SOBRE ALGUNOS PUNTOS DE LA TEORIA MATEMATICA DE LOS CIRCUITOS LINEALES (*)

por ALBERTO GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ
Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires

(Recibido el 28 Dic. 1949)

SUMMARY. This paper deals with certain aspects of the mathematical theory of linear systems. In the first part we study those systems whose transfer function is a Laplace —Stieltjes integral with a real generator— the inditial admittance of the system — of bounded variation in every finite interval. The stable systems are obtained when de total variation in $(0, \infty)$ is bounded. General theorems of Wiener-Pitt on Fourier-Stieltjes integrals, and their analogues for Laplace — Stieltjes integrals enable one to formulate simple and general stability criteria, in particular for feedback systems of one or several meshes.

The second part deals with de "Wiener transfer functions", that is, those whose admittance han a derivative of integrable square. Due to the essential fact that the class of these functions is identical with the class H_2 of Hardy in a half plane, it is possible to establish a canonical representation of these transfer functions where their modulus on the real axis and their zeros in the right half plane figure as parameters (formula 27). It is shown how this formula can be made the basis of a theory, in a certain sense complete, of these transfer functions, generalizing automatically the important concept of "minimum phase-shift" transfer functions due to Bode, and of "all-pass" transfer functions. Formula (45) determines the pase of a Wiener transfer function as a function of its modulus, and vice-versa, under conditions which are more general than the usual ones. Results are also obtained when the phase or the modulus are known only in a finite frequency interval.

In the third part we study the synthesis of circuits whose transfer function is preassigned. By means of formula (77) it is possible to synthetize a transfer function as a product of simple, maximum modulus transfer functions. Theorems 26 and 27 contain results on the possibility of synthesizing transfer functions when the modulus and the phase are simultaneously given.

(*) Este extenso trabajo del doctor ALBERTO GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ representa la contribución del autor a los homenajes científicos tributados a los doctores Ricardo Gans y Teófilo Isnardi.

Nos ocupamos en este trabajo, que consta de tres partes, de ciertos aspectos de la teoría matemática de los circuitos lineales. Estudiamos en la primera los sistemas cuya transferencia es una integral de Laplace-Stieltjes con generatriz real —la *admitancia indicial* del sistema—, de variación acotada en todo intervalo finito. Dentro de esta amplia categoría —que comprende naturalmente las transferencias de sistemas constituídos por un número finito de constantes condensadas, que son funciones *racionales*—, los sistemas *estables* corresponden a aquellas integrales de Laplace-Stieltjes, cuya generatriz tiene variación total acotada en $(0, \infty)$. Teoremas generales de Wiener-Pitt sobre integrales de Fourier-Stieltjes y sus análogos para integrales de Laplace-Stieltjes demostrados por Pitt, Beurling y Hille (cfr. Hille, 1), permiten formular criterios generales y simples de estabilidad, en particular para sistemas con realimentación, de una o varias mallas.

Estudiamos en la segunda parte las *transferencias de Wiener*, es decir, aquéllas cuya admitancia tiene derivada de cuadrado integrable. Gracias al hecho —esencial para nuestro objeto—, de que estas funciones coinciden, según un teorema de Paley-Wiener, con las llamadas funciones de la clase H_2 de Hardy en el semiplano, se puede establecer una representación canónica de estas transferencias, en la que intervienen como parámetros su módulo para las frecuencias reales y sus ceros interiores al semiplano de la derecha, (fórmula 27). Mostramos cómo esta fórmula permite elaborar una teoría en cierto sentido completa de estas transferencias, generalizándose automáticamente el concepto importante de transferencia de defasado mínimo debido a Bode, y el de transferencia «pasa-todo». Señalemos la fórmula (45), que determina la fase de una transferencia de Wiener en función de su módulo y viceversa, en condiciones más generales que las usuales. Obtenemos también teoremas sobre la determinación de la fase en función del módulo y viceversa, en el caso muy común en la práctica de que alguna de éstas características se conozca sólo en un intervalo finito de frecuencias.

Abordamos en la tercera parte el problema de la síntesis de circuitos de transferencia prefijada. Damos en primer lugar un método que permite, en casos muy generales, sintetizar una transferencia de módulo prefijado por medio de una expresión (fórmula 77) constituída por un producto de transferencias simples de módulo máximo.

Los teoremas 26 y 27, con que termina la memoria, contienen resultados sobre la posibilidad de sintetizar transferencias de módulo y fase *simultáneamente* prefijados.

La mayoría de los resultados contenidos en esta memoria han sido dados ya a conocer en comunicaciones presentadas en las reuniones 7ª, 8ª, 9ª, 10ª, 11ª y 13ª de la Asociación Física Argentina, realizadas la primera en La Plata, el 19 de abril de 1946, y la última en Buenos Aires, el 23 de mayo de 1949.

PRIMERA PARTE

TRANSFERENCIAS DE LAPLACE-STIELTJES

1. *Definiciones. Sistemas lineales.*

Los sistemas que consideraremos serán lineales, con parámetros físicos independientes del tiempo; y admitiremos que para ellos el principio de superposición se traduce en la fórmula fundamental

$$R(t) = \int_0^t E(t-\tau)\, dG(\tau). \qquad [1]$$

En esta fórmula, $R(t)$ es la «respuesta» del sistema a la «excitación» $E(t)$; $G(t)$, que supondremos de variación acotada en todo intervalo finito, normalizada y desprovista de parte singular (¹), es una función característica del sistema, llamada «admitancia indicial». $E(t)$, $G(t)$ y $R(t)$ son nulas para $t \leqq 0$. De la fórmula (1) se deduce inmediatamente que $G(t)$ es la respuesta del sistema al «escalón», o función de Heaviside

$$U(t) = \begin{matrix} 0 & \text{para} & t \leqq 0 \\ 1 & \text{para} & t > 0. \end{matrix}$$

(¹) El admitir que $G(t)$ carece de parte singular no restringe la generalidad en vista de las aplicaciones; en efecto las funciones singulares (esto es, de variación acotada, continuas y de derivada nula en casi todo punto) no han tenido hasta ahora trascendencia en la física, y en cambio simplifica notablemente el tratamiento matemático el suponerlas inexistentes en $G(t)$, según veremos dentro de poco, cuando estudiemos los sistemas estables.

De entre los sistemas que cumplen la relación (1), sólo estudiaremos aquéllos cuya admitancia indicial es tal que la integral

$$g(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\, d\, G(t), \qquad p = x + i\omega \qquad [2]$$

es convergente para p de parte real suficientemente grande. En tales sistemas, la «transferencia compleja» $g(p)$ determina unívocamente a $G(t)$, y puede utilizarse para caracterizarlos, con iguales títulos que esta última. Si la integral (2) converge para $x = 0$, la función $g(i\omega)$ coincide con el «cociente de la respuesta por la excitación en régimen sinusoidal puro». Hay, pues, razones físicas poderosas para definir la transferencia de un circuito lineal como lo hemos hecho, por medio de una integral de Laplace-Stieltjes. En todo este trabajo, con la locución «transferencia de Laplace-Stieltjes» designaremos, pues, las integrales de Laplace-Stieltjes convergentes, de generatriz real.

2. *Sistemas estables.*

Caso particular de los sistemas cuya transferencia tiene la expresión (2), son los sistemas *estables*. Son aquéllos en los que toda excitación acotada origina respuesta acotada [2]. Los sistemas estables se caracterizan por tener admitancia indicial de variación total acotada en $(0, \infty)$ [3].

He aquí algunos ejemplos, ilustrativos de las definiciones que preceden, que consignamos para futura referencia.

1) $$g(p) = \frac{p - a}{p + a}, \quad a \text{ real.} \qquad [3]$$

---

(2) Usaremos indistintamente las palabras "sistema" y "circuito".

(3) Cfr. el teorema de Hildebrandt, (HILDEBRANDT, 1, pág. 868), según el cual toda funcional lineal definida en el espacio de las funciones medibles acotadas en $(-\infty, \infty)$, adoptando como norma el extremo superior de $|X(t)|$, se expresa por una integral de Lebesgue-Stieltjes

$$F(x(t)) = \int x(t)\, d\alpha(E),$$

y la variación total de $\alpha(E)$ es la norma de la funcional.

Este circuito «pasa-todo» ($|g(i\omega)|=1$) es estable. En efecto

$$g(p)=\int_0^\infty e^{-pt}\,d\,G(t), \tag{4}$$

y la variación total de

$$G(t)=U(t)-2a\int_0^t e^{-a\tau}\,d\tau,$$

es acotada.

2) $$g(p)=\frac{p+a}{p-a}=\int_0^\infty e^{-pt}\,d\,H(t).$$

Como la variación total de

$$H(t)=U(t)+2a\int_0^t e^{-a\tau}\,d\tau$$

no es acotada, el circuito es inestable.

3) $$g(p)=ce^{-ap}=\int_0^\infty e^{-pt}\,d\,[cU(t-a)]; \tag{5^1}$$

el circuito (que es una línea de retardo) es, pues, estable.

4) $$g(p)=e^{ap}, \quad a>0. \tag{5^2}$$

Esta función no es una transferencia, según nuestra definición, pues no es representable por una integral de Laplace-Stieltjes del tipo (2).

5) $$g(p)=\mu=\int_0^\infty e^{-pt}\,d\,[\mu\,U(t)]. \tag{5^3}$$

$g(p)$ es la transferencia de un «amplificador ideal» de constante de amplificación μ. El sistema es estable. Para abreviar, llamaremos transferencias estables a las correspondientes a sistemas estables.

3. *Criterio general de estabilidad.*

Es un hecho muy interesante el que, en condiciones muy generales, *las funciones holomorfas de transferencias estables son transferencias estables.* En términos más precisos vale el siguiente

T e o r e m a 1. - *Sea $g(p)$ una transferencia estable, y sea $\varphi(z)$ una función holomorfa en un cierto recinto R. La condición necesaria y suficiente para que la función*

$$h(p) = \varphi(g(p)) \qquad [6]$$

sea una transferencia estable, es que R contenga la adherencia del conjunto de valores que $g(p)$ toma en el semiplano completo de la derecha.

Esta proposición, que es la transcripción, en términos de transferencias, de un teorema que figura en el tratado de Hille (4), tiene su raíz en un clásico teorema de Wiener, según el cual si una función que no se anula admite un desarrollo en serie de Fourier absolutamente convergente, su recíproca admite un desarrollo semejante.

El teorema 1 tiene numerosas aplicaciones. Poniendo, por ejemplo, $\varphi(z) = 1/z$, *resulta que la recíproca de una transferencia estable, distinta de cero para $Rp \geqq 0$, es una transferencia estable*; y como el producto de dos transferencias estables es también una transferencia estable, (cfr. D. V. Widder, 1, pp. 83 y siguientes), se llega al siguiente

T e o r e m a 2. - *El cociente de dos transferencias estables es una transferencia estable, si el denominador no se anula en el semiplano completo de la derecha.*

Bode llama «complementarias», dos transferencias cuyo pro-

(4) E. HILLE, 1, pág. 314, Lemma 15.5.1.

ducto es una constante real [5]. Del Teorema 2 se deduce, como caso muy particular, el siguiente

Teorema 3. - *Toda transferencia estable, sin ceros en el semiplano completo de la derecha, tiene una transferencia complementaria cuyo producto por ella es igual a la constante positiva prefijada A.*

Este teorema extiende, para transferencias de Laplace-Stieltjes, un teorema formulado por Bode para transferencias racionales [6].

