RELACIONES ENTRE SEÑAL Y ESPECTRO

por Kurt Fränz

Facultad de Ciencias exactas, Físicas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires – Instituto Radiotécnico

(Recibido el 14/11/1949)

Zusammenfassung: Fuer den Hauptteil eines weitgehend beliebigen Signals gegebener Dauer werden enge obere und untere Schranken angegeben, die nur von der Dauer und nicht vom Verlauf des Signales abhaengen. Insbesondere wird berechnet, welcher Bruchteil der Gesamtenergie eines Signales gegebener Dauer hoechstens auf Frequenzen ω innerhalb eines Bandes gegebener Breite $|\omega| \leqq \Omega$ entfaellt. Die Küpfmüller'sche Regel ueber den Zusammenhang zwischen Bandbreite und Einschwingzeit eines Filters wird in verallgemeinerter Form bewiesen. Ferner wird bewiesen, dass die Durchlasskurve eines Filters mit monotonem Einschwingvorgang auch nicht angenähert rechteckig sein kann, sondern ungefaehr Glockenform hat. Genauer kann man zeigen, dass bei einem Filter mit monotonem Einschwingvorgang die saemtlichen Ableitungen des Uebertragungsmasses nach der Frequenz ihr absolutes Maximum bei der Frequenz Null haben und dass ebenso die geraden Ableitungen der quadratischen Durchlasskurve nach der Frequenz ihr absolutes Maximum bei der Frequenz Null haben.

En la técnica de telecomunicaciones se debe a menudo establecer relaciones entre una señal $u(t)$ que es una función del tiempo y su espectro $f(j\omega)$, que es una función de la frecuencia. Cada una determina completamente a la otra estando ambas vinculadas por medio de integrales de Fourier. En general es difícil ver lo que implican tales integrales para los problemas prácticos. Sin embargo existen resultados sobre las relaciones entre señal y espectro que admiten aplicaciones directas y cómodas y que por lo tanto se usan muy a menudo en la técnica de las telecomunicaciones. Ejemplo de ellos son los teoremas sobre la relación entre la velocidad de grupo o el tiempo de retardo de una señal y su espectro [1], la regla de Küpfmüller sobre la relación entre el tiempo de formación de una señal y el ancho de banda de su espectro [2] y las reglas sobre la forma de la curva de selección de un filtro con transitorios monótonos, como las formuladas por Wallman [3]. Una parte de estos resultados han sido establecidos en forma rigurosa mientras la regla de Küpfmüller y las de Wallman son extrapolaciones de ejemplos particulares.

Nos hemos planteado el problema de establecer reglas manejables y rigurosas a la vez, analizando los espectros de las señales de duración finita, las señales con espectros de «ancho finito» y los espectros de señales monótonas.

Existe una ley básica de la transmisión de señales en los sistemas lineales que satisfacen el principio de superposición: para que no existan distorsiones serias de señales de duración τ en sistemas lineales, el ancho de banda de la transferencia del sistema debe ser del orden $1/\tau$. Esta ley posee gran importancia práctica, porque el ruído de fondo y el precio de los equipos aumentan con el ancho de banda. Nuestro análisis de las relaciones entre señal y espectro nos permitirá precisar la ley general.

I. - *Teoremas*

Una señal arbitraria (con un número finito de puntos de discontinuidad) $u(t)$ de duración finita τ admite una representación por medio de su espectro $f(j\omega)$ de la forma

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega \quad \text{con} \quad f(j\omega) =$$

$$= \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} u(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \quad \text{y} \quad u(t) \equiv 0 \quad \text{para} \quad |t| > \frac{\tau}{2}.$$

Llamamos energía total E de la señal a la magnitud

$$E = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} u^2\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f f^*\, d\omega.$$

El asterisco indica el imaginario conjugado. Llamamos densidad espectral de la energía a ff^*. Llamamos energía parcial en la banda $|\omega| \leqq \Omega$ a la integral

$$E(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} ff^* \, d\omega.$$

Teorema 1.

La densidad espectral de la energía ff^* de una señal de duración finita τ y de energía total E, admite la acotación superior

$$ff^* \leqq \frac{\tau \,.\, E}{1 + \left[1 - \left|\frac{\operatorname{sen} \omega\tau}{\omega\tau}\right|\right]^2} = \frac{\tau \,.\, E}{n(\omega\tau)} ; \quad -\infty < \omega < \infty,$$

con $n(0) = 1 \leqq n(\omega\tau) \leqq 2 = n(\infty)$.

Para $\omega = 0$ el signo igual es válido sólo en el caso de la señal rectangular $\left(u(t) = \text{const. para } |t| \leqq \frac{\tau}{2}\right)$. Tal señal rectangular posee la densidad espectral

$$ff^* = \tau E \left[\frac{\operatorname{sen} \omega\tau/2}{\omega\tau/2}\right]^2,$$

expresión que en el intervalo $|\omega\tau| < \pi$ no es muy distinta de la cota superior.

Teorema 2.

Para $|\omega\tau| < \pi$ la densidad espectral ff^* de una señal no negativa $(u \geqq 0)$ de duración τ admite la acotación inferior

$$ff^* \geqq f^2(0) \cos^2 (\omega\tau/2) ; \quad |\omega\tau| \leqq \pi.$$

En vez del espectro $f(0)$ para la frecuencia $\omega = 0$ podemos introducir el valor medio de la señal $\overline{u} = \frac{1}{\tau} \int u \, dt = \frac{1}{\tau} f(0)$. El signo igual es válido sólo para una «señal» de dos picos iguales en los instantes $t = \pm \frac{\tau}{2}$.

Teorema 3.

Para $|\omega\tau| \leqq \pi$ la densidad ff^* de una señal no negativa y con un solo máximo en el instante $t=0$ $\left(\frac{du}{dt} \geqq 0 \text{ para } t \leqq 0 \text{ y } \frac{du}{dt} \leqq 0 \text{ para } t \geqq 0\right)$ no es menor que la densidad de la señal rectangular de la misma duración y del mismo valor medio

$$ff^* \geqq f^2(0) \left[\frac{\text{sen}\, \omega\tau/2}{\omega\tau/2}\right]^2.$$

El signo igual sólo vale para la señal rectangular.

Teorema 4.

Entre todas las señales de duración finita τ y de energía total E hay una $U(t)$ con la energía parcial máxima $E_{\max}(\Omega)$ en el intervalo $|\omega| \leqq \Omega$. Esta señal satisface la ecuación integral

$$U(t) = \lambda \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \frac{1}{\pi} \frac{\text{sen}\, \Omega(t-s)}{t-s} U(s)\, ds.$$

La energía parcial máxima es una función del producto $\Omega\tau$ e igual al recíproco del primer valor propio λ_1 de la ecuación integral.

$$E_{\max}(\Omega\tau) = x_1 = \frac{1}{\lambda_1}.$$

Este valor propio lo hemos calculado numéricamente. Como demuestra la tabla siguiente, en la parte esencial del espectro no es posible mejorar mucho la concentración espectral con respecto a la correspondiente señal rectangular.

La energía parcial máxima se encuentra entre los valores $\underline{E} < E_{max} < \overline{E}$. La energía parcial de la señal rectangular la llamamos E_r.

$\Omega\tau$	0	1	2	3	4	4,5
$\overline{E}$	0	0,313	0,574	0,777	0,994	1
$\underline{E}$	0	0,313	0,571	0,758	0,935	0,965
E_r	0	0,310	0,571	0,753	0,850	

Teorema 5.

