NOTA SOBRE LOS VALORES LIMITES DE FUNCIONES ANALITICAS

A. P. Calderón, A. González Domínguez, A. Zygmund

1. Es bien sabido que en un producto de Blaschke de n factores

$$w = B_n(z) = \prod_1^n \frac{\bar{a}_k}{|a_k|} \frac{a_k - z}{1 - \bar{a}_k z},$$

el afijo de $B_n(e^{i\vartheta})$ recorre n veces la circunferencia $|w|=1$, cuando ϑ varía de 0 a 2π. Es, pues, natural preguntarse si algo análogo sucede en el caso de que el producto tenga infinitos factores. En el Teorema II de esta nota demostramos que efectivamente el afijo del primer miembro toma en tal caso todos los valores de la circunferencia unitaria infinitas veces; y esta propiedad es válida para una categoría mucho más amplia de funciones, según queda establecido en el Teorema I, del cual es el II inmediato corolario.

2. El Teorema I generaliza resultados ya conocidos que pasamos a enunciar.

Sea $w = f(z)$ una función regular en el interior del círculo unidad que cumple las condiciones:

$$|f(z)| < 1 \qquad \text{para} \qquad |z| < 1,$$

$$|f(e^{i\vartheta})| = |\lim_{r \to 1} f(re^{i\vartheta})| = 1,$$

para casi todo ϑ de $(0, 2\pi)$. Hössjer (1) demostró que en tales hipótesis, los afijos de $f(e^{i\vartheta})$ cubren toda la circunferencia con la posible excepción de un conjunto de medida nula.

(1) G. Hössjer, *Ueber die Randwerte beschraenkter Funktionen*; Acta Lit-

Nevanlinna (2) generalizó el teorema anterior en los términos siguientes. Sea $w=f(z)$ una función regular en $|z|<1$, tal que

$$|f(z)|<1 \text{ para } |z|<1\,; \quad |f(e^{i\vartheta})|=|\lim_{r\to 1} f(re^{i\vartheta})|=1$$

para casi todo ϑ del arco $\alpha<\vartheta<\beta$.

En tales condiciones, o bien los afijos de $f(e^{i\vartheta})$ $(\alpha<\vartheta<\beta)$, cubren la circunferencia $|w|=1$ con la posible excepción de un conjunto de medida nula, o $f(z)$ es prolongable analíticamente a través del arco.

Finalmente, Seidel y Doob (3) generalizaron el resultado de Nevanlinna, mostrando que el conjunto de medida nula que figura en el enunciado del teorema, es vacío. Es decir, que los afijos de $f(e^{i\vartheta})$ cubren toda la circunferencia $|w|=1$, sin excepción.

3. *Teorema I.* Sea $f(z)$ una función regular y de módulo menor que 1 en el círculo $|z|<1$, tal que

$$|f(e^{i\vartheta})|=|\lim_{r\to 1} f(re^{i\vartheta})|=1$$

para casi todo ϑ del arco $(\alpha;\beta)$ de la circunferencia $|z|=1$. En tales hipótesis, o bien los afijos de $f(e^{i\vartheta})$, $\alpha<\vartheta<\beta$, cubren toda la circunferencia $|w|=1$ infinitas veces, o $f(z)$ es prolongable analíticamente a través del arco $(\alpha;\beta)$.

Demostración. Sea γ un complejo cualquiera de módulo 1; demostraremos que existen infinitos ϑ pertenecientes al arco $(\alpha;\beta)$, para los cuales se verifica la relación $f(e^{i\vartheta})=\gamma$; o que, en caso contrario, la función es prolongable a través del arco. Supondremos, lo cual no restringe la generalidad, que $\gamma=1$.

La función

$$\Phi(z)=\frac{f(z)+1}{f(z)-1},$$

terarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Francisco-Josephinae, 5, (1930) pág. 55.

(2) R. NEVANLINNA, *Ueber beschränkte analytische Funktionen*, Commentationes in honorem Ernesti Leonardi Lindelöf, 1929, pág. 28.

