SOBRE LA VARIACION DE FUNCIONES DISCONTINUAS Y MULTIFORMES DE UNA VARIABLE REAL

por M. Cotlar y E. Roxin

Se trata el problema de hallar una fórmula para expresar la variación de una función discontinua de una variable, análoga a la que Banach dió para funciones continuas. En el caso de ser $y=f(x)$ continua la fórmula de Banach establece que la variación total de $f(x)$ vale $V=\int_{-\infty}^{+\infty} N(y)\,dy$, siendo $N(y_0)$ el número de soluciones de la ecuación $f(x)=y_0$. En lo que sigue se establece que para funciones discontinuas la variación total se obtiene sumando a la integral análoga otro término, que es la suma de las oscilaciones de $f(x)$ en todos sus puntos de discontinuidad; los resultados se extienden al caso de una función $f(x)$ multiforme.

1. - *Los conjuntos $f[x]$, $f[J]$ y la función asociada.* Sea $y=f(x)$ una función real de la variable real x, uniforme o no. En el caso de ser $f(x)$ multiforme la notación $y_0=f(x_0)$ expresa que el número y_0 es una de las determinaciones de $f(x_0)$, es decir uno de los valores que $f(x)$ hace corresponder a x_0. Designaremos con $f[x_0]$ al conjunto de estos posibles valores $f(x_0)$ y con $|f[x_0]|$ su medida, en caso de ser medible. Más general, si E es un conjunto lineal indicaremos con $f[E]$ el conjunto de los valores f(x), donde $x\in E$ y con $|f[E]|$ su medida. Sup. $f[E]$ (inf. $f[E]$) designará el extremo superior (inferior) del conjunto $f[E]$, y en particular usaremos la notación sup. $f[x_0]$ (inf. $f[x_0]$). Finalmente designaremos con $J_\varepsilon(x_0)$, $\varepsilon>0$, un entorno de centro x_0 y radio ε.

A la función $f(x)$ dada le hacemos corresponder otra $\varphi(x)$ definida de la siguiente manera: para que sea $y_0=\varphi(x_0)$ es necesario y suficiente que para todo $\varepsilon>0$ se verifique inf. $f[J_\varepsilon(x_0)] \leqq y_0 \leqq$ sup. $f[J_\varepsilon(x_0)]$.

Diremos que $\varphi(x)$ es la función asociada de $f(x)$. $\varphi(x)$ es en general multiforme, aún en el caso de que $f(x)$ sea uniforme. De la definición de $\varphi(x)$ se deduce inmediatamente:

a) Si $y_0 = f(x_0)$, es también $y_0 = \varphi(x_0)$, es decir $y_0 \in f[x_0]$ implica $y_0 \in \varphi[x_0]$.
b) Si $y_0 \neq \varphi(x_0)$ existe un $\varepsilon > 0$ tal que el conjunto $f[J_\varepsilon(x_0)]$ cae totalmente a la derecha o a la izquierda de y_0.

2.-*Teorema*: *Toda $\varphi(x)$ asociada de una $f(x)$ es darbouxiana.* Esto significa: si $y_1 = \varphi(x_1)$, $y_2 = \varphi(x_2)$, existe, para todo y_0 comprendido entre y_1 e y_2, un x_0 comprendido entre x_1 y x_2 tal que $y_0 = \varphi(x_0)$, no excluyéndose el caso límite $x_1 = x_2 = x_0$.

Demostración: Consideremos primero el caso $x_1 \neq x_2$. Suponiendo lo contrario a la tesis, a todo x del intervalo $[x_1; x_2]$ corresponderá un entorno $J_\varepsilon(x)$ tal que $f[J_\varepsilon(x)]$ cae de un solo lado de y_0. Como los entornos $J(x)$ cubren el intervalo $[x_1; x_2]$, existe un número finito de ellos, correspondientes a un número finito de puntos $x^{(i)}$ tal que en la sucesión finita $f[J(x_1)]$, $f[J(x^{(1)})]$, $f[J(x^{(2)})]$, $f[J(x^{(3)})]$, ..., $f[J(x_2)]$, cada dos conjuntos consecutivos tienen por lo menos un punto común, de donde se deduce que los conjuntos extremos $f[J(x_1)]$ y $f[J(x_2)]$ deben caer de un mismo lado de y_0, contrariamente a la hipótesis de que y_0 está comprendido entre y_1 e y_2. En el caso de ser $x_1 = x_2$, será $y_1 = \varphi(x_1)$; $y_2 = \varphi(x_1)$, luego

$$\inf.\ f[J_\varepsilon(x_1)] \leqq y_i \leqq \sup.\ f[J_\varepsilon(x_1)]$$

para todo ε, para $i = 1, 2$ y por lo tanto también para $i = 0$, pues y_0 está comprendido entre y_1 e y_2. Según la definición de función asociada resulta pues $y_0 = \varphi(x_1)$.

3.-*Oscilación en intervalos y puntos.* Para todo intervalo J, sea abierto, cerrado o semiabierto (con un extremo, pero sin el otro), el número $\omega_f(J) = \sup. f[J] - \inf. f[J]$ recibirá el nombre de oscilación de $f(x)$ en J.

En el caso de un punto x_0 definimos:

$$M_f(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \sup.\ f[J_\varepsilon(x_0)], \qquad m_f(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf.\ f[J_\varepsilon(x_0)]$$

y la diferencia $M_f(x_0) - m_f(x_0) = \omega_f(x_0)$ recibirá el nombre de oscilación de la función $f(x)$ en el punto x_0.

4.- *Teorema: Si* $\varphi(x)$ *es la asociada de* $f(x)$ *se tiene*

a) $M_f(x_0) = M_\varphi(x_0) = \sup. \varphi[x_0] = \varphi(x_0)$;
$m_f(x_0) = m_\varphi(x_0) = \inf. \varphi[x_0] = \varphi(x_0)$;
$\omega_f(x_0) = \omega_\varphi(x_0) = |\varphi[x_0]|$.

b) *Si* J *es un intervalo abierto* es $\sup. f[J] = \sup. \varphi[J]$; $\inf. f[J] = \inf. \varphi[J]$; $\omega_f(J) = \omega_\varphi(J)$. Pero *si* J *no es abierto* sólo se puede asegurar que $\sup. f[J] \leqq \sup. \varphi[J]$; $\inf. f[J] \geqq \inf. \varphi[J]$; $\omega_f(J) \leqq \omega_\varphi(J)$.

c) *Para cualquier intervalo* J, cerrado, abierto o semiabierto, que también puede reducirse a un punto, es $\varphi[J]$ otro intervalo que es cerrado (puede ser un punto) cuya medida es $|\varphi[J]| = \omega_\varphi(J)$.