4. *Criterio general de estabilidad para sistemas con realimentación.*

Del teorema 2 se deducen criterios generales de estabilidad para sistemas con realimentación. En el caso más simple considerado por Nyquist, en que el sistema consta de un amplificador de constante μ (ejemplo 5 de pág. 279) y de un circuito pasivo de transferencia $\beta(p)$, la transferencia total del sistema tiene, según es bien sabido [7], la forma

$$g(p) = \frac{\mu\beta}{1-\mu\beta}. \qquad [7]$$

Si se repara en que el denominador de $g(p)$ es, como diferencia de dos transferencias estables, una transferencia de la misma clase, obtenemos del teorema 2, sin necesidad de cálculos, el

Teorema 4. - *Si tanto el circuito μ como el circuito β son estables, la condición necesaria y suficiente para que el circuito con realimentación de transferencia (7) sea estable, es que sea*

$$\mu(p)\,\beta(p) \neq 1 \qquad [8]$$

para todo p de parte real $\geqq 0$.

En el caso más complicado de circuitos con varias mallas de

(5) Bode, 1, pág. 249.
(6) Bode, 1, pág. 249.
(7) Bode, 1, pp. 31 y siguientes.

reacción, la transferencia será, en la generalidad de los casos, un cociente en que el numerador y denominador constan de varios sumandos, cada uno de los cuales es a su vez el producto de un número finito de transferencias, y el criterio general de estabilidad sigue siendo aplicable. *El sistema será o no estable, según que el denominador sea o no distinto de cero en el semiplano completo de la derecha.*

Quedan así precisados, y extendidos al caso general de transferencias de Laplace-Stieltjes, los teoremas consignados por Bode para transferencias racionales.

5. *Sistemas de admitancia monótona.*

Caso particular de los circuitos estables son aquellos cuya admitancia indicial es acotada no decreciente. Los llamaremos «sistemas de admitancia monótona». Su interés reside en que la monotoneidad de la respuesta es propiedad deseable (ausencia de sobretensiones). Vamos a ver que es fácil obtener sobre ellos multitud de resultados a poco precio. En efecto, su transferencia, que supondremos normalizada, es decir, $g(0)=1$ (lo cual no restringe la generalidad) ([8]), coincide en el eje imaginario (a menos de una inesencial diferencia de signo en el integrando), con la función característica de una variable aleatoria no negativa. A continuación mostramos, con algunos ejemplos, el partido que puede sacarse de esta correlación.

Cabe preguntarse si existen filtros de respuesta monótona. La respuesta es negativa. Más precisamente, la mera transcripción de resultados conocidos sobre variables aleatorias infinitamente pequeñas, conduce al siguiente

Teorema 5. - *Sea $g(p)$ la transferencia normalizada de un circuito de admitancia monótona. Si existe un $\omega_0 > 0$, tal que para todas las frecuencias menores que ω_0 en valor absoluto se verifica la igualdad $|g(i\omega)|=1$, será necesariamente*

$$g(p) = e^{-i\alpha\omega}, \quad \alpha \geqq 0.$$

([8]) En efecto

$$g(p) = c\int_0^\infty e^{-pt}\, d\left[\frac{1}{c}\, G(t)\right] = c\int_0^\infty e^{-pt}\, dH(t), \quad c = g(0).$$

Es decir, que el único circuito de admitancia monótona que tiene las propiedades exigidas en el teorema, es la línea de retardo.

6. *Relaciones entre el tiempo de formación de la señal y el módulo de la transferencia.*

Dos números característicos importantes ligados con la admitancia indicial, son el «tiempo de retardo» y el «tiempo de formación» de la señal (9). Se han dado diversas definiciones de esstas dos características, semiempíricas, y por tanto inadecuadas para un tratamiento teórico general. Es por ello interesante comprobar que, *para circuitos de admitancia monótona* es posible, dejándose guiar por la analogía con las variables aleatorias no negativas, dar de estos dos números una definición satisfactoria desde el punto de vista de la teoría. Es fácil comprobar, en efecto, que el tiempo de retardo y el tiempo de formación son conceptos correlativos de «esperanza matemática» y «desviación standard», respectivamente.

Dado, pues, un circuito de admitancia monótona $G(t)$, definiremos los dos «tiempos» mencionados de la manera siguiente:

$$\tau_r = \int_0^\infty t \, d\, G(t) \tag{9}$$

$$\tau_f^2 = \int_0^\infty (t - \tau_r)^2 \, d\, G(t). \tag{10}$$

Son de gran trascendencia en la técnica de las comunicaciones las relaciones que ligan el tiempo de formación de la señal con el módulo de la transferencia: una de ellas es la llamada regla de Kupfmüller, según la cual el ancho de la banda pasante es aproximadamente recíproco del tiempo de formación (10).

---

(9) En inglés "delay time" y "build up time", respectivamente.

(10) La regla de Kupfmüller, cuya validez aproximada comprobó su autor en el caso de un filtro ideal, ha sido justificada con rigor, para una categoría bastante general de sistemas, por el Dr. Kurt Fränz (cfr. K. FRÄNZ, 1).

He aquí un teorema que pertenece a ese orden de ideas.

Teorema 6. - *Sea*

$$g(p)=\int_0^\infty e^{-pt}\,d\,G(t) \qquad [11]$$

la transferencia de un circuito de admitancia monótona que cumple la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g'''(i\omega)|\,d\omega<\infty. \qquad [12]$$

Se verifica entonces

$$\tau_f^2\leqq\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|g'''(i\omega)|\,d\omega-|g'(0)|^2. \qquad (13)$$

En efecto,

$$\tau_f^2+|g'(0)|^2=\int_0^\infty t^2\,d\,G(t)=\int_0^\infty t^3\,d\,G(t)\int_0^\infty e^{-xt}\,dx=$$

$$=\int_0^\infty dx\int_0^\infty e^{-xt}\,t^3 d\;G(t)=\int_0^\infty[-g'''(x)]\,dx\leqq\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|g'''(i\omega)|\,d\omega.$$

La inversión del orden de integración está justificada por la positividad, y la última desigualdad es consecuencia de un teorema de M. Riesz (11).

(11) M. Riesz, 1.

SEGUNDA PARTE (*)

TEORIA DE LAS TRANSFERENCIAS DE WIENER

7. *Sistemas de excitación discontinua.*

Objeto principal de este trabajo es el estudio de las *transferencias de Wiener*. Así llamaremos a las transferencias de aquellos sistemas cuya admitancia indicial tiene derivada de cuadrado sumable en $(0, \infty)$ ([12]).

El estudio y descubrimiento de las propiedades de los sistemas de Wiener, se facilita por la observación de que tales sistemas son correlativos «continuos» de los sistemas «de excitación discontinua» ([13]). Designaremos así aquellos sistemas lineales tales que entre la excitación, la admitancia y la respuesta, que son sendas sucesiones $\{E_n\}$, $\{G_n\}$ y $\{R_n\}$, subsiste la relación (análoga a la (1)):

$$R_n = \sum_{\nu=0}^{n} E_{n-\nu} G_\nu. \tag{14}$$

La transferencia del circuito de admitancia $\{G_n\}$ no es otra cosa que la serie de Taylor

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} G_n z^n. \tag{15}$$

La teoría matemática de estos circuitos coincide, pues, con la de las series de potencias de coeficientes reales convergentes en

(*) Los teoremas 9, 16, 18, 19 y 20 figuran en un memorándum redactado por encargo de la Compañía Phillips, en el año 1945. Agradezco al ingeniero Alberto Doiman, director de la empresa, su amable autorización para reproducirlos aquí.

([12]) Es justo llamarlas así, pues Wiener ha sido el primero en utilizar, para fines de síntesis, la representabilidad de transferencias por medio de integrales de Laplace con generatriz de cuadrado sumable. Cfr. Y. W. LEE, 1; WIENER-LEE, 1, 2; LEE-WIENER, 1.

([13]) Mac Coll los llama "sampling circuits"; cfr. MAC COLL, 1, pg. 88; James, Nichols y Phillips (1, pg. 231), los llaman "filters with pulsed data".

el círculo unidad. Los circuitos discontinuos estables corresponden, así, a las series de potencias (15) absolutamente convergentes en $|z| \leqq 1$; y los circuitos correlativos de los correspondientes a transferencias de Wiener, son aquéllos cuya admitancia es tal que

$$\sum_{n=0}^{\infty} |G_n|^2 < \infty . \tag{16}$$

Es bien sabido que la familia de las funciones $g(z)$, regulares en $z<1$, cuyos coeficientes cumplen la relación (16), coincide con la familia de las funciones regulares en $|z|<1$ y tales que

$$\int_0^{2\pi} |g(re^{i\vartheta})|^2 \, d\vartheta < c, \quad 0 \leqq r < 1, \quad z = re^{i\vartheta} ;$$

es decir, con la clase H_2 de Hardy.

En definitiva: «*los sistemas de Wiener de excitación discontinua son aquellos cuya transferencia es una función de la clase* H_2, *de coeficientes reales*».

8. *Forma canónica de las transferencias de Wiener, correspondientes a circuitos de excitación discontinua.*

La observación recién consignada permite elaborar la teoría completa de tales sistemas, que dejamos para otra ocasión. Nos limitaremos a hacer dos observaciones que nos serán necesarias más adelante.

La primera es que las funciones $g(re^{i\vartheta})$ de la clase H_p de Hardy son las funciones regulares en $|z|<1$, tales que $|g(re^{i\vartheta})|^p$ tiene, en el mismo recinto, una mayorante harmónica. El interés de esta propiedad característica de las funciones H_p reside en que es invariante con respecto a transformaciones conformes, y permite por lo tanto definir las clases H_p no sólo para el círculo unidad, sino para todo recinto simplemente conexo.

La segunda es que, de una representación canónica de las funciones de la clase H_p dada por Smirnoff [14], se deduce la siguiente representación canónica de las transferencias de sistemas de Wiener, de excitación discontinua, que designaremos como

---

[14] v. J. SMIRNOFF, 1.

Teorema 7. - Toda transferencia de un sistema de Wiener de excitación discontinua admite la representación canónica siguiente:

$$g(z)=B(z)\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{(1-z^2)\lg M(t)\,dt}{1-2z\cos t+z^2}\right\}\cdot$$

$$\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\frac{(1-z^2)\,d\,s(t)}{1-2z\cos t+z^2}\right\}. \qquad (17)$$

En esta fórmula, $B(z)$ es el «producto de Blaschke» formado con los ceros z_ν de $g(z)$ interiores al círculo unidad:

$$B(z)=z^k\prod_\nu\frac{z-z_\nu}{z-\frac{1}{\bar{z}_\nu}}\frac{1}{|z_\nu|}, \qquad (18)$$

debiendo los z_ν cumplir la condición

$$\prod_\nu|z_\nu|<\infty; \qquad (19)$$

$M(t)$ es una función medible no negativa, tal que $|M(t)|^p$ y $\lg M(t)$ son sumables; finalmente $s(t)$ es una función acotada no decreciente, cuya derivada es nula en casi todo punto del intervalo de definición.

Se comprueba fácilmente que $M(t)$ es, en casi todo punto, el módulo de la transferencia límite, y este hecho confiere a la fórmula (17) evidente importancia para fines de síntesis.

9. *Las funciones de la clase H_p de Hardy en el semiplano de la derecha.*

Consignamos en este parágrafo algunos resultados acerca de las funciones de la clase H_p en el semiplano de la derecha, que necesitaremos luego en varias ocasiones, y en particular para establecer la forma canónica de las transferencias de Wiener [15].

---

[15] Véase la memoria de Kriloff, 1, donde figuran teoremas más generales referentes al semiplano superior.

Diremos que una función $g(p)$ $(p=x+i\omega)$, regular en el semiplano $x>0$, pertenece a la clase de Hardy-Kriloff de orden λ, o más brevemente, que $g(p) \varepsilon H K_\lambda$, si $|g(p)|^\lambda$ tiene en ese semiplano una mayorante harmónica.

De lo dicho en el parág. 8 se deduce que estas funciones no son sino las funciones de la clase H_λ trasplantadas del círculo unidad al semiplano de la derecha por medio, v. g., de la transformación

$$z=\frac{1-p}{1+p}, \quad p=\frac{1-z}{1+z}$$

$$e^{i\vartheta}=\frac{1-i\omega}{1+i\omega}, \quad i\omega=\frac{1-e^{i\vartheta}}{1+e^{i\vartheta}}$$

$$\vartheta=-2\operatorname{arctg}\omega, \quad \omega=-\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}, \quad d\vartheta=\frac{-2d\omega}{1+\omega^2}. \tag{20}$$

Resulta así, sin necesidad de cálculos, que la forma general de las funciones de la clase HK_2 es

$$g(p)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^n \tag{21}$$

con

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2<\infty. \tag{22}$$

Poco más trabajo exige el obtener, aplicando las transformaciones (20) a la fórmula general (17), el siguiente

T e o r e m a 8. - La forma canónica de las funciones de la clase HK_λ reales para p real, es

$$g(p)=e^{\alpha p}B(p)\exp\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{p\lg M(t)\,dt}{p^2+t^2}\right\}\exp\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{p\,d\,s(t)}{p^2+t^2}\right\}. \tag{23}$$

Los símbolos que aparecen en esta fórmula tienen el siguiente significado:

α es una constante no positiva; $B(p)$ es el «producto de Blaschke» formado con los ceros p_ν de $g(p)$ interiores al semiplano positivo:

$$B(p)=\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{p-p_\nu}{p+p_\nu}\,\frac{|1+p_\nu|}{1+p_\nu}\,\frac{|1-p_\nu|}{1-p_\nu}, \tag{24}$$

debiendo cumplir los p_ν la condición

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{Rp_\nu}{1+|p_\nu|^2}<\infty; \tag{25}$$

$M(t)$ es una función medible no negativa tal que las funciones

$$\frac{|M(t)|^\lambda}{1+t^2} \quad \text{y} \quad \frac{\lg M(t)}{1+t^2}$$

son sumables; finalmente,

$s(t)$ es una función no creciente, de variación acotada en $(0,\infty)$, cuya derivada es nula en casi todo punto del intervalo de definición.

10. *Forma paramétrica de las transferencias de Wiener.*

Las funciones regulares en el semiplano de la derecha que cumplen la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(x+i\omega)|^\lambda d\omega<c, \quad 0<x<\infty \tag{26}$$

son tales que $|g(p)|^\lambda$ admite en ese semiplano una mayorante harmónica ([16]); constituyen, pues, una subclase de la clase HK_λ. Las llamaremos *funciones de la clase de Hille-Tamarkin,* y escribiremos, más brevemente, $g(p)\,\varepsilon\, HT_\lambda$ ([17]). Estas funciones des-

---

([16]) Véase, por ejemplo, KRILOFF, 1, pág. 98.

([17]) Hille y Tamarkin han sido, en efecto, los primeros en estudiarlas sistemáticamente en una conocida memoria. Cfr. HILLE-TAMARKIN, 1.

empeñarán un papel fundamental en lo que sigue, gracias al hecho, esencial para nuestro fin, descubierto por Paley-Wiener ([18]), de que la clase de las funciones HT_2 es idéntica con la clase de las integrales de Laplace con generatriz de cuadrado sumable. Por lo tanto, *las transferencias de Wiener no son sino las funciones de la clase HT_2 reales para p real.*

Como las funciones de la clase HT_λ poseen todas una función límite $g(i\omega) \varepsilon L^\lambda$ ([19]), de la fórmula (23) se deduce el siguiente

Teorema 9. - Toda transferencia de Wiener admite la siguiente representación paramétrica:

$$g(p) = e^{-\alpha p} B(p) \exp\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{p \lg M(t)\, dt}{p^2+t^2}\right\} \exp\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{p\, d\, s(t)}{p^2+t^2}\right\}. \tag{27}$$

En esta fórmula α es una constante no negativa, y $B(p)$ está definida por la fórmula (24), debiendo los p_ν cumplir la condición (25);

$s(t)$ es una función no creciente, de variación acotada en el intervalo de definición; finalmente $M(t)$ es una función medible no negativa, que cumple las condiciones

$$\int_0^\infty |M(t)|^2\, dt < \infty, \tag{28}$$

$$\int_0^\infty \frac{|\lg M(t)|\, dt}{1+t^2} < \infty. \tag{29}$$

11. *Relaciones entre las transferencias y las funciones de la clase HK_2.*

Antes de entrar a estudiar la representación paramétrica, lo cual va a permitirnos hacer la teoría completa de las transfe-

---

([18]) Paley-Wiener, 1, pág. 8, Theorem V. Cfr. también G. Doetsch, 1, pág. 272, Satz, 1, quien da del teorema una demostración especialmente interesante para el fin que nos interesa, apoyándose en resultados de Hille-Tamarkin. Otra demostración del teorema figura en Hille, 2, pág. 99. Cfr. nota 22.

([19]) Ver Hille-Tamarkin, I, pág. 338.

rencias de Wiener, consignaremos algunos resultados que nos serán útiles más adelante, sobre todo en los problemas de síntesis, acerca de las relaciones existentes entre las funciones HK_λ y HT_λ.

Teorema 10. - *El producto de una función $\varphi(p)$, regular y acotada en el semiplano $x>0$, y real para p real, por una transferencia de Wiener $g(p)$, es una transferencia de Wiener.*

Este teorema se demuestra observando que $\varphi(p)\,\varepsilon\, HK_1$; si se efectúa la multiplicación expresando $\varphi(p)$, y $g(p)$ por sus representaciones canónicas, el teorema resulta sin dificultad (20).

Teorema 11. - *El producto de una función $\varphi(p)\,\varepsilon\, HK_2$, real para p real, por una transferencia de Wiener $g(p)$ tal que $g(i\omega)=0\left(\frac{1}{\omega}\right)$, es una transferencia de Wiener* [20].

También este teorema se demuestra sin dificultad recurriendo a la representación canónica de los factores.

Teorema 12. - *Condición necesaria y suficiente para que una función $\varphi(p)$, regular en $x>0$, pertenezca a la clase HK_λ, es la siguiente:*

$$\frac{\varphi(p)}{(1+p)^{2/\lambda}}\,\varepsilon\, HT_\lambda. \tag{30}$$

Este teorema se demuestra, igualmente, recurriendo a la representación canónica de ambas clases [21].

Para $p=2$ se obtiene del teorema anterior, teniendo en cuenta las fórmulas (21) y (22), el siguiente corolario, que enunciamos como

---

(20) El teorema es válido, naturalmente, sin la restricción de que $\varphi(p)$ y $g(p)$ sean reales para p real, y se demuestra de igual modo.

(21) De todo teorema sobre representabilidad de funciones de la clase HT_λ por integrales de Laplace se deduce, pues, en virtud del Teorema XII, una proposición análoga sobre representabilidad de funciones de la clase HK_λ. Teoremas de los mencionados en primer término han sido dados por varios autores; cfr. Caton-Hille, I, pág. 236, donde se demuestran resultados muy generales de este tipo. Cfr. también G. Doetsch, I, donde por primera vez figuran demostraciones completas de teoremas sobre representabilidad de funciones de la clase HT_λ por intermedio de integrales de Laplace.

T e o r e m a 13 [22]. - *La clase de las transferencias de Wiener es idéntica con la clase de funciones*

$$g(p)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(1-p)^n}{(1+p)^{n+1}}, \tag{31}$$

donde los coeficientes a_n *son reales, y*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 < \infty. \tag{31'}$$

T e o r e m a 14. - *La recíproca de una función* $g(p)$ *de la clase* HK_λ *sin ceros interiores y tal que* $g(i\infty) \neq 0$, *es una función de la misma clase.*

Este teorema es consecuencia de la fórmula canónica.

T e o r e m a 15. - *La condición necesaria y suficiente para que una función* $F(p)$, *regular en el semiplano de la derecha, sea la recíproca de una transferencia de Wiener que no se anula para ninguna frecuencia real, es que esa función sea el producto de* $(1+p)^2$ *por una transferencia de Wiener sin ceros en el semiplano* $x \geqq 0$.

La condición es necesaria. En efecto, si se cumple la tesis será, en virtud del Teorema 12:

$$F(p)=\frac{1+p}{h(p)} \qquad \begin{array}{l} h(p) \neq 0, \text{ para } Re(p) \geqq 0, \\ h(p) \in HK^2. \end{array}$$

Aplicando el Teorema 14 resulta pues

$$F(p)=(1+p)\, g(p)=(1+p)^2 f(p),$$

con $f(p) \in HT^2$ y no nula en $Re(p) \geqq 0$.

Invirtiendo los pasos de la demostración se comprueba que la condición es también suficiente.

---

[22] De igual manera se demuestra que la (31), sin la restricción de que a_n sea real, es la forma general de toda función $f(p) \in HT_2$. Un teorema equivalente ha sido demostrado por Hille (HILLE, 2, pág. 99), con método completamente distinto del texto. Digamos de paso que la lectura de esta memoria de Hille es la que nos sugirió aplicar la teoría de las funciones HT_2 a problemas de síntesis de circuitos.

12. *Consecuencias de la representación paramétrica: el criterio de Paley-Wiener.*

Daremos comienzo al estudio de las propiedades de las transferencias de Wiener a partir de su representación canónica. Conviene en primer lugar referirse al significado de las esenciales condiciones (28) y (29). La primera afirma que el módulo de una transferencia no puede ser demasiado grande; la segunda, que no puede ser demasiado pequeño (23). En particular, el módulo no puede anularse en un intervalo arbitrariamente pequeño sin anularse idénticamente (24). Otra consecuencia inmediata del elegante criterio que se traduce en las fórmulas (28) y (29), y que es adecuado llamar «criterio de Paley-Wiener» (25), es que no existe transferencia cuyo módulo se anule exponencialmente en el infinito.