(3) W. SEIDEL, *On the distribution of values of bounded analytic functions*, Transactions of the American Mathematical Society, 36, (1934), pág. 208.

tiene parte real negativa en $|z|<1$, y por lo tanto admite la representación

$$\phi(z) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\, d\psi(\vartheta),$$

con $\psi(\vartheta)$ acotada no decreciente. Es bien sabido que la parte real de $\phi(z)$ tiende radialmente hacia la derivada simétrica $\psi(\vartheta)$, en todo punto donde dicha derivada, finita o infinita, existe.

Por lo tanto se verificará, para casi todo ϑ de $(\alpha;\beta)$,

$$\lim_{r\to 1} R[\phi(re^{i\vartheta})] = R\left[\frac{f(e^{i\vartheta})+1}{f(e^{i\vartheta})-1}\right] = \psi'(\vartheta).$$

Pero, como por hipótesis es $|f(e^{i\vartheta})|=1$ para casi todo ϑ de $(\alpha;\beta)$, resulta, para $f(e^{i\vartheta})\neq 1$,

$$\psi'(\vartheta) = R\left[\frac{f(e^{i\vartheta})+1}{f(e^{i\vartheta})-1}\right] = 0.$$

En caso de que sea $f(e^{i\vartheta})=1$ para infinitos valores de ϑ, el teorema está demostrado. Si así no sucede, es $\psi'(\vartheta)=0$ en casi todo punto de $(\alpha;\beta)$; y como $\psi(\vartheta)$ es no decreciente, caben dos posibilidades:

a) $\psi(\vartheta)$ tiene infinitos puntos de crecimiento;

b) $\psi(\vartheta)$ tiene sólo un número finito de puntos de crecimiento.

En el primer caso hay infinitos puntos donde la derivada simétrica es infinita. Se verificará por lo tanto en esos puntos

$$\lim_{r\to 1} R[\phi re^{i\vartheta})] = \infty$$

y por lo tanto

$$\lim_{r\to 1} \phi(re^{i\vartheta}) = \infty.$$

Pero como es

$$f(z) = \frac{\phi(z)+1}{\phi(z)-1}, \qquad [1]$$

resulta

$$\lim_{r\to 1} f(re^{i\vartheta}) = f(e^{i\vartheta}) = 1$$

para infinitos valores de ϑ de $(\alpha;\beta)$.

En el segundo caso, $\psi(\vartheta)$ es una función en escalera con un número finito de puntos de discontinuidad; la función $\Phi(z)$ es regular, y tiene parte real nula, en todos los arcos de constancia de $\psi(\vartheta)$, y tiene polos simples en los puntos de discontinuidad de $\psi(\vartheta)$. Pero $f(z)$ (véase la fórmula 1) es regular, tanto en los puntos en que $\Phi(z)$ es regular y distinta de 1, como en los puntos en que $\Phi(z)$ tiene polos simples. Resulta, en definitiva, que $f(z)$ es regular en todos los puntos del arco $(\alpha;\beta)$,y por lo tanto prolongable analíticamente a través de él, con lo cual el teorema queda demostrado.

4. Cuando $f(z)$ es un producto de Blaschke con infinitos ceros, se cumplen las hipótesis del teorema anterior, siendo el arco $(\alpha;\beta)$ la circunferencia completa $|z|=1$. Como, además, por lo menos un punto de la circunferencia es punto de acumulación de ceros, tal punto es necesariamente singular, quedando excluída la segunda posibilidad del teorema. Resulta entonces el

Teorema II. Sea $B(z)$ un producto de Blaschke con infinitos ceros

$$w = B(z) = e^{i\alpha} z^m \prod_{0}^{\infty} \frac{\bar{a}_k}{|a_k|} \frac{a_k - z}{1 - \bar{a}_k z};$$

$$|a_k| < 1; \qquad \sum_{0}^{\infty} (1 - |a_k|) < \infty.$$

Se verifica entonces que los afijos de

$$B(e^{i\vartheta}) = \lim_{r\to 1} B(re^{i\vartheta})$$

cubren infinitas veces la circunferencia $|w| = 1$.

Instituto de Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires.