\varphi(\xi)\cdot\frac{u(\xi)\,v(z)-v(\xi).u(z)}{u(\xi)\,v'(\xi)-v(\xi)\,u'(\xi)}\cdot d\xi,$$

con las constantes de integración A y B.

Sustituyendo φ por la (20), resulta, teniendo en cuenta la (16),

$$x = Au + Bv + \frac{1}{n_0}\int_{z_0}^{z}\left[\frac{\partial F_4}{\partial x} - \frac{d}{d\xi}\left(\frac{\partial F_4}{\partial x'}\right)\right][u(\xi)\,v(z) - v(\xi)\,u(z)]\,.\,d\xi \tag{21}$$

y una ecuación equivalente para y.

Aplicando integración por partes al segundo término del primer paréntesis obtenemos

$$x = Au + Bv + \frac{1}{n_0}\int_{z_0}^{z}\frac{\partial F_4}{\partial x}[u(\xi)\,v(z) - v(\xi)\,u(z)]\,d\xi$$

$$+\frac{1}{n_0}\,.\int\frac{\partial F_4}{\partial x'}\,.\,[u'(\xi)\,v(z) - v'(\xi)\,u(z)]\,d\xi +$$

$$-\frac{1}{n_0}\left[\frac{\partial F_4}{\partial x'}\,(u(\xi)\,v(z) - v(\xi)\,u(z))\right]_{\xi=z_0}^{\xi=z}$$

$$= Au + Bv + \frac{1}{n_0}\left(\frac{\partial F_4}{\partial x'}\right)_{z_0}.\,v(z) + \frac{1}{n_0}\int_{z_0}^{z}\frac{\partial F_4}{\partial x}[u(\xi)\,v(z) - v(\xi)\,u(z)]\,d\xi$$

$$+\frac{1}{n_0}\int_{z_0}^{z}\frac{\partial F_4}{\partial x'}\,.\,[u'(\xi)\,v(z) - v'(\xi)\,u(z)]\,d\xi$$

Aquí hemos utilizado las relaciones $u(z_0) = 1$, $v(z_0) = 0$ (cif. (13)).

Si reunimos los factores de $u(z)$ y los de $v(z)$ obtenemos

$$x = [A - \frac{1}{n_0}\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\partial F_4}{\partial x}v + \frac{\partial F_4}{\partial x'}v'\right)d\xi]\,u(z) + [B + \frac{1}{n_0}\left(\frac{\partial F_4}{\partial x'}\right)_{z_0}$$

$$+\frac{1}{n_0}\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\partial F_4}{\partial x}u + \frac{\partial F_4}{\partial x'}u'\right)d\xi]\,v(z)$$

vale decir, la solución se presenta en la forma

$$z = lu + \lambda\,v \tag{22}$$

siendo

$$
\left.\begin{aligned}
l &= A - \frac{1}{n_0} \cdot \int_{z_0}^{z} \left(\frac{\partial F_4}{\partial x} v + \frac{\partial F_4}{\partial x'} \cdot v' \right) . d\xi \\
\lambda &= B + \frac{1}{n_0} \cdot \left(\frac{\partial F_4}{\partial x'} \right)_{z_0} + \frac{1}{n_0} \int_{z_0}^{z} \left(\frac{\partial F_4}{\partial x} u + \frac{\partial F_4}{\partial x'} \cdot u' \right) d\xi
\end{aligned}\right\} \quad (23)
$$

funciones de z. Esta es la única diferencia entre la solución de las ecuaciones inhomogénea y homogénea (variación de las constantes). De las (23) resulta

$$
\left.\begin{aligned}
l_1 - l_0 &= - \frac{1}{n_0} \cdot \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{\partial F_4}{\partial x} v + \frac{\partial F_4}{\partial x'} v' \right) d\xi \\
\lambda_1 - \lambda_0 &= + \frac{1}{n_0} \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{\partial F_4}{\partial x} u + \frac{\partial F_4}{\partial x'} u' \right) d\xi .
\end{aligned}\right\} \quad (24)
$$

De la misma manera se deduce

$$
y = m\, u + \mu\, v, \qquad (22')
$$

con

$$
\left.\begin{aligned}
m_1 - m_0 &= - \frac{1}{n_0} \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{\partial F_4}{\partial y} \cdot v + \frac{\partial F_4}{\partial y'} \cdot v' \right) . d\xi \\
\mu_1 - \mu_0 &= + \frac{1}{n_0} \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{\partial F_4}{\partial y} u + \frac{\partial F_4}{\partial y'} \cdot u' \right) . d\xi .
\end{aligned}\right\} \quad (24')
$$

Multipliquemos las (24) y (24′) por $-\delta\lambda, +\delta l, -\delta\mu, +\delta m$ respectivamente y supongamos que estas variaciones no dependen de z pero que, por lo demás, sean arbitrarias. Por esta constancia de las variaciones podemos ponerlas bajo el signo integral. Sumando las ecuaciones después de estas multiplicaciones, y teniendo en cuenta que

$$\delta x = u \,.\, \delta l + v \,.\, \delta\lambda$$
$$\delta y = u \,.\, \delta m + v \,.\, \delta\mu$$

y que en la aproximación paraxial

$$x' = lu' + \lambda v'$$
$$y' = mu' + \mu v',$$

de manera que

$$\delta x' = u' \,.\, \delta l + v' \,.\, \delta\lambda$$
$$\delta y' = u' \,.\, \delta m + v' \,.\, \delta\mu,$$

resulta

$$-(l_1 - l_0)\,\delta\lambda + (\lambda_1 - \lambda_0)\,\delta l - (m_1 - m_0)\,\delta\mu + (\mu_1 - \mu_0)\,\delta m$$