Escribiremos la transferencia de Wiener general en la forma

$$g(p)=A(p)\,u(p), \tag{32}$$

con

$$A(p)=e^{-ap}\,B(p)\exp\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{p\,d\,s(t)}{p^2+t^2}\right\}, \tag{33}$$

$$u(p)=\exp\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{p\lg M(t)\,dt}{p^2+t^2}\right\}. \tag{34}$$

(23) La aserción (29) constituye el teorema correlativo, para las funciones HT_2, del teorema de Szegö para las funciones H_2, según el cual el logaritmo de la función límite de una función de esa clase es integrable. Cfr. F. Riesz, 1, pág. 91.

(24) Esto explica las contradicciones a que da lugar la consideración de los llamados ''filtros ideales'', el módulo de cuya transferencia es idénticamente nulo fuera de la banda pasante. De acuerdo con nuestra definición, tales filtros no sólo no existen en la realidad, sino que no existen como entes de razón.

(25) Así lo llama también Wallman (cfr. Valley-Wallman, pág. 721). Cfr. el teorema XII de Paley-Wiener, I, pág. 16, que se deduce sin dificultad de la representación canónica de la funciones de la clase HT_2.

Conviene observar que, de estos dos factores, sólo $u(p)$ es una transferencia de Wiener. En efecto, $e^{-\alpha p}$ es la transferencia de un trozo de línea defasadora, de admitancia indicial $U(t-\alpha)$; cada uno de los factores del producto de Blaschke es también (cfr. fórmula (3)), la transferencia de un sistema estable. En cuanto al último factor de $A(p)$, vamos a suponer de aquí en adelante que la función $s(t)$ carece de parte singular, y se reduce por lo tanto a una función en escalera. Será, pues,

$$\sigma(p)=\exp\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{p\,d\,s(t)}{p^2+t^2}\right\}=\exp\left\{-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty\frac{p\,c_n}{p^2+t_n^2}\right\} \qquad (35)$$

con $c_n\geqq 0$, $\sum\limits_{n=1}^\infty c_n<\infty$, $\qquad 0\leqq t_n<\infty$.

No está demás comprobar que cada uno de los factoress

$$\exp\left\{-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty\frac{p\,c_n}{p^2+t_n^2}\right\}$$

es una transferencia de Laplace-Stieltjes. En efecto, si en la fórmula conocida ([26])

$$L^{-1}\left[\frac{1}{1+p^2}\exp\left\{\frac{-\alpha p}{1+p^2}\right\}\right]=\int_0^t J_0(2\sqrt{(t-\tau)\tau})\,.\,J_0(2\sqrt{\alpha\tau})\,d\tau$$

ponemos

$$\alpha=\frac{2}{\pi}\,\frac{c_n}{t_n},$$

y efectuamos un cambio lineal de variable, obtenemos la integral de Laplace, convergente para $p>0$

$$\exp\left\{-\frac{2}{\pi}\,\frac{p\,c_n}{p^2+t_n^2}\right\}=\frac{p^2+t_n^2}{t_n}\int_0^\infty e^{-pt}H(t)\,dt, \qquad (36)$$

([26]) Vr, por ejemplo, G. Doetsch, 2, pág. 107, fórmula 27.

con

$$H(t)=\int_0^{tt_n} J_0[2\sqrt{(tt_n-\tau)\tau}]\,J_0\left[2\sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{c_n\tau}{t_n}}\right]d\tau.$$

No entra en la fórmula el caso $t_n=0$ (que se presenta cuando la función $G(t)$ de la fórmula (14) se reduce al escalón de Heaviside con salto c). Pero también este caso se reduce a una integral de Laplace, obteniéndose sin dificultad ([27])

$$\left\{-\frac{2}{\pi}\frac{c}{p}\right\}=\int_0^{\infty} e^{-pt}\,d\left[U(t)+J_0\left(2\sqrt{\frac{2ct}{\pi}}\right)\right]. \qquad (37)$$

Las transferencias (36) y (37) corresponden a filtros límites de filtros regulares. Podrían llamarse filtros «supresores de raya», pues el módulo de la transferencia vale la unidad para todas las frecuencia menos una sola, para la cual el módulo es cero.

12. *Significado físico de $A(p)$. Filtros generales «pasa todo».*

Estudiemos con un poco de detalle la transferencia $A(p)$. Puede comprobarse que $A(p)$ es la forma más general de función regular, de módulo menor que uno en el semiplano de parte real positiva, real para p real y tal que $A(i\omega)=1$ en casi todo todo punto del eje imaginario. *$A(p)$ es pues la transferencia canónica del filtro «pasa todo»* más general ([28]). $\sigma(p)$ es, por su parte, la transferencia más general de un filtro pasa todo *sin ceros* en el semiplano de parte real positiva. Según hemos dicho en (12), las transferencias $\sigma(p)$ corresponden a filtros singulares y conviene disponer de un criterio de ausencia de transferencia singular en un sistema.

([27]) Cfr. CAMPBELL-FOSTER, I, pág. 79, Pair, 654.2.

([28]) Con esta locución traducimos, a falta de otro mejor, la expresión inglesa "all pass section". Conviene observar que, en sentido estricto, tal denominación correspondería sólo a la transferencia e^{-ap} que aparece como factor en $A(p)$, pues el módulo de ella es estrictamente igual a uno para todas las frecuencias reales ($p=i\omega$). En cambio, $B(p)$ y $\sigma(p)$ tienen módulo límite igual a la unidad sólo para *casi todas* las frecuencias.

Teorema 15. - *Una transferencia de Wiener que no se anula para ninguna frecuencia real (o más general, una función de la clase HK_λ, que no se anula en el eje imaginario), carece de parte singular $\sigma(p)$.*

Este teorema ha sido demostrado (para el caso del círculo), por Hössjer-Frostman y por Seidel (29).

14. *Los factores de $B(p)$; filtros «pasa todo» propiamente dichos.*

La transferencia $B(p)$ tiene la particularidad de ser la única de las componentes de la transferencia de Wiener $g(p)$ que se anula en el semiplano de la derecha. Cada cero de $g(p)$, contado con su respectiva multiplicidad, corresponde a uno de los factores

$$\frac{p-p_\nu}{p+\bar{p}_\nu}\,\frac{|1+p_\nu|}{1+p_\nu}\,\frac{|1-p_\nu|}{1-p_\nu}. \tag{38}$$

Estas transferencias estables son las que Bode llama «all pass sections»; en efecto; tienen módulo uno para todas las frecuencias reales, de modo que permiten modificar la fase de una transferencia sin modificar su módulo (30) y (31).

Como toda transferencia de Wiener es real para p real, se deduce que sus ceros p_ν o bien son reales, o bien aparecen a pares complejos conjugados (32).

Cada una de las transferencias (38) transforma conformemente el semiplano de la derecha en el círculo unidad. Por lo tanto, cuando p recorre el eje imaginario desde $-i\infty$ hasta $i\infty$, la transferencia (38) recorre la circunferencia unidad en sentido negativo. Si son n los ceros interiores, el argumento del producto de Blaschke dará n vueltas en sentido negativo, y puede demos-

(29) Frostman, I, pág. 107, y Seidel, págs. 205 y 213.

(30) Es sabido que $B(i\omega)=1$ para casi todo ω; cfr. Nevanlinna, I, pág. 196.

(31) Véase el parágrafo "Properties of all pass structures", del libro de Bode (Bode, I, pág. 239).

(32) Por eso dice Bode (loc. cit., pág. 240): "Any all-pass network is equivalent to a number of first and second degree all-pass networks in tandem". Este resultado, demostrado por Bode para transferencias racionales, queda pues extendido para toda transferencia de Wiener, sea o no finito el número de ceros.

trarse que en el caso general de infinitos ceros, el afijo de $B(z)$ toma efectivamente todos los valores de la circunferencia unitaria infinitas veces ([33]). Queda así generalizada para transferencias generales la aserción de Bode ([34]) sobre transferencias racionales: «we see that the phase characteristic of an all-pass structure must always have positive slope».

15. *Las transferencias de módulo máximo (o de defasado mínimo).*

Ocupémonos ahora de la transferencia $u(p)$ que figura en el segundo miembro de (32).

Es ésta una transferencia de Wiener *sin ceros* en el semiplano de la derecha (todos los ceros de $g(p)$ han sido «aislados» en el factor $B(p)$), y, como de acuerdo con lo dicho en pág. 293, $A(p)$ tiene módulo menor que la unidad en el interior del semiplano de la derecha, y módulo uno en casi todo punto del eje imaginario, resulta, para $Re(p) > 0$

$$|g(p)| < |u(p)| ; \qquad (39)$$

es decir, vale el

Teorema 16. - *Entre todas las transferencias de Wiener de módulo $M(\omega)$ en el eje imaginario, la dada por la fórmula (34) es la de módulo máximo en el semiplano de la derecha.*

Parece pues natural llamar a las transferencias de la forma (34), transferencias *de módulo máximo.* La propiedad más interesante de estas transferencias, desde el punto de vista de las aplicaciones, reside en que, según lo demuestra su forma canónica (34), *están unívocamente caracterizadas por su módulo.*

Supongamos que $A(p)$ se reduce a un producto de Blaschke con un número finito de factores (según sucede en el caso de transferencias racionales). Tomemos argumentos en ambos miembros de la igualdad (32). Como el argumento de $B(i\omega)$ es de-

([33]) Cfr. A. Calderón, A. González Domínguez y A. Zygmund, 1.

([34]) Bode, loc. cit., pág. 241. Téngase presente que Bode llama "phase shift" al argumento, *con signo negativo.* Nosotros traduciremos phase shift por *defasado,* y en cambio emplearemos las palabras fase o argumento indistintamente.

creciente, se ve que hay razones para llamar a las transferencias (34), transferencias *de argumento máximo,* o sea *de defasado mínimo.*

La fórmula (34) constituye, en efecto, la generalización natural de las transferencias racionales que Bode llama «de defasado mínimo», de las cuales hace en su libro importantes aplicaciones.

De cuanto acaba de decirse, se deduce que el contenido físico de la fórmula (32) puede expresarse como sigue:

Todas las transferencias de Wiener de módulo $M(\omega)$ se obtienen multiplicando la correspondiente transferencia de módulo máximo por la sección pasa todo más general.

La fórmula canónica (27), puede a su vez, interpretarse como sigue:

El circuito más general cuya transferencia tiene módulo $M(\omega)$ en casi toda frecuencia, se obtiene poniendo en cascada una línea defasadora, un número arbitrario (finito o infinito) de circuitos pasa todo, un filtro supresor de raya y un circuito de transferencia de módulo máximo, correspondiente a $M(\omega)$.

Puede decirse, en resumen, que la fórmula canónica, aplicada a las transferencias de Wiener, permite generalizar de manera natural, y sin hipótesis adicionales «ad hoc», la teoría de Bode de circuitos de defasado mínimo de transferencia racional, y sus teoremas sobre estructuras pasa todo.

16. *Relaciones entre la parte real y la parte imaginaria de transferencias de Wiener.*

Sea $u(\omega)$ una función de la clase de Lebesgue L^λ $(-\infty, \infty)$.