Si excitamos con la tensión escalón $e(t) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ para $t \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$ un filtro de transferencia $T(j\omega)$, resulta la tensión de salida $u(t)$

$$u(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty+\nu}^{j\infty+\nu} \frac{T(p)}{p} e^{pt}\, dp \quad \nu > 0.$$

Küpfmüller define el tiempo de formación τ de la señal $u(t)$ en la salida del filtro por medio de la tangente máxima

$$\tau = \frac{1}{\left(\frac{du}{dt}\right)_{max}}$$

y demuestra que para el filtro ideal con $T(j\omega) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ para $|\omega| \begin{cases} < \Omega \\ > \Omega \end{cases}$ se verifica la relación

$$\tau = \frac{\pi}{\Omega}.$$

Este resultado lo generalizamos para filtros arbitrarios:

$$\left|\frac{du}{dt}\right| \leqq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |T|\, d\omega.$$

El signo igual vale sólo en el caso de una transferencia con fase lineal, o sea

$$T(j\omega) = |T|\, e^{-j\omega t_0}.$$

Teorema 6.

En una comunicación presentada a la decimotercera reunión de la AFA, A. González Domínguez ya ha demostrado que «si la transferencia de un circuito lineal pasivo es tal que su módulo |T| vale la unidad en un intervalo finito $\omega_1 < \omega < \omega_2$, la respuesta del circuito a la tensión unitaria no es monótona [4].

Además hemos obtenido fórmulas que implican la regla de Wallman. Para que la respuesta de un filtro a la tensión escalón sea monótona, la transferencia $T(j\omega)$ debe satisfacer para todas las frecuencias las desigualdades

$$\left|\frac{d^nT}{d\omega^n}\right| \leqq \left|\frac{d^nT}{d\omega^n}\right|_{\omega=0}; \quad \left|\frac{d^{2n}|T|^2}{d\omega^{2n}}\right| \leqq \left|\frac{d^{2n}|T|^2}{d\omega^{2n}}\right|_{\omega=0}.$$

La desigualdad particular

$$\left|\frac{d^2|T|^2}{d\omega^2}\right| \leqq \left|\frac{d^2|T|^2}{d\omega^2}\right|_{\omega=0}$$

implica que la curva de selección $|T|^2$ de un filtro tiene curvatura máxima para la frecuencia $\omega = 0$ y, por lo tanto, no puede ser aproximadamente rectangular como la del filtro ideal, sino que es campaniforme. La definición precisa de la selección y la monotonía de los transitorios no son propiedades compatibles.

II. *Señales de duración finita.*

Para demostrar el teorema 1 debemos analizar una señal de duración τ y de energía total E. Descompongamos tal señal en su valor medio (componente continua) y su parte alterna

$$u(t) = \bar{u} + u_2(t).$$

Con estas definiciones resulta

$$E = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} u^2\, dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} u_2{}^2\, dt + \tau \bar{u}^2 \geqq \tau \bar{u}^2$$

o sea

$$f^2(0) \leqq \tau E.$$

El signo igual vale sólo para $u_2 \equiv 0$, es decir para la señal rectangular.

La señal rectangular $u = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ para $|t| \begin{cases} < \frac{\tau}{2} \\ > \frac{\tau}{2} \end{cases}$ posee el espectro

$$f(j\omega) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t}\, dt = \frac{\operatorname{sen} \omega\tau/2}{\omega\tau/2}.$$

Esta primera desigualdad admite una generalización para frecuencias arbitrarias, la cual constituirá nuestro teorema 1. Formemos la expresión

$$u_r(t) = \begin{cases} u - \frac{1}{\tau} f(j\omega_0)\, e^{j\omega_0 t} \\ 0 \end{cases} \quad \text{para } |t| \begin{cases} < \frac{\tau}{2} \\ > \frac{\tau}{2} \end{cases}.$$

Obtenemos así las ecuaciones

$$\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} u_r\, e^{-j\omega_0 t}\, dt = 0$$

y

$$\int u\, u^*\, dt = \int u_r\, u_r{}^*\, dt + \frac{1}{\tau} f(j\omega_0)\, f^*(j\omega_0) \geqq \frac{1}{\tau} f(j\omega_0)\, f^*(j\omega_0).$$

La última desigualdad vale para funciones complejas arbitrarias $u(t)$, que se anulan para $|t|>\frac{\tau}{2}$, y en particular para $u_r(t)$ y su espectro $f_r(j\omega)$:

$$f_r(j\omega)=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} u_r e^{-j\omega t}\,dt=f(j\omega)-f(j\omega_0)\,\frac{2}{\tau}\,\frac{\operatorname{sen}(\omega-\omega_0)\tau/2}{\omega-\omega_0}$$

$$f_r(-j\omega_0)=f^*(j\omega_0)-f(j\omega_0)\frac{\operatorname{sen}\omega_0\tau}{\omega_0\tau}.$$

Sustituyendo en la última desigualdad obtenemos

$$\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} u_r u_r^*\,dt\geqq\frac{1}{\tau}\left\{ff^*\left[1+\frac{\operatorname{sen}^2\omega_0\tau}{(\omega_0\tau)^2}\right]-[f^2+f^{*2}]\frac{\operatorname{sen}\omega_0\tau}{\omega_0\tau}\right\}$$

$$\geqq\frac{1}{\tau}\,ff^*\left(1-\left|\frac{\operatorname{sen}\omega_0\tau}{\omega_0\tau}\right|\right)^2$$

o sea

$$E\geqq\frac{1}{\tau}\,ff^*\left(1-\left|\frac{\operatorname{sen}\omega_0\tau}{\omega_0\tau}\right|\right)^2+\frac{1}{\tau}\,ff^*,$$

lo que equivale al teorema 1.

La comparación de esta cota superior con el espectro de la señal rectangular demuestra que no es posible mejorar mucho la cota para $|\omega\tau|<\pi$.

Para demostrar los teoremas 2 y 3, es decir, para establecer cotas inferiores para la densidad espectral de la energía, modificaremos las condiciones que deben satisfacer las señales. En vez de prescribir la energía total, prescribiremos el valor medio $\overline{u}$ de la señal lo que ya nos fija el valor del espectro para la frecuencia 0:

$$f(0)=\tau\overline{u}.$$

Nos preguntamos entonces con qué rapidez puede disminuir la densidad espectral en la proximidad de la frecuencia 0.

Si no imponemos a la señal ninguna otra restricción, la densidad espectral puede anularse para frecuencias arbitrariamente pequeñas, según lo demuestra la consideración de un problema de antenas formalmente equivalente al nuestro. La dependencia funcional entre el diagrama y la distribución de la corriente en el alambre viene expresada por una integral de Fourier del mismo tipo que la que establece la relación entre una señal de duración finita y su espectro. Es sabido que tal diagrama de antena puede poseer ceros para ángulos arbitrariamente pequeños si la corriente en el alambre cambia de signo. Esto nos indica que para establecer cotas inferiores de la densidad del espectro, debemos imponer a la señal condiciones suplementarias. Admitiremos que no cambia el signo de la señal $u(t)$:

$$u(t) \geqq 0.$$

Para establecer la cota inferior empezaremos por plantearnos el problema de encontrar el valor mínimo de la parte real del espectro:

$$f(j\omega) = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} u(t) \cos \omega t \, dt - j \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} u(t) \operatorname{sen} \omega t \, dt.$$

Sólo la parte esencial del espectro depende poco de la forma precisa de la señal. Por lo tanto resultará una cota inferior para aquellas frecuencias ω para las cuales el $\cos \omega t$ bajo la integral no es negativo, o sea para las frecuencias $|\omega\tau| < \pi$. Con esta condición resulta para $|t| \leqq \frac{\tau}{2}$

$$\cos \omega t \geqq \cos \omega \frac{\tau}{2} \geqq 0.$$

Como por hipótesis el valor medio de la señal está fijado, resulta el valor mínimo de la parte real del espectro para las señales que se anulan para todo t con excepción de sendos entornos infinitesimales correspondientes a los instantes $t = \pm \frac{\tau}{2}$.

Resulta así la desigualdad

$$\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} u \cos \omega t \, dt \geqq \cos \frac{\omega\tau}{2} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} u \, dt = f(0) \cos \frac{\omega\tau}{2}$$

y con ella el teorema 2):

$$ff^* \geqq f^2(0) \cos^2 \frac{\omega\tau}{2} \quad \text{para} \quad |\omega\tau| \leqq \pi.$$

Como una señal de dos picos iguales a distancia τ todavía no es una señal en el sentido de las aplicaciones, será natural imponer más restricciones a estas señales; admitiremos que la señal posee un solo máximo en el instante $t=0$.

$$\frac{du}{dt} \geqq 0 \quad \text{para} \quad t \leqq 0 \quad \text{y} \quad \frac{du}{dt} \leqq 0 \quad \text{para} \quad t \geqq 0.$$

Descomponemos tal señal en su parte alterna y su valor medio y obtenemos así

$$f(j\omega)\, f^*(j\omega) = \int [\overline{u}+u_2(t_1)]\,[\overline{u}+u_2(t_2)]\, e^{j\omega(t_1-t_2)}\, dt_1\, dt_2$$

$$= f^2(0) \frac{\operatorname{sen}^2 \omega\tau/2}{(\omega\tau/2)^2} + 2 f(0) \frac{\operatorname{sen} \omega\tau/2}{\omega\tau/2} \int u_2 \cos \omega t \, dt + \left[\int u_2 \, e^{j\omega t} \, dt \right].$$

A los efectos de obtener una cota inferior, es legítimo suprimir la parte impar de $u(t)$, la que sólo contribuye al tercer término aumentándolo.

Con nuestras condiciones para la señal, la integral

$$\int u_2 \cos \omega t \, dt \geqq 0$$

no es negativa, lo que nos da el teorema 3:

$$ff^* \geqq f^2(0) \frac{\operatorname{sen}^2 \omega\tau/2}{(\omega\tau/2)^2}.$$

El signo igual vale sólo para una parte alterna idénticamente nula, es decir, para la señal rectangular.

Para demostrar el teorema 4, tenemos que analizar la energía parcial de una señal de duración τ:

$$E(\Omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega} ff^{*}\,d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega}^{\Omega}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} u(t_1)\,u(t_2)\,e^{-j\omega(t_1-t_2)}\,dt_1\,dt_2\,d\omega$$

$$=\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\frac{1}{\pi}\,\frac{\operatorname{sen}\Omega(t_1-t_2)}{t_1-t_2}\,u(t_1)\,u(t_2)\,dt_1\,dt_2.$$

Se comprueba que para toda señal es válida la desigualdad

$$0<E(\Omega)<E(\infty)=E.$$

Es sabido por la teoría de las ecuaciones integrales, que entre todas las señales de energía total E existe una $U(t)$ para la cual $E(\Omega)$ toma su valor máximo $E_{max}(\Omega)$ y que esta $U(t)$ satisface la ecuación integral

$$U(t_1)=\lambda\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}}\frac{1}{\pi}\,\frac{\operatorname{sen}\Omega(t_1-t_2)}{t_1-t_2}\,U(t_2)\,dt_2.$$

Con la normalización $E=1$ resulta

$$E_{max}=x_1=\frac{1}{\lambda_1}$$

siendo x_1 el primer número característico de la ecuación y λ_1 el primer valor propio. Es posible calcular x_1 por métodos numéricos con aproximación arbitraria. Como el núcleo

$$k(s,t)=\frac{1}{\pi}\,\frac{\operatorname{sen}\Omega(t-s)}{t-s}$$

es positivo definido $[0 < E(\Omega)]$, todos los números característicos son positivos; obtenemos cotas superiores para x_1 por medio de las siguientes desigualdades:

$$1 > x_1$$

$$S_1 = \int k(t,t)\,dt = \sum_1^{\infty} x_\nu > x_1$$

$$S_2^2 = \int k^2(t,s)\,dt\,ds = \sum_1^{\infty} x_\nu^2 > x_1^2$$

$$S_1 = \frac{\Omega\tau}{\pi};\quad S_2^2 = \frac{1}{\pi^2}[2\Omega\tau Si(2\Omega\tau) - 2\,\mathrm{sen}^2\,\Omega\tau + Ci(2\Omega\tau) - C - ln\,2\Omega\tau]$$

(C = constante de Eulér-Mascheroni).

En nuestra tabla hemos puesto $\overline{E} = S_2$ para $S_2 < 1$ y $\overline{E} = 1$ para $S_2 > 1$. Para obtener una cota inferior comparamos

$$[\sum_2^{\infty} x_\nu]^2 = [S_1 - x_1]^2$$

con

$$\sum_2^{\infty} x_\nu^2 = S_2^2 - x_1^2,$$

lo que nos da

$$[S_1 - x_1]^2 \geqq S_2^2 - x_1^2.$$

Como cota inferior $\underline{E}$ obtenemos

$$\underline{E} = \frac{S_1}{2} + \sqrt{\frac{S_2^2}{2} - \frac{S_1^2}{4}}$$

siempre que la raíz sea real.

Los teoremas 1 a 4 demuestran que una señal de duración τ y de una forma utilizable en la técnica de las telecomunicaciones posee un espectro que en el intervalo $|\omega\tau| \leqq \pi$ depende poco de la forma de la señal y en cambio depende de su duración. Es sabido que para frecuencias mayores el espectro depende mucho de los detalles de la señal.

III. *La regla de Küpfmüller*

Para el filtro ideal $T(j\omega) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ para $|\omega| \begin{cases} < \Omega \\ > \Omega \end{cases}$

Küpfmüller ha calculado la siguiente respuesta $u(t)$ a la tensión escalón e: $u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} Si(\Omega\tau)$ para $e(t) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$ para $t \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}$.

Con su definición del tiempo de formación τ de la señal resulta

$$\tau = \frac{1}{\left(\frac{du}{dt}\right)_{\max}} = \frac{\pi}{\Omega}.$$

Es fácil generalizar este teorema para filtros arbitrarios. Representemos la tensión escalón por medio de la integral

$$e(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\nu - j\infty}^{\nu + j\infty} \frac{e^{pt}}{p} dp = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{para } t \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases}.$$

$$\nu > 0$$

Siendo $T(j\omega)$ la transferencia de un circuito lineal arbitrario y no necesariamente pasivo, obtenemos

$$u(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\nu - j\infty}^{\nu + j\infty} \frac{T(p)}{p} e^{pt} dp.$$

y para la derivada de la respuesta

$$u'(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\nu - j\infty}^{\nu + j\infty} T(p)\, e^{pt} dp.$$

Suponemos que para $p \to \infty$ $T(p)$ se anula por lo menos como $1/p^2$, lo que no es una restricción para los filtros de buena selección. Entonces podemos poner $\nu=0$ en la última integral, lo que hace evidente la desigualdad siguiente:

$$\left|\frac{du}{dt}\right|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\infty}^{\infty} T(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega\right| \leqq \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|T(j\omega)\right| d\omega.$$

La integral del segundo miembro es igual al área de la curva de selección del filtro, la cual en el caso del filtro ideal de Küpfmüller toma el valor de 2Ω. En el caso de una fase lineal, vale el signo igual. Siendo lineal la fase, obtenemos

$$T(j\omega)=|T|\, e^{-j\omega t_0},$$

de manera que en el instante $t=t_0$ resulta

$$T(j\omega)\, e^{j\omega t}=|T|.$$

Con esto demostramos el teorema 5.

IV. *Filtros con transitorios monótonos*

Wallman ha enumerado las reglas siguientes sobre filtros con transitorios monótonos:

La curva de selección de un filtro debe ser campaniforme y la fase debe ser lineal para que los transitorios sean monótonos.

Las obtuvo como generalización de muchos ejemplos particulares.

La primera condición necesaria que debe cumplir tal filtro, publicada como resultado riguroso es la de A. González Domínguez.