Demostración: Como toda determinación de $f(x)$ es también una determinación de $\varphi(x)$ resulta $\sup. f[J_\varepsilon(x_0)] \leqq \sup. \varphi[J_\varepsilon(x_0)]$; $\inf. f[J_\varepsilon(x_0)] \geqq \inf. \varphi[J_\varepsilon(x_0)]$. Por otra parte, como para todo x existe un x' infinitamente próximo tal que $f(x') \geqq \varphi(x) - \delta$ para cualquier $\delta > 0$, debe ser $\sup. \varphi[J_\varepsilon(x_0)] \leqq \sup. f[J_\varepsilon(x_0)]$ y se concluye que $M_f(x_0) = M_\varphi(x_0)$ y análogamente $m_f(x_0) = m_\varphi(x_0)$. Además, para todo $\varepsilon > 0$ es $\inf. f[J_\varepsilon(x_0)] \leqq M_f(x_0) \leqq \sup. f[J_\varepsilon(x_0)]$, luego, por definición de función asociada, resulta que $M_f(x_0) = M_\varphi(x_0)$ es un valor de $\varphi(x_0)$, y evidentemente debe ser $M_f(x_0) = M_\varphi(x_0) = \sup. \varphi[x_0]$. Análogamente será $\inf. \varphi[x_0] = m_\varphi(x_0) = m_f(x_0)$. Como $\varphi(x)$ es darbouxiana resulta $\omega_\varphi(x_0) = \sup. \varphi[(x_0] - - \inf. \varphi[x_0] = |\varphi(x_0)|$, lo que prueba la parte a) de la tesis. Si J es un intervalo abierto, existe para todo $\varepsilon > 0$ un par de puntos x_1, x_2 *interiores a* J tales que $\varphi(x_1) > \sup. \varphi[J] - \varepsilon$, $\varphi(x_2) < \inf. \varphi[J] + \varepsilon$. Por definición de $\varphi(x)$ existen x', x'' infinitamente próximos a x_1, x_2, respectivamente, y por lo tanto también interiores a J, tales que $f(x') > \varphi(x_1) - \delta$, $f(x'') < \varphi(x_2) + \delta$; de esto se deduce que $\sup. f[J] \geqq \sup. \varphi[J]$, $\inf. f[J] \leqq \inf. \varphi[J]$. Por otra parte, como todo valor de $f(x)$ es también un valor de $\varphi(x)$, tienen lugar las desigualdades de signo opuesto, quedando demostrada la parte b) de la tesis. El resto es consecuencia de la propiedad darbouxiana de $\varphi(x)$.

5.- *Corolario. La oscilación* $\omega_\varphi(J)$ *es subaditiva en* J. Más precisamente: si $J = J_1 + J_2$, donde J, J_1, J_2 son intervalos abiertos, cerrados o semiabiertos, pudiendo alguno reducirse a un punto, se verifica $\omega_\varphi(J) \leqq \omega_\varphi(J_1) + \omega_\varphi(J_2)$. Demostración: Es consecuencia inmediata del punto c) del teorema anterior y del hecho que el conjunto $\varphi[J]$ está contenido en el conjunto suma $\varphi[J_1] + \varphi[J_2]$.

6. - *Definición de variación total.* Llamaremos *conjunto-J* a todo intervalo abierto, cerrado o semiabierto y también a un solo punto, es decir a todo conjunto lineal que tenga la propiedad, que si $x_1 \leqq x \leqq x_2$, $x_1 \in J$, $x_2 \in J$ implica $x \in J$. Entenderemos por subdivisión estricta $\sigma(J) = \{J_1, \ldots, J_n\}$ de J a toda descomposición de la forma $J = J_1 + \ldots + J_n$, donde los J_i son conjuntos-J sin puntos comunes dos a dos; por lo tanto los componentes J_i de la subdivisión $\sigma(J)$ pueden ser puntos o intervalos cualesquiera, con tal de que cada punto de J pertenezca a uno y sólo uno de ellos.

Para cada subdivisión $\sigma(J) = \{J_1, \ldots, J_n\}$ pondremos

$$\sum_{\sigma(J)} \omega_f(J_i) = \omega_f(J_1) + \ldots + \omega_f(J_n)$$

y definimos la *variación total de $f(x)$ en J* como el número $V_f(J)$ = extremo superior de las sumas $\sum_{\sigma(J)} \omega_f(J_i)$ correspondientes a las posibles subdivisiones estrictas $\sigma = \sigma(J)$. En caso de ser $f(x)$ uniforme y continua nuestra definición coincide con la ordinaria, en la que se toman subdivisiones no estrictas, o sea de componentes no-rampantes. Pero en el caso de funciones uniformes discontinuas se llega a resultados distintos, según se adopten subdivisiones estrictas o no estrictas. Por ejemplo: tomemos la función definida en el intervalo $[0; 2]$ de la siguiente manera: $f(x) = 1$ para $x = 1$; $f(x) = 0$ para $x \neq 1$; la variación total resulta ser 1 con subdivisiones estrictas, pero 2 con subdivisiones no estrictas.

Observemos que en caso de ser J un punto resulta $V_\varphi(J) = \omega_f(J) = \omega_\varphi(J)$.

7. - *Teorema. Si $\varphi(x)$ es la asociada de $f(x)$ es $V_f(J) = V_\varphi(J)$.* *Demostración.* Como evidentemente para toda subdivisión estricta $\sigma = \sigma(J)$ es $\sum_\sigma \omega_\varphi(J_i) \geqq \sum_\sigma \omega_f(J_i)$ por ser $\omega_\varphi(J_i) \geqq \omega_f(J_i)$ (ver teorema 4), es también $V_\varphi(J) \geqq V_f(J)$. Probaremos que también es cierta la desigualdad contraria. A cada subdivisión estricta $\sigma(J) =$

$\{J_1, \ldots, J_n\}$ le asociamos otra σ' definida así: los J_i que sean intervalos abiertos o puntos los dejamos invariables, en cambio los que sean intervalos semiabiertos o cerrados los substituímos por sumas de intervalos abiertos y puntos, de tal manera que los componentes de σ' son o intervalos abiertos o puntos. Por otra parte es σ' un refinamiento de σ, es decir, todo componente de σ es suma de componentes de σ'. De lo primero resulta, según el teorema 4,

$$\sum_{\sigma'} \omega_f(J_i) = \sum_{\sigma'} \omega_\varphi(J_i),$$

puesto que los J_i de σ' son intervalos abiertos o puntos, siendo, por lo tanto, iguales las oscilaciones de $f(x)$ y $\varphi(x)$ en ellos. De lo último, en cambio, resulta por la propiedad subaditiva de $\omega_\varphi(J)$

$$\sum_{\sigma'} \omega_\varphi(J_i) \geqq \sum_{\sigma} \omega_\varphi(J_i).$$

Por lo tanto, para toda σ hemos encontrado una σ' tal que

$$\sum_{\sigma'} \omega_f(J_i) \geqq \sum_{\sigma} \omega_\varphi(J_i),$$

de donde resulta que $V_f(J) \geqq V_\varphi(J)$, quedando demostrado el teorema.

8. - *Las funciones* $L(y, J)$ *y* $N(y, J)$. Siguiendo a Banach pondremos para cada conjunto J y para cada valor y_0:

$L_f(y, J) =$ función característica del conjunto $f[J]$;
$N_f(y_0, J) =$ número de puntos $x \in J$ tales que $y_0 = f(x)$.

Evidentemente $N_f(y, J) \geqq L_f(y, J)$. Además es $N_f(y_0, J)$ aditiva en J y $L_f(y_0, J)$ subaditiva, es decir $J = J_1 + J_2$; $J_1 . J_2 = 0$ implica $N_f(y_0, J) = N_f(y_0, J_1) + N_f(y_0, J_2)$;

$$L_f(y_0, J) \leqq L_f(y_0, J_1) + L_f(y_0, J_2).$$

9. - *Teorema. Si* $\varphi(x)$ *es asociada de* $f(x)$ *se tiene:*

a) $L_\varphi(y, J)$ es función medible de y cuya integral entre $-\infty$ y $+\infty$ vale $\omega_\varphi(J)$.

b) $N_\varphi(y, J)$ es función medible de y, siendo $N_\varphi(y, J) =$ extremo superior de $\sum_{\sigma} L_{\varphi}^{\sigma}(y,J)$ para las posibles σ estrictas de J.

c) Si σ_n es una sucesión monótona de subdivisiones estrictas (es decir tal que cada subdivisión es un refinamiento de la precedente) de J, cuya norma (=longitud del intervalo máximo de una subdivisión) tiende a 0 cuando n tiende a ∞, se verifica:

$$\sum_{\sigma_n(J)} L_{\varphi}(y_0, J_i) \underset{n\to\infty}{\uparrow} N_{\varphi}(y_0, J)$$

indicando la flecha ascendente que el primer miembro tiende al segundo en forma creciente.