En tal caso existe, para casi todo ω, la «transformada de Hilbert» de $u(\omega)$ [35]:

$$v(\omega) = \frac{1}{\pi} P.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(t)\,dt}{t-\omega}; \qquad (40)$$

y si $v(\omega)$ es también una función de la clase L^λ (lo cual sucede siempre si $\lambda > 1$), su transformada de Hilbert es igual en casi

[35] Con el símbolo P. $\int$ designamos el "valor principal" de la integral, en el sentido de Cauchy.

todo punto a $-u(\omega)$:

$$u(\omega)=-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{v(t)\,dt}{t-\omega}. \tag{41}$$

Este teorema ha sido demostrado por Hille-Tamarkin, y generaliza un clásico resultado de M. Riesz [36].

Sea $g(\omega)=u(\omega)+i\,v(\omega)$, la función límite de una función de la clase HT_2. Se demuestra que $u(\omega)$ y $v(\omega)$ están ligadas por las relaciones (40) y (41). Más precisamente, subsiste el teorema siguiente [37]:

Condición necesaria y suficiente para que una función compleja $u(\omega)+i\,v(\omega)$ *de* $L_2(-\infty+\infty)$ *sea la función límite, para* $x\to 0$ *de una función de la clase* HT_2, *es que* $u(\omega)$ *y* $v(\omega)$ *sean transformadas de Hilbert de la clase* L_2 $(-\infty,\ \infty)$.

Las transferencias de Wiener son funciones de la clase HT_2, reales para p real; por lo tanto, la parte real de la función límite será una función par, y la parte imaginaria una función impar. De esta simple observación se deduce, sin necesidad de cálculos, el siguiente teorema, importante para las aplicaciones.

Teorema 17. - *La parte real* $u(\omega)$ *y la parte imaginaria* $v(\omega)$ *de la función límite* $g(\omega)$ *de una transferencia de Wiener, están ligadas por las fórmulas, válidas en casi todo punto*:

$$v(\omega)=\frac{2}{\pi}P.\int_{0}^{\infty}\frac{\omega\,u(t)\,dt}{t^2-\omega^2},$$

$$u(\omega)=\frac{2}{\pi}P.\int_{0}^{\infty}\frac{t\,v(t)\,dt}{t^2-\omega^2}. \tag{42}$$

Estas fórmulas aparecen por primera vez en la literatura téc-

(36) Cfr. Hille-Tamarkin, 1, pág. 344; M. Riesz, 1 pág. 218.

(37) Titchmarsh, 1, pág. 128.

nica en la memoria de Bayard (38). Después han sido redescubiertas varias veces (39); es curioso que ninguno haya notado que las fórmulas (42) no son sino las clásicas fórmulas de Hilbert, para el caso u par y v impar, a pesar de que ya Lee en 1932 (40), consigna la observación fundamental, (debida a N. Wiener) de que «the conductance and the susceptance of the admittance of a network, are Hilbert transforms or conjugate integrals of each other» (41).

Por lo demás, las fórmulas (42) tienen ya más de cien años; Hardy, que las consigna sin demostración en 1909 (42), se las atribuye a Schlömilch (43).

17. *Relaciones módulo-fase para transferencias de Wiener de módulo máximo.*

Las fórmulas (42) resuelven completamente, para transferencias de Wiener, el problema de la determinación de la parte imaginaria en función de la parte real, y viceversa (44). Pero estas fórmulas, importantes cuando $g(\omega)$ es una impedancia, no lo son tanto cuando $g(\omega)$ es una transferencia. En este caso, lo que tiene real importancia es la determinación del módulo en función del argumento, y viceversa.

Ya sabemos que el problema tiene solución unívoca sólo para las transferencias que hemos llamado de módulo máximo.

Tomando logaritmos, el problema queda reducido formalmente al caso anterior. Pero sólo formalmente, pues el logaritmo de una transferencia de módulo máximo no es una transferencia de Wiener, y por lo tanto las fórmulas (17) no son aplicables.

---

(38) BAYARD, 1, págs. 661 y 663. Bayard no considera transferencias, sino impedancias; $u(\omega)$ es la "resistencia" del dipolo; $v(\omega)$ la "reactancia".

(39) T. MURAKI y M. S. CORRINGTON, I, dan una bibliografía bastante completa al respecto.

(40) Y. W. LEE, 1, pág. 87.

(41) Esta observación de Wiener es una razón más para considerarlo el creador de la moderna teoría matemática de los circuitos lineales.

(42) HARDY, I, pág. 204.

(43) O. SCHLÖMILCH, 1, vol. 2, pág. 156.

(44) Se logra que las fórmulas (42) valgan en *todo* punto, imponiendo restricciones adecuadas; por ejemplo, admitiendo que $u(\omega)$ satisface uniformemente a una condición de Lipschitz; cfr. TITCHMARSCH, I, pág. 145. Theorem 106.

A fin de obtener fórmulas de inversión que restrinjan menos el comportamiento de las funciones en el infinito, lo más cómodo es partir de las clásicas fórmulas de Hilbert para el círculo:

$$v(\varphi) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\vartheta) \operatorname{cotg}\left(\frac{\vartheta-\varphi}{2}\right) d\vartheta + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(\vartheta)\, d\vartheta,$$

$$u(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(\vartheta) \operatorname{cotg}\left(\frac{\vartheta-\varphi}{2}\right) d\vartheta + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\vartheta)\, d\vartheta. \tag{43}$$

Las funciones $u(\varphi)$ y $v(\varphi)$ son las partes real e imaginaria de la función límite de una función regular en $|z|<1$; y las fórmulas son válidas en casi todo punto si $u(\vartheta) \in L^2$ (45).

Estas fórmulas se transforman, según se comprueba sin dificultad, en el caso de que $u(\varphi)$ sea par (y $v(\varphi)$ impar), en las siguientes:

$$v(\varphi) = -\int_0^{\pi} \frac{u(\vartheta) \operatorname{sen} \varphi\, d\vartheta}{\cos \vartheta - \cos \varphi},$$

$$u(\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{v(\vartheta) \operatorname{sen} \vartheta\, d\vartheta}{\cos \vartheta - \cos \varphi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} u(\vartheta)\, d\vartheta. \tag{44}$$

Pasemos del círculo al semiplano de la derecha por la transformación lineal ($a > 0$)

$$z = \frac{a-p}{a+p} \qquad p = a\,\frac{1-z}{1+z}$$

$$\vartheta = -2 \operatorname{arctg} \frac{\omega}{a}, \quad \omega = -a \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}, \quad d\vartheta = -\frac{2a}{a^2+\omega^2}\, d\omega.$$

(45) PLESSNER, I, pág. 9.

Obtenemos así, partiendo del par (44), el siguiente:

$$v(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega\, u(t)\, dt}{t^2-\omega^2},$$

$$u(\omega)=-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{t\, v(t)\,[a^2+\omega^2]\, dt}{(t^2-\omega^2)(a^2+t^2)}+\frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \frac{u(t)\, dt}{a^2+t^2}.$$

Estas fórmulas valen en casi todo punto si tanto $\dfrac{u(t)}{1+t^2}$ como $\dfrac{u(t)^2}{1+t^2}$ son integrables; y valen en todo punto si $u(t)$ satisface uniformemente a una condición de Lipschitz de orden α positivo.

Sea $M(\omega)$ el módulo de una transferencia de módulo máximo en el eje imaginario. Si ponemos, en las fórmulas (45)

$$u(\omega)=\lg M(\omega),$$

y admitimos que $\lg M(\omega)$ satisface a las hipótesis recién consignadas, ellas permiten calcular el módulo en función del argumento, y viceversa. Resulta así que el argumento está determinado unívocamente por el módulo, y que en cambio el primero determina al segundo a menos de una constante.

18. *Casos particulares de las relaciones módulo-fase: las fórmulas de Bode.*

Vamos a comparar las fórmulas (45) con las fórmulas que dan Bode y otros autores para el cálculo del módulo en función de la fase y viceversa. A tal efecto, escribamos la segunda integral (45) del siguiente modo:

$$u(\omega)=-\frac{2}{\pi}P.\int_0^\infty v(t)\left[\frac{t}{t^2-\omega^2}-\frac{t}{a^2+t^2}\right]dt+\frac{2a}{\pi}\int_0^\infty \frac{u(t)\, dt}{a^2+t^2} \quad (46)$$

Si admitimos que la primera integral puede descomponerse en dos sumandos convergentes, obtenemos

$$u(\omega)=\frac{2}{\pi}P.\int_0^\infty\frac{t\,v(t)\,dt}{t^2-\omega^2}+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{t\,v(t)\,dt}{a^2+t^2}+\frac{2a}{\pi}\int_0^\infty\frac{u(t)\,dt}{a^2+t^2}, \tag{47}$$

para lo cual es suficiente que se verifique, por ejemplo

$$\int^\infty\frac{|v(t)|dt}{t}<\infty. \tag{48}$$

Si tomamos límites ahora en (47), para $a\to\infty$, la segunda integral tiende a cero, y resulta, si la última integral tiene límite finito [46]:

$$u(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{t\,v(t)\,dt}{t^2-\omega^2}+u(\infty). \tag{49}$$

En efecto, la función harmónica en el semiplano de la derecha que toma en el eje imaginario los valores $u(\omega)$, se expresa por su integral de Poisson

$$u(x,\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,u(t)\,dt}{(t-\omega)^2+x^2}.$$

Si hacemos en esta fórmula $x=a$, $\omega=0$, obtenemos, si existe el límite y $u(\omega)$ es par,

$$u(a,0)=\frac{2a}{\pi}\int_0^\infty\frac{u(t)\,dt}{t^2+a^2}\underset{a\to\infty}{\longrightarrow}u(\infty,0).$$

La fórmula (49) es equivalente a las fórmulas 14-21, pg. 320 del libro de Bode. Ellas exigen, entre otras cosas (según el

[46] Si $u(\infty)=0$, y la integral converge, se obtiene la segunda fórmula (42).

mismo Bode lo dice, loc. cit. pg. 321), que $u(\infty)$, o sea el logaritmo del módulo de la transferencia para $\omega=\infty$, sea finito. Esta condición no se cumple en general; más bien lo contrario es la regla; en efecto, en todo sistema físico la transferencia cae a cero tarde o temprano. *Las fórmulas* (45) *tienen sobre la* (49) *la ventaja de no exigir la acotación de* $u(\omega)$ *en el infinito, y sus condicioness de validez se cumplen en todos los casos de la práctica.*

Si tomamos límites, para $\omega \to 0$ en la igualdad (49), y admitimos que existe la integral

$$\int_0^\infty \frac{v(t)\,dt}{t}$$

(para lo cual bastará que, además de cumplirse la condición (48), $v(t)$ sea derivable en el origen), resulta

$$u(\infty)-u(0)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{v(t)}{t}\,dt;$$

o sea, con el cambio de variable $t=e^u$

$$u(\infty)-u(0)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty v[e^u]\,du. \qquad (50)$$

Esta fórmula figura en la página 286 del libro de Bode; aunque muy útil por su simplicidad (según lo prueban las aplicaciones que de ella hace el mismo Bode) nuestra demostración prueba cuán restringidas son sus condiciones de validez.

19. *Relaciones módulo-fase en un intervalo finito de frecuencias.*

Hemos visto en el parágrafo anterior que si se conoce el módulo de una transferencia de módulo máximo para todas las frecuencias reales, la fase está determinada unívocamente. ¿Qué puede decirse de ella si el módulo se conoce sólo en un intervalo finito de frecuencias? A esto responde en cierta manera el siguiente

Teorema 18. - *Si el módulo $M(\omega) \leqq 1$, de una transferencia de módulo máximo se conoce en el intervalo $[a, b]$, su fase está determinada, en ese intervalo, a menos de una función decreciente de la frecuencia.*

Demostración. Escribamos

$$\lg M(\omega) = R(\omega) + S(\omega), \tag{51}$$

donde hemos puesto

$$R(\omega) = \begin{cases} \lg M(\omega) & \text{en } a \leqq \omega \leqq b, \\ 0 & \text{en el conjunto complementario;} \end{cases}$$

$$S(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{en } a \leqq \omega \leqq b, \\ \lg M(\omega) & \text{en el conjunto complementario.} \end{cases}$$

La expresión de la fase será, pues, de acuerdo con la primera fórmula (45)

$$v(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_a^b \frac{\omega \lg M(t)\, dt}{t^2 - \omega^2} + A(\omega), \tag{52}$$

con

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{\omega\, S(t)\, dt}{t^2 - \omega^2} + \frac{2}{\pi} \int_b^\infty \frac{\omega\, S(t)\, dt}{t^2 - \omega^2}. \tag{53}$$

Para las frecuencias comprendidas entre a y b la función es derivable, y la derivación puede efectuarse bajo el signo, con lo que se obtiene

$$A'(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^a \frac{(t^2 + \omega^2)\, S(t)\, dt}{(t^2 - \omega^2)^2} + \frac{2}{\pi} \int_b^\infty \frac{(t^2 + \omega^2)\, S(t)\, dt}{(t^2 - \omega^2)^2} < 0, \tag{54}$$

ya que es $S(t) \leqq 0$ por hipótesis, y el teorema está demostrado.

En el caso particular de que el circuito sea un filtro de banda pasante (a, b), es decir, que sea $M(\omega)=1$ para $a \leqq \omega \leqq b$, y $M(\omega) \leqq 1$ en el conjunto complementario, resulta inmediatamente de las fórmulas (52) y (53) el siguiente corolario, que es la legalización matemática de un hecho bien conocido de los técnicos:

Teorema 19.-*En la banda pasante de un filtro de transferencia (de módulo de máximo) de módulo menor o igual que 1, la fase es decreciente.*

Es interesante observar que el Teorema 19 es la localización del teorema ya mencionado, según el cual la transferencia de un circuito cuya transferencia vale la unidad para todas las frecuencias, es función decreciente para *todas* las frecuencias. Es posible incluso ir más lejos en esa localización, pasando de un intervalo de frecuencias a *un punto*. He aquí el teorema, cuya demostración omitimos por brevedad.

Teorema 20.-*Si el módulo de una transferencia (de módulo máximo) vale la unidad para la frecuencia $\omega = a$, y es convergente la integral*

$$\int_0^\infty \frac{\lg M(t)\, dt}{(t^2-\omega^2)^2},$$

la fase es decreciente para la frecuencia a.

Señalemos que los teoremas 18, 19 y 20 tienen correlativos para impedancias; y que (según nos hemos enterado recientemente por boca de su propio autor), dos de estos correlativos (los correspondientes a los teoremas 18 y 19), ya habían sido demostrados por el Dr.. Kurt Fränz [47].

[47] KURT FRÄNZ, 1.

TERCERA PARTE

SINTESIS DE TRANSFERENCIAS DE WIENER

a) *Un método de síntesis a base de la expresión de la transferencia como producto de otras.*

Como aplicación de los teoremas generales demostrados en la segunda parte, expondremos un método de síntesis de circuitos de características prefijadas [48]. Este método es correlativo de un método de síntesis de *impedancias*, que hemos expuesto en otro lugar [49].

20. *Algunos teoremas sobre representación de funciones positivas.*

Los correlativos y análogos para el semiplano del siguiente teorema de Féjer - F. Riesz, desempeñan papel importante en nuestro método de síntesis.

Sea $g(\vartheta)$ un polinomio trigonométrico de coeficientes reales, no negativo para todo valor real de ϑ. Existe entonces un polinomio $\rho(z)$, del mismo grado que $g(\vartheta)$, tal que, para $z=e^{i\vartheta}$ se verifica

$$g(\vartheta)=|\rho(z)|^2. \tag{55}$$

Recíprocamente la expresión $|\rho(z)|^2$ representa siempre, para $z=e^{i\vartheta}$, un polinomio trigonométrico no negativo en ϑ, del mismo grado que $\rho(z)$ [50].

Si esta proposición se transplanta del círculo unidad al semiplano de la derecha por medio de la transformación (20), se obtiene el

Teorema 21. - *Si la función $M(\omega)$, no negativa en $-\infty<\omega<\infty$ admite la representación*

---

[48] Hemos explicado este método en una ponencia leída en la reunión de la Asociación Física Argentina, realizada en Córdoba el 20 de setiembre de 1948.

[49] A. González Domínguez, 1.

[50] L. Féjer, 1.

$$M(\omega)=\sum_{-n}^{n} a_\nu \left(\frac{1-i\omega}{1+i\omega}\right)^\nu \quad , \quad a_\nu \text{ real}, \ -n\leqq\nu\leqq n \qquad (56)$$

existe una función racional $g(p)$, regular en el semiplano de la derecha:

$$g(p)=\sum_{0}^{n} c_\nu \left(\frac{1-p}{1+p}\right)^\nu \qquad (57)$$

tal que, para $p=i\omega$ se verifica

$$M(\omega)=|g(p)|^2. \qquad (58)$$

Importa observar que la representación de $M(\omega)$ en la forma (58) no es única. En efecto, si α es un cero de $g(p)$ de parte real positiva, la función

$$g_1(p)=g(p)\,\frac{p+\bar{\alpha}}{p-\alpha}$$

es tal que se verifica

$$M(\omega)=|g_1(\omega)|^2.$$

Es posible pues, multiplicando $g(p)$ por el número necesario de factores de la forma

$$\frac{p+\bar{\alpha}_\nu}{p-\alpha_\nu}$$

eliminar todos los ceros de g(p) de parte real positiva, llegándose así al

Teorema 22. - *Si $M(\omega)$ cumple las hipótesis del Teorema 21, existe una función racional $g(p)$, regular y sin ceros en el semiplano de la derecha, tal que $g(1)>0$, que cumple la relación (58). Esta función racional es única. En caso de que $M(\omega)$ sea una función par, la correspondiente función $g(p)$ tiene coeficientes reales.*

Corolario inmediato del teorema anterior es el siguiente:

Teorema 23. - *Si la función $M(\omega)$, no negativa en $-\infty < \omega < \infty$, admite la representación*

$$M(u) = \frac{1}{1+\omega^2} \sum_{-n}^{n} a_\nu \left(\frac{1-i\omega}{1+i\omega}\right)^\nu, \quad a_\nu \text{ real}, \ -n \leqq \nu \leqq n, \tag{59}$$

existe una función racional $g(p)$, holomorfa en el semiplano de parte real positiva

$$g(p) = \sum_{0}^{n} c_\nu \frac{(1-p)^\nu}{(1+p)^{\nu+1}}, \tag{60}$$

tal que, para $p = i\omega$ se verifica

$$M(\omega) = |g(p)|^2. \tag{61}$$

Teorema 24. - *Sea $P(\omega)$ un polinomio de coeficientes reales, par, no negativo para todo ω; existe entonces un polinomio $Q(p)$, de coeficientes reales, tal que, para $p = i\omega$, se verifica*

$$P(\omega) = |Q(p)|^2. \tag{62}$$

Este teorema ha sido demostrado por Verblunsky ([51]), a partir de uno anterior de Polya-Szegö ([52]).

Procediendo como en el caso del teorema 22, puede lograrse que el polinomio $Q(p)$ no se anule en el semiplano de la derecha.

Consideremos, por ejemplo, el polinomio positivo

$$P(\omega) = 1 + \left(\frac{\omega}{a}\right)^{2n}, \quad a > 0. \tag{63}$$

En este caso se comprueba directamente sin dificultad que el polinomio $Q(p)$ tiene la expresión

$$Q(p) = \frac{1}{a^n} (p - ak_1)(p - ak_2) \dots (p - ak_n); \tag{64}$$

([51]) S. Verblunsky, 1, pág. 721.

([52]) G. Polya y G. Szegö, vol. II, pág. 82. Cfr. también G. Szegö, 1, págs. 3, 5.

en esta fórmula, con $k_1, k_2, \ldots, k_n$, se han designado las raíces de orden $2n$ de $(-1)^{n+1}$, de parte real negativa ([53]). Este caso simple del teorema 24 nos será útil más adelante.

Del teorema 24 se deduce el

Teorema 25. - *Sea*

$$R(\omega)=\frac{P(\omega)}{S(\omega)}, \tag{65}$$

donde $P(\omega)$ y $S(\omega)$ son polinomios pares, de coeficientes reales, no negativos para todo ω; existe entonces una función racional $g(p)$, regular y sin ceros en el semiplano de la derecha, tal que se verifica, para $p=i\omega$

$$R(\omega)=|g(p)|^2. \tag{66}$$

Este teorema tiene importantes aplicaciones a ciertos problemas de síntesis, que expondremos en otra ocasión. Baste decir aquí que permite simplificar notablemente la exposición de los métodos de síntesis de cuadripolos reactivos, debidos a Darlington ([54]) y a Cauer ([55]).

21. *Síntesis de un circuito de cuya transferencia se prefija el módulo* ([55] a).

Los métodos generales de síntesis creados por Wiener y Lee ([56]) se basan en el desarrollo de la transferencia en serie de funciones racionales; la cual se realiza, pues, como suma de transferencias elementales ([57]).

([53]) Cfr. V. D. Landon, 1, pág. 350; Valley-Wallman, 1, pp. 176 y siguientes.

([54]) Darlington, 1; Ragan, 1.

([55]) W. Cauer, 1.

([55]a) Hemos expuesto este método en una ponencia presentada en la 12ª Reunión de la Asociación Física Argentina, el 20 de septiembre de 1948. (Rev. de la Unión Matemática Argentina, vol. XIII, (1948), pág. 169).

([56]) Y. W. Lee, 1; N. Wiener y Y. W. Lee, 1, 2 y 3.

([57]) Todo desarrollo de una integral de Laplace en serie de funciones racionales es, potencialmente, un método de síntesis. Los resultados de Hille (1) y Caton-Hille (1), son, por lo tanto, de gran interés para la teoría de la síntesis. Sobre esto volveremos en otro lugar.

En el método que exponemos a continuación, en cambio, se sintetiza la transferencia como producto de otras; es decir, que el circuito que la realiza consta de circuitos parciales en cascada (desacoplados por tubos). La idea ha sido ya utilizada en casos particulares, para el diseño de cierto tipo de amplificadores ([58]); nuestro método tiene, en cambio, teóricamente, validez general.

Sea, pues, $M(\omega)$ una función par, no negativa, y continua en $[-\infty, \infty]$. Nuestro problema es *determinar una transferencia de Wiener estable, de módulo máximo, formada por un producto de transferencias simples del mismo tipo, tal que su módulo difiera arbitrariamente poco de $M(\omega)$ en un intervalo arbitrario, prefijado.*

Para resolverlo, comencemos por formar la función

$$\varphi(\vartheta) = \left[M\left(-\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right)\right]^2, \tag{67}$$

que es continua y par en $(-\pi, \pi)$. Llamemos a_ν a sus coeficientes de Fourier:

$$a_\nu = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \varphi(\vartheta)\cos\nu\vartheta\, d\vartheta. \tag{68}$$

En virtud de la continuidad, $\varphi(\vartheta)$ podrá aproximarse uniformemente por sus sumas de Féjer, que serán además, no negativas:

$$|\varphi(\vartheta) - \sigma_m(\vartheta)| < \varepsilon \tag{69}$$

$$g(\vartheta) = \sigma_m(\vartheta) = a_0 + 2\sum_{\nu=1}^{m} \frac{m+1-\nu}{m+1} a_\nu \cos\nu\vartheta \geqq 0. \tag{70}$$

Supondremos que $\sigma_m(\vartheta)$ es efectivamente un polinomio trigonométrico de grado m, es decir ,que a_m no se anula.

([58]) Cfr. VALLEY-WALLMAN, 1, pp. 176-200 y 274-300.

Con la notación

$$a_0 = \alpha_0$$

$$2\,\frac{m+1-\nu}{m+1}\,a_\nu = \alpha_\nu$$

formemos el polinomio

$$\rho(z) = \alpha_m + \ldots + \alpha_1 z^{m-1} + 2\alpha_0 z^m + \alpha_1 z^{m+1} + \ldots + \alpha_m z^{2m}. \qquad (71)$$

Sean z_1, z_2, ..., z_m las raíces del polinomio (71) situadas en el interior o sobre la circunferencia del círculo unidad.. Puede mostrarse ([59]) que el polinomio

$$\rho(z) = \sqrt{\frac{|\alpha_m|}{2}|z_1|.|z_2|\ldots|z_m|}\prod_{\nu=1}^{m}\left[z - \frac{1}{\overline{z}_\nu}\right], \qquad (72)$$

es precisamente aquél cuya existencia demuestra el teorema de Fejér, es decir, que verifica la relación

$$\sigma_m(\vartheta) = |\rho(z)|^2, \quad z = e^{i\vartheta}. \qquad (73)$$

Además, $\rho(z)$ no se anula en el interior del círculo unidad.

De la fórmula (72) obtenemos, por la acostumbrada transformación lineal, la función racional, regular y distinta de cero en el semiplano de la derecha

$$g(p) = \sqrt{\frac{|\alpha_m|}{2}|z_1|\,|z_2|\ldots|z_m|}\prod_{\nu=1}^{m}\left(\frac{1-p}{1+p} - \frac{1}{\overline{z}_\nu}\right). \qquad (74)$$

De (67), (69), (73) y (74) se infiere que el módulo de $g(p)$ en el eje imaginario, difiere arbitraria y uniformemente poco de la función dada $M(\omega)$.

22. *Obtención de una transferencia de Wiener estable, a partir de una de Laplace-Stieltjes.*

La función $g(p)$ que acabamos de fabricar, es una transfe-

([59]) Cfr. G. Szegö, 1, pp. 3-4 y L. Fejér, 1.

rencia de Laplace-Stieltjes estable, como producto de un número finito de ellas; pero no es una transferencia de Wiener. Es fácil sin embargo construir, a partir de $g(p)$, una transferencia racional de Wiener estable de módulo máximo, cuyo módulo en el eje imaginario aproxime tanto como se quiera a $M(\omega)$ en un intervalo finito arbitrario de frecuencias.

Bastará para ello, multiplicar a $g(p)$ por una transferencia de Wiener esstable de módulo máximo, cuyo módulo difiera de la unidad arbitrariamente poco en $[-a, a]$.

Por ejemplo, podemos elegir la transferencia

$$h(p)=\frac{1}{Q(p)} \tag{75}$$

donde $Q(p)$ viene dada por la fórmula (64). En efecto, se comprueba en seguida que el módulo de $h(p)$ para frecuencias reales

$$|h(i\omega)|=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega}{a})^{2n}}} \tag{76}$$

difiere, para n suficientemente grande, uniformemente poco de la unidad en $-a+\varepsilon\leqq\omega\leqq a-\varepsilon$ (a y ε arbitrarios, positivos, fijos) [60].

Obtenemos, en definitiva, la transferencia

$$h(p)=\frac{c}{a^n}\prod_{\nu=1}^{l}\left[\frac{1-p}{1+p}-\frac{1}{z_\nu}\right]\left(\frac{1}{p-ak_\nu}\right)=\prod_{\nu=1}^{l}h_\nu(p) \tag{77}$$

donde l es el mayor de los números n, m, y

$$c=\sqrt{\frac{|\alpha_m|}{2}|z_1||z_2|\ldots|z_m|}.$$

La significación de k_ν es la consignada inmediatamente después de la fórmula (64), y, si es $n>m$, el primer factor

---

([60]) Curvas de módulo del tipo (76) han sido estudiadas por LANDON, 1; cfr. VALLEY-WALLMAN, 1, pág. 176 y siguientes.

de cada término del producto (77) debe considerarse igual a 1 para $\nu = m+1,\ m+2,\ \ldots,\ n$. En cambio, si es $m > n$, serán iguales a la unidad, por definición, todos los factores $\dfrac{1}{p - ak_\nu}$, para $\nu = n+1,\ n+2,\ \ldots,\ m$.

La transferencia (77) resuelve completamente el problema enunciado; cabiendo observar la sencillez de cada una de las transferencias h_ν que la componen.

b) *Algunos resultados sobre síntesis de transferencias de módulo y fase simultáneamente prefijados.*

23. *Aproximación de una función arbitraria por una transferencia estable, a menos de una fase lineal.*

En páginas anteriores hemos visto cómo se construye, con aproximación arbitrariamente grande, una transferencia de módulo prefijado. No plantea problema esencialmente distinto el prefijar la fase, según demuestran las fórmulas (45); y lo mismo se diga si se prefija el módulo en ciertos intervalos, y la fase en los intervalos complementarios. Es éste en efecto, un problema «mixto», de aparición reciente en la teoría de las comunicaciones ([61]), aunque antiguo y muy estudiado en la Hidrodinámica ([62]); demostrándose, en hipótesis muy generales, que el problema tiene solución única.

No es posible, en cambio, según se deduce nuevamente de las fórmulas (45), prefijar *simultáneamente* el módulo y la fase; y los explicables deseos del diseñador chocan aquí contra una insalvable dificultad de principio ([63]).

Puede en cambio construirse, con aproximación arbitrariamente grande, una transferencia que, a menos de un factor de

([61]) Cfr. Bode, 1, pp. 328-336.

([62]) Cfr. Demtchenko, 1, pp. 1-15 y Signorini, 1.

([63]) He aquí lo que dice Lee (1, pág. 84), acerca de la trascendencia práctica del problema: "It is sometimes desirable to synthesize a network with two or more specified properties. For instance, a network possessing a designable admittance both in modulus and in phase would find many applications which are increasing in importance as the problem of the improvement of quality in electrical transmission draws the attention of the electrical engineer more and more."

módulo *uno* y fase lineal, tenga módulo y fase prefijados ([64]); así lo afirma el siguiente

Teorema 26. ([65]) — *Dada una función* $f(i\omega)$ $[-\infty < \omega < \infty]$, *continua en todo intervalo finito, que tienda a cero para* $|\omega| \to \infty$ *y tal que* $f(-i\omega) = \overline{f(i\omega)}$, *existe un circuito estable cuya transferencia difiere, a menos de una fase lineal, arbitraria y uniformemente poco de* $f(i\omega)$ *en todo el eje imaginario.*

En efecto, existe una función integrable $G(t)$ tal que la igualdad

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} G(t)\, dt + \eta_1(\omega), \qquad |\eta_1(\omega)| < \varepsilon$$

se verifica para $-\infty < \omega < \infty$, con ε arbitrario prefijado ([66]). Eligiendo $k > 0$, de manera que sea, para todo ω,

$$\left| \int_{-\infty}^{-k} e^{-iut} G(t)\, dt \right| < \varepsilon,$$

resulta pues

$$f(u) = \int_{-k}^{\infty} e^{-iut} G(t)\, dt + \eta_2(u), \qquad |\eta_2(u)| < 2\varepsilon;$$

o sea, con el cambio de variable $u = t + k$,

$$e^{-i\omega k} f(\omega) = \int_{0}^{\infty} e^{-iut} G(t-k)\, dt + \eta(u), \qquad |\eta(u)| < 2\varepsilon,$$

con lo que el teorema queda demostrado.

([64]) En los circuitos de transmisión de señales, una fase lineal se traduce meramente en un *retardo*, tolerable dentro de ciertos límites. Para estos circuitos, el problema de síntesis mencionado hace un momento admite pues, solución completamente satisfactoria.

([65]) Este resultado pertenece a mi amigo el ingeniero Alberto Calderón. Véase VILLE, 1, pág. 72, donde figura un teorema muy similar al XXVI, aunque menos preciso.

([66]) Véase H. KOBER, 1, pág. 144.

24. *Aproximación de funciones arbitrarias por transferencias de Wiener estables a menos de una fase constante.*

Veremos a continuación que, a partir de una frecuencia suficientemente elevada en adelante, la aproximación puede efectuarse a menos de una fase no sólo lineal, sino prácticamente *constante.*

Sea en efecto $g(i\omega)$ la función que se desea aproximar,

$$[g(-i\omega)=\overline{g(i\omega)}],$$

y supongamos que para $\omega \rightarrow \infty$

$$\varphi(\omega)=g(i\omega)\,[1+i\omega] \rightarrow 0.$$

Del teorema de Weierstrass se deduce, utilizando la transformación (20) que existe una función racional

$$R(\omega)=\sum_{-n}^{n} c_\nu \left(\frac{1-i\omega}{1+i\omega}\right)^\nu,$$

tal que vale la igualdad

$$\varphi(\omega)=\sum_{-n}^{n} c_\nu \left(\frac{1-i\omega}{1+i\omega}\right)^\nu + \eta(\omega), \quad |\eta(\omega)|<\varepsilon, \quad -\infty<\omega<\infty.$$

Por lo tanto

$$g(i\omega)\left(\frac{1-i\omega}{1+i\omega}\right)^n = \sum_{0}^{2n} c_{\nu-n} \, \frac{(1-i\omega)^\nu}{(1+i\omega)^{\nu+1}} + \eta_1(u), \quad |\eta_1(u)| \leq \varepsilon.$$

Es decir, que la aproximación de $g(i\omega)$ por la transferencia estable del segundo miembro se efectúa a menos de la fase $-2n \operatorname{arctg} \omega$, la cual tiende a la fase constante $-n\pi$, con lo que el teorema queda demostrado.

25. *Aproximación de funciones de $L_2(-\infty, \infty)$, por transferencias de Wiener, a menos de una fase lineal.*

Para comodidad del lector consignaremos el siguiente teorema de Titchmarsh [67], que enseguida utilizaremos.

---

[67] E. C. TITCHMARSH, 1, pág. 129.