$$= \frac{1}{n_0}\int_{z_0}^{z_1}\left(\frac{\partial F_4}{\partial x}\delta x + \frac{\partial F_4}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F_4}{\partial x'} \,.\, \delta x' + \frac{\partial F_4}{\partial y'} \,.\, \delta y'\right) d\xi = \frac{1}{n_0} \,.\, \delta \int_{z_0}^{z_1} F_4 \,.\, d\xi$$

o introduciendo la función

$$S = \frac{1}{n_0} \,.\, \int_{z_0}^{z_1} F_4 \,.\, d\xi, \tag{25}$$

$$-(l_1 - l_0)\,\delta\lambda + (\lambda_1 - \lambda_0)\,\delta l - (m_1 - m_0)\,\delta\mu + (\mu_1 - \mu_0\,\delta m = \delta S. \tag{26}$$

Por la (11), la F_4 está dada como función de 4.º grado de las x, y, x', y', y si sustituímos en ella

$$\begin{aligned} x &= lu + \lambda v; & x' &= lu' + \lambda v' \\ y &= mu + \mu v; & y' &= mu' + \mu v', \end{aligned} \tag{27}$$

porque las l, λ, m, μ son constantes en la aproximación deseada, y si calculamos las integrales cuyos integrandos son funciones de 4.º grado de las funciones conocidas $u, v, u' v'$, resulta S en la forma

$$\begin{aligned} S = C_0(l^2+m^2)^2 + C_1(l^2+m^2)(\lambda^2+\mu^2) + C_2(l^2+m^2)(l\lambda+m\mu) \\ + C_3(\lambda^2+\mu^2)(l\lambda+m\mu) + C_4(l\lambda+m\mu)^2 + C_5(\lambda^2+\mu^2)^2, \end{aligned} \tag{28}$$

es decir, como función de 4.º grado de las l, λ, m, μ y como función particularmente sencilla, puesto que en ella sólo figuran las combinaciones $l^2+m^2, \lambda^2+\mu^2$ y $l\lambda+m\mu$. Esto lo hubiéramos podido prever sin cálculo, porque solamente ellas son invariantes respecto de una rotación del sistema de coordenadas alrededor del eje z, es decir, sólo ellas corresponden a la simetría rotatoria de nuestro sistema óptico. C_0 y C_5, por ejemplo, tienen los valores

$$C_0 = \frac{1}{n_0} \int_{z_0}^{z_1} q\,.\,(\xi)\, u^4\, d\xi, \quad C_5 = \frac{1}{n_0}\,.\int_{z_0}^{z_1} q(\xi)\,.\, v^4\, d\xi.$$

Por la forma (28) resulta

$$\delta S = \frac{\partial S}{\partial l}\,.\,\delta l + \frac{\partial S}{\partial \lambda}\,.\,\delta\lambda + \frac{\partial S}{\partial m}\,.\,\delta m + \frac{\partial S}{\partial \mu}\,.\,\delta\mu,$$

y comparando los factores de las variaciones en los dos miembros de la (26) obtenemos

$$\begin{aligned} l_1 - l_0 = -\frac{\partial S}{\partial \lambda}\,; \quad m_1 - m_0 = -\frac{\partial S}{\partial \mu} \\ \lambda_1 - \lambda_0 = +\frac{\partial S}{\partial l}\,; \quad \mu_1 - \mu_0 = +\frac{\partial S}{\partial m}. \end{aligned} \tag{29}$$

Estas sencillas relaciones nos dan las variaciones de las constantes mediante la (28). Las «constantes» tienen en el plano objeto z_0 los valores $l_0, \lambda_0, m_0, \mu_0$ y varían con z para tomar en el plano objeto z_1 los valores $l_1, \lambda_1, m_1, \mu_1$. Pero para un haz paraxial son verdaderas constantes, vale decir, tienen también en el plano imagen los valores $l_0, \lambda_0, m_0, \mu_0$, de manera que las coordenadas en el plano z_1 del haz real son, en virtud de la (27),

$$X_1 = l_1 u_1 + \lambda_1 v_1$$
$$Y_1 = m_1 u_1 + \mu_1 v_1.$$

En cambio, las coordenadas del haz correspondiente paraxial son

$$x_1 = l_0 u_1 + \lambda_0 v_1$$
$$y_1 = m_0 u_1 + \mu_0 v_1.$$

Ambos pares de ecuaciones se simplifican más por $v_1 = 0$, dando

$$X_1 = l_1 u_1, \quad x_1 = l_0 u_1$$
$$Y_1 = m_1 u_1, \quad y_1 = m_0 u_1,$$

de modo que las diferencias que nos interesan toman los valores

$$\begin{aligned} \Delta x_1 &= (l_1 - l_0) u_1 \\ \Delta y_1 &= (m_1 - m_0) u_1. \end{aligned} \tag{30}$$

Resulta que para el cálculo de estas diferencias precisamos solamente las dos primeras ecuaciones (29). Por esta razón no nos interesa la constante C_0 en (28), pues el primer término de esa ecuación no depende de λ ni de μ. Las otras cinco constantes dan las fallas de un objetivo y cada una de ellas es característica de una de las cinco fallas elementales siguientes: aberración esférica, coma, astigmatismo, curvatura de la imagen y distorsión.

Las variables de Seidel son particularmente sencillas porque en aproximación paraxial son constantes, las constantes de integración (el astrónomo diría los elementos de la trayectoria). Por esta razón la función S (la función de perturbación del astrónomo) es de 4.º grado.