Demostración: a) Es consecuencia de ser darbouxiana la $\varphi(x)$, razón por la cual es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L_{\varphi}(y,J)\, dy = |\varphi[J]| = \omega_{\varphi}(J)$$

también en el caso de que J sea un punto.

Sabemos por una parte que si $\sum_{\sigma_n(J)} L_{\varphi}(y_0, J_i) = k$, será $N_{\varphi}(y_0, J) \geqq k$, pues en k conjuntos J_i hay algún x tal que $\varphi(x) = y_0$, y estos J_i no tienen puntos comunes dos a dos. Demostraremos ahora que, siendo σ_n la sucesión de subdivisiones estrictas de la parte c), si $N_{\varphi}(y_0, J) \geqq k$ es posible encontrar un n_0 tal que para todo $n > n_0$ se verifica

$$\sum_{\sigma_n(J)} L_{\varphi}(y_0, J_i) \geqq k.$$

En efecto, $N_{\varphi}(y_0, J) \geqq k$ significa que existen en J por lo menos k puntos x_i que verifican la ecuación $\varphi(x_i) = y_0$. Basta pues tomar la norma de la subdivisión σ_n suficientemente pequeña para que cada dos x_i pertenezcan a conjuntos J_i distintos, de modo que $L_{\varphi}(y_0, J_i)$ valga la unidad en k conjuntos J_i distintos.

De modo que la $\sum_{\sigma_n} L_{\varphi}(y_0, J_i)$ es una función creciente de n (por ser subaditiva la oscilación respecto del intervalo) que nunca supera la cota $N_{\varphi}(y_0, J)$, pero por otra parte supera a cualquier número superado por esta última, que por lo tanto es su límite para $n \to \infty$. Como este límite es a la vez extremo superior de todos los términos $\sum\limits_{\sigma_n} L_\varphi(y_0, J_i)$, pero por otra parte no depende de la sucesión particular σ_n elegida, será a la vez el extremo superior de todas las posibles sumas

$$\sum_{\sigma(J)} L_\varphi(y_0, J_i).$$

10.-*Teorema. Si* $\varphi(x)$ *es asociada de* $f(x)$, *se tiene para todo conjunto* J:

$$V_\varphi(J) = \int_{-\infty}^{\infty} N_\varphi(y, J)\, dy.$$

Demostración. Hemos visto que con las condiciones del teorema anterior es

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\sigma_n(J)} L_\varphi(y, J_i) = N_\varphi(y, J_i).$$

Como la expresión en el miembro izquierdo es una función creciente de n, podemos integrar permutando la integración con el paso al límite, resultando

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\sigma_n(J)} L_\varphi(y, J_i)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} N_\varphi(y, J)\, dy.$$

El primer miembro vale

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\sigma_n(J)} \int_{-\infty}^{\infty} L_\varphi(y, J_i)\, dy = \lim_{n\to\infty} \sum_{\sigma_n(J)} \omega_\varphi(J_i).$$

Por lo tanto el $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\sigma_n(J)} \omega_\varphi(J_i)$ no depende de la sucesión σ_n elegida (siempre que cumpla las condiciones del teorema anterior), y como todas esas sucesiones dan sumas que crecen con n (por ser subaditiva la oscilación con respecto al intervalo) habrá alguna sucesión σ_n tal que

$$\text{sup.} \sum_{\sigma} \omega_\varphi(J_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\sigma_n(J)} \omega_\varphi(J_i).$$

Por lo tanto el primer miembro vale $V_\varphi(J)$, quedando demostrado el teorema.