Condición necesaria y suficiente para que una función $g(\omega) \varepsilon L_2(-\infty, \infty)$ sea la función límite, para $x \to 0$, de una función $g(p)$, regular para $x > 0$ y tal que

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x+i\omega)|^2 \, d\omega = 0 \, [e^{2kx}], \tag{78}$$

es que la transformada de Fourier de $g(\omega)$ se anule para $t < -k$.

Admitamos, en efecto, que $g(p)$ satisfaga a las condiciones del enunciado. Poniendo

$$g(p) = \psi(p) \, e^{kp}$$

se verifica

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x+i\omega)|^2 \, d\omega = e^{-2kx} \int_{-\infty}^{\infty} |g(x+i\omega)|^2 \, d\omega = 0 \, [1].$$

Será, por lo tanto, en virtud del teorema de Paley-Wiener

$$g(p) = e^{kp} \int_{0}^{\infty} e^{-pt} \, G(t) \, dt, \quad G(t) \, \varepsilon \, L_2. \tag{79}$$

Se tiene, por otra parte, llamando $F(t)$ a la transformada de Fourier de $g(\omega)$

$$F(t) = \underset{a \to \infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} e^{i\omega t} \, g(\omega) \, d\omega =$$

$$= \underset{a \to \infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} \psi(\omega) \, e^{i\omega(k+t)} \, d\omega = G(k+t);$$

resulta, pues, $G(t) \equiv 0$ para $t < -k$, con lo que el teorema queda demostrado, pues el razonamiento es reversible.

Basándonos en esta proposición, demostraremos finalmente el siguiente correlativo del Teorema 26 para transferencias generales de Wiener.

T e o r e m a 27. - *Toda función $g(i\omega)$ (en general compleja) de cuadrado sumable en $(-\infty, \infty)$, puede descomponerse en dos sumandos*

$$g(\omega) = g_1(i\omega) + g_2(i\omega) \tag{80}$$

tales que

1) *$g_1(i\omega)$ y $g_2(i\omega)$ son ambas de cuadrado sumable;*

2) *$g_1(i\omega)$ es límite, para $x \to 0$, de una función $g_1(p)$, regular en el semiplano $x > 0$, de la forma*

$$g_1(p) = e^{kp}\int_0^\infty e^{-pt}\,G(t)\,dt; \tag{81}$$

3) *$g_2(i\omega)$ es límite, para $x \to 0$, de una función $g_2(p)$ regular en el semiplano de la izquierda y*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_2(\omega)|^2\,d\omega < \varepsilon.$$

Si $g(i\omega)$ es tal que $g(i\omega) = \overline{g(i\omega)}$, $G(t)$ será real.

Demostración. Sea $G(t)$ la transformada de Fourier de $g(i\omega)$; dado ε positivo arbitrario, fijemos k por la condición

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-a}^{-k} e^{-i\omega t}\,G(t)\,dt\right| d\,\omega < \varepsilon \tag{82}$$

para $a > k$, formemos las funciones

$$g_1(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-k}^{\infty} e^{-pt}\,G(t)\,dt; \tag{83}$$

$$g_2(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-k} e^{-pt}\,G(t)\,dt; \tag{84}$$

la primera de ellas es regular en el semiplano de la derecha, y la segunda lo es en el de la izquierda. Sus respectivos límites

$$g_1(\omega) = \lim_{x \to 0} g_1(p) = \underset{a \to \infty}{\text{l. i. m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-k}^{a} e^{-i\omega t} G(t)\, dt \quad (x > 0) \quad (85)$$

$$g_2(\omega) = \lim_{x \to 0} g_2(p) = \underset{a \to \infty}{\text{l. i. m.}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{-k} e^{-i\omega t} G(t)\, dt \quad (x > 0) \quad (86)$$

cumplen la igualdad (80); además $g_1(p)$ tiene, en virtud del teorema de Titchmarsh recién demostrado, la forma (81). Finalmente, se verifica en virtud de (86) para un cierto A suficientemente grande

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| g_2(\omega) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A}^{-k} e^{-i\omega t} G(t)\, dt \right|^2 d\omega < \varepsilon;$$

desigualdad que, en conjunción con la (82), nos da

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g_2(\omega)|^2 d\omega < \varepsilon,$$

con lo cual el teorema queda demostrado.

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE LA UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES.
INSTITUTO DE MATEMÁTICA.

BIBLIOGRAFIA

M. BAYARD –

1. Rélations entre las parties réelles et imaginaires des Impédances et détermination des Impédances en fonction de l'une des parties. Revue Générale d'Electricité, vol. 37 (1935), pp. 659-664.

H. W. BODE –

1. Network Analysis and Feedback Amplifier Design. New York, Van Nostrand, 1945.

A. P. CALDERÓN, A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ y A. ZYGMUND –

1. Nota sobre los valores límites de funciones analíticas. Revista de la Unión Maemática Argentina, vol. 14 (1949), pp. 16-19.

G. A. CAMPBELL and R. M. FOSTER –

1. Fourier Integrals por Practical Applications. Bell System Telephone Technical Publications. Monograph B-584, 1931.

W. B. CATON and E. HILLE –

1. Laguerre Polynomials and Laplace Integrals. Duke Mathematical Journal, vol. 12 (1945), pp. 217-242.

W. CAUER –

1. Frequenzweichen konstanten Betriebswiderstandes. Elektrische Nachrichtentechnik, vol. 16 (1939), pp. 96-120.

S. DARLINGTON –

1. Synthesis of Reactance 4 - Poles. Journal of Mathematics and Physics, vol. 18 (1939), pp. 257-353.

B. DEMTCHENKO –

1. Problèmes mixtes harmoniques en Hydrodynamique des fluides parfaits. Paris, Gauthier-Villars, 1933.

G. DOETSCH –

1. Bedingungen fuer die Darstellbarkeit einer Funktion als Laplace Integral, und eine Umkehrformel fuer die Laplace Transformation. Mathematische Zeitschrift, vol. 42 (1937), pp. 263-286.
2. Tabellen zur Laplace Transformation. Berlin und Goettingen, Springer Verlag, 1947.

L. FEJÈR –

1. Ueber trigonometrische Polynome. Journal fuer die reine und angewandte Mathematik, vol. 146 (1916), pp. 53-82.

K. FRÄNZ –

1. Relaciones entre Señal y Espectro. Revista de la Unión Matemática Argetina, vol. XIV (1950), pp. 140-155.
2. Eine Verallgemeinerung des Fosterschen Reaktanztheorems auf beliebige Impedanzen. Elektrische Nachrichtentechnik, vol. 20 (1943), pp. 113-115.

OTTO FROSTMAN –

1. Potentiel d'Équilibre et Capacité des Ensembles. Lund, 1935.

A. GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ –

1. Notas sobre la Teoría matemática de los circuitos lineales. I. Un método para la síntesis de impedancias. Mathematicae Notae, vol. 7 (1947), pp. 1-6.

G. H. HARDY –

1. The Theory of Cauchy Principal Values. Proceedings of the London Mathematical Society. Series 2, vol. 7 (1908-1909), pp. 181-208.

T. H. HILDEBRANDT –

1. On bounded linear functional operations. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 36 (1934), pp. 868-875.

E. HILLE –

1. Functional Analysis and Semigroups. American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 31, New York, 1948.
2. Bilinear formulas in the Theory of the transformation of Laplace. Compositio Mathematica, vol. 6 (1938), pp. 93-102.

E. HILLE and J. D. TAMARKIN –

1. On the absolute Integrability of Fourier transforms. Fundamenta Mathematicae, vol. 25 (1935), pp. 329-352.

H. M. JAMES, N. NICHOLS and R. S. PHILLIPS –

1. Theory of Servomechanisms. New York, McGraw-Hill, 1947.

H. KOBER –

1. A note on Fourier transforms. Journal of the London Mathematical Society, vol. 19 (1944), pp. 144-152.

V. KRILOV –

1. Ueber Funktionen die in der Halbebene regulaer sind. Récueil Mathématique, Nouvelle Série, vol. 6 (48) (1939), pp. 95-138.

V. D. LANDON –

1. Cascade Amplifiers with maximal flatness. R. C. A. Review, vol. 5 (1940), pp. 347-362, 481-497.

Y. W. LEE –

1. Synthesis of Electrical Networks by means of the Fourier Transforms of Laguerre's Functions. Journal of Mathematics and Physics, vol. 11 (1932), pp. 83-113.

Y. W. LEE and N. WIENER –

1. U. S. Patent, Number 2128257.

L. A. McCOLL –

1. Fundamental Theory of Servomechanisms. New York, Van Nostrand, 1945.

T. MURAKAMI and M. S. CORRINGTON –

1. Relations between amplitude and phase in electrical networks. R. C. A. Review, vol. 9 (1948), pp. 602-631.

R. NEVANLINNA –

1. Eindeutige analystische Funktionen. Berlin, Springer, 1936.

R. E. A. C. PALEY and N. WIENER –

1. Fourier Transforms in the Complex Domain. American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 19. New York, 1934.

A. PLESSNER –

1. Zur Theorie der konjugierten trigonometrischen Reihen. Mitteilungen des mathematischen Seminars der Universitaet Giessen. Giessen, 1923.

G. POLYA anñ G. SZEGÖ –

1. Aufgaben und Lehrsaetze aus del Analysis. Berlin, Springer, 1925.

G. L. RAGAN –

1. Microwave Transmission Circuits. New York, McGraw-Hill, 1948.

F. RIESZ –

1. Ueber die Randwerte einer analystichen Funktion. Mathematische Zeitschrift, vol. 18 (1923), pp. 87-95.

M. RIESZ –

1. Sur les fonctions conjuguées. Matematische Zeitschrift, vol. 27 (1927), pp. 218-244.

O. SCHLOEMILCH –

1. Analystiche Studien. Leipig, 1848.

W. SEIDEL –

1. On the distribution of values of bounded analytic functions. Transactions of the American Mathematical Society, vol. 36 (1934), pp. 201-226.

A. SIGNORINI –

1. Sopra un problema al contorno nella teoria delle funzioni di una variabile complessa. Annali di Matematica, terza serie, vol. 25 (1916), pp. 253-273.

V. J. SMIRNOFF –

1. Sur les valeurs limites des fonctions regulières a l'intérieur d'un cercle. Journal de la Société Physico-Mathématique de Leningrad, vol. 2 (1929).

G. SZEGÖ –

1. Orthogonal Polynomials. American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 23. New York, 1939.

E. C. TITCHMARSH –

1. Introduction to the Theory of Fourier Integrals. Oxford, Clarendon Press, 1937.

G. E. VALLEY and H. WALLMAN –

1. Vacuum Tube Amplifiers. New York, McGraw-Hill, 1948.

O. A. VARSAVSKY –

1. Sobre la transformación de Hilbert. Revista de la Unión Matemática Argentina, vol. 14 (1949), pp. 20-37.

S. VERBLUNSKY –

1. On positive polynomials. Journal of the London Mathematical Society, vol. 20 (1945), pp. 73-79.

J. VILLE –

1. Théorie et application de la notion de signal analytique. Câbles et Transbles et Transmission, vol. 2 (1948), pp. 61-74.

D. V. WIDDER –

1. The Laplace Transform. Princeton, Princeton University Press, 1941.

N. WIENER and Y. W. LEE –

1. U. S. Patents n. 2024900 and 2124599.