Las siguientes fórmulas rigurosas implican que la curva de selección debe ser campaniforme por ser monótonos los transitorios.

Una condición equivalente a la monotonía de los transitorios es la que la derivada de la respuesta sea no negativa. Usando la inversión de nuestra representación de la respuesta a la tensión escalón es fácil ver las consecuencias de esta desigualdad para la transferencia:

$$T(j\omega)=\int_0^\infty \frac{du}{dt}\, e^{-j\omega t}\, dt; \quad \frac{du}{dt} \geqq 0.$$

Obtenemos

$$|T(j\omega|=\left|\int_0^\infty u'(t)\, e^{-j\omega t}\, dt\right| \leqq \int_0^\infty u'(t)\, dt = T(0);$$

el signo igual vale sólo para $\omega=0$. Para todas las derivadas de la transferencia resultan desigualdades análogas siendo legítima la derivación bajo la integral por ser $u'(t)$ una función que disminuye para $t \longrightarrow \infty$ exponencialmente.

$$\left|\frac{d^nT}{d\omega^n}\right| = \left|\int_0^\infty u'(t)\,(-jt)^n\, e^{-j\omega t}\, dt\right| \leqq \int_0^\infty u'(t)\, t^n\, dt = \left|\frac{d^nT}{d\omega^n}\right|_{\omega=0}.$$

Para la curva de selección resulta

$$|T(j\omega)|^2 = \left|\int_0^\infty \int_0^\infty u'(t_1)\, u'(t_2)\, e^{j\omega(t_1-t_2)}\, dt_1\, dt_2\right| \leqq$$

$$\int_0^\infty u'(t_1)\, u'(t_2)\, dt_1\, dt_2 = |T|^2{}_{\omega=0}$$

y para todas las derivadas pares

$$\left|\frac{d^{2n}|T|^2}{d\omega^{2n}}\right| = \left|\int_0^\infty \int_0^\infty u'(t_1)\, u'(t_2)\, (t_1-t_2)^{2n}\, e^{j\omega(t_1-t_2)}\, dt_1\, dt_2\right| \leqq$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty u'(t_1)\, u'(t_2)\, (t_1-t_2)^{2n}\, dt_1\, dt_2 = \left|\frac{d^{2n}|T|^2}{d\omega^{2n}}\right|_{\omega=0}.$$

Usando sólo la desigualdad con $n=2$. ya resulta que la curva de selección debe ser campaniforme. Buscando la curva que sea la más semejante al rectángulo del filtro ideal, ponemos el signo igual en esta desigualdad. Esto demuestra que la correspondiente curva de selección que debe empezar con el valor 1 para la frecuencia $\omega = 0$ y terminar con el valor 0 para frecuencias grandes, se compone de dos trozos de parábola. Esta curva posee el área mínima compatible con su curvatura inicial para $\omega = 0$. Su área es Ω. su tangente máxima es Ω^{-1} y su derivada segunda es Ω^{-2}.

Es una consecuencia de las otras desigualdades que en realidad la tangente máxima de la curva de selección de un filtro con transitorios monótonos es menor que la tangente máxima de nuestra curva formada de dos arcos de parábola; es decir, la curva de selección de tal filtro es muy distinta del rectángulo, es una curva campaniforme.

LITERATURA

1) G. Doetsch. Laplace Transformation, Berlin, J. Springer 1937, pág. 147.
A. Sommerfeld. Atombau und Spektrallinien II, Vieweg, Braunschweig 1939, pág. 715.
2) K. Küpfmüller. E. N. T. 1 (1924) 141 und 5 (1928) 18.
3) G. Valley and H. Wallman. Vacuum tube amplifiers. Macgraw Hill, New York 1948, pág. 80.
4) A. González Domínguez. XIII Reunión de la asociación física argentina del 23/24 de mayo de 1949.
5) K. Fränz. Zeitschrift fuer Hochfrequenz 61 (1943) 51.