11.- *Los conjuntos C y D.* Diremos que $f(x)$ es continua en x_0 si $\omega_f(x_0)=0$, es decir si $M_f(x_0)=m_f(x_0)$. Designaremos con $C_f(J)$ el conjunto de los puntos de J en que $f(x)$ es continua y con $D_f(J)$ el conjunto $J-C_f(J)$. Del teorema 4 resulta que si $\varphi(x)$ es asociada de $f(x)$ es $C_f(J)=C_\varphi(J)$, podemos pues escribir $C(J)=C_f(J)=C_\varphi(J)$. Los conjuntos $C_\varphi(J)$ y $D_\varphi(J)$ son medibles por ser $\varphi(x)$ darbouxiana. En un punto $x \in C(J)$ serán las funciones $f(x)$ y $\varphi(x)$ uniformes e iguales, por lo tanto

$$N_f(y_0, C(J))=N_\varphi(y_0, C(J)).$$

12.- *Generalización de la fórmula de Banach. Teorema.* Para toda función $f(x)$ se tiene

$$V_f(J)=\int_{-\infty}^{\infty} N_f(y, C(J))\,dy+\sum_x \omega_f(x), \tag{I}$$

donde la sumatoria se extiende a todos los puntos $x \in J$. Si $f(x)$ es uniforme, resulta

$$V_f(J)=\int_{-\infty}^{\infty} N_f(y, J)\,dy+\sum_x \omega_f(x). \tag{II}$$

Demostración. Si los x_n en que $\omega_f(x_n)>0$ no son numerables ambos miembros de (I) son ∞. Luego basta suponer que $\{x_n\}=D(J)$ es numerable.

Por lo visto más arriba es

$$V_f(J)=V_\varphi(J)=\int_{-\infty}^{\infty} N_\varphi(y, J)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty} N_\varphi(y, C(J))\,dy+$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_\varphi(y, D(J))\,dy=\int_{-\infty}^{\infty} N_f(y, C(J))\,dy+\int_{-\infty}^{\infty} N_\varphi(y, D(J))\,dy.$$

Para probar (I) basta demostrar que

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_\varphi(y, D(J))\,dy=\sum_{n=1}^{\infty}\omega_f(x_n) \qquad \{x_n\}=D(J).$$

En virtud de lo visto en (9) es

$$N_\varphi(y, D(J)) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} L_\varphi(y, x_i).$$

Como la $\sum_{i=1}^{n} L_\varphi(y, x_i)$ es función de y creciente con n, podemos escribir

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_\varphi(y, D(J))\, dy = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} L_\varphi(y, x_i)\, dy =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \omega_\varphi(x_i) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \omega_f(x_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \omega_f(x_i)$$

quedando probado (I). Si $f(x)$ es uniforme y $D(J)$ numerable será $f[D(J)]$ numerable, luego para todo y, salvo un conjunto numerable, será $N_f(y, C(J)) = N_f(y, J)$ de modo que la integral que figura en (I) puede reemplazarse por la de (II) y queda probado el teorema.

CRONICA

EL JUBILEO DE MAURICE FRÉCHET

Con motivo del jubileo del matemático francés Maurice Fréchet (n. en 1878) la Unión Matemática Argentina ha resuelto adherir al homenaje que el mundo científico rinde al eminente creador de la teoría de los espacios abstractos que hoy domina a la matemática toda.

Con ese objeto y por voluntad expresa de Fréchet, la Société Mathématique de France creará uno o dos premios a otorgarse a comienzos de 1950 a trabajos originales de *Análisis general* (Teoría de espacios abstractos, transformaciones de elementos abstractos entre sí) y sus aplicaciones. Se admitirán trabajos en lengua extranjera con resumen en francés.

La Unión Matemática Argentina confía en el aporte pecuniario de todos sus miembros para tan noble fin, habiendo sido encargada por la comisión especial formada por la sección de Geometría de la Academia de París, integrada para este objeto con algunos colegas de Fréchet de la Ecole Polytechnique, para efectuar la colecta en la Argentina y países limítrofes. Se ha fijado una cuota mínima de \$ 20, moneda argentina.

La lista de adherentes será publicada por la Societé Mathématique de Francia, patrocinadora del merecido homenaje a una de las figuras máximas de la matemática del siglo XX.