

SOBRE LOS PROCESOS RADIATIVOS DE SEGUNDO ORDEN

por CECILIA MOSSIN KOTIN

Instituto de Física - Buenos Aires

(Recibido 12 marzo 1950)

SUMMARY. — The computation of transition probabilities for radiative processes can be considerably simplified by the use of the hypercomplex formalism, which accounts immediately for all intermediate states due to different spin orientations and charge signs. As an example, the case of two photon and two electron states is considered, which contains both the Klein-Nishina formula for Compton scattering and Dirac's formula for pair annihilation.

1. *Introducción.* — La probabilidad de transición de un proceso de segundo orden está determinada por el elemento de matriz

$$H_{AF} = \sum_I \frac{H_{AI} H_{IF}}{E_A - E_I} \quad (1)$$

donde A y F indican los estados inicial y final del sistema; I , los estados intermedios; E_A y E_I , las energías del sistema en el estado inicial e intermedio, respectivamente. La suma se extiende a los estados intermedios posibles, caracterizados por las dos polarizaciones posibles de cada fotón y los dos signos del spin y de la energía del electrón. En tanto que la energía en los estados inicial y final tiene el mismo valor, la E_I de los estados intermedios difiere de él; en cambio, el impulso correspondiente a los estados inicial, intermedio y final, en el caso de electrones libres, es el mismo. Para el spin del electrón se adopta, en el estado inicial, una dirección determinada.

Al utilizar el formalismo hipercomplejo, podemos incluir en el cálculo, simultáneamente, las dos direcciones del spin y

los dos signos de la energía del electrón en los estados inicial y final, representando los elementos de matriz por matrices de cuatro filas y columnas,

$$H_{AI} = \iint \Gamma_A^{*s} \tilde{\psi}_A U \psi_I \Gamma_I d\tau d\vartheta \quad (2)$$

$$H_{AF} = \int H_{AI} \cdot dt \cdot H_{IF}$$

donde las matrices dependen explícitamente del tiempo.

El representa las autofunciones del campo de radiación en función del número de fotones presentes y de las fases de las ondas correspondientes

$$\Gamma = e^{i \sum_k (\epsilon_k n_k kct - \epsilon_k n_k \vartheta_k + \frac{i}{2} \ln 2\pi)} \quad (3)$$

ϵ_k es el signo de la energía del fotón k , $\epsilon_k^2 = 1$.

ψ es la autofunción del estado del electrón libre de impulso \vec{p} en el dominio de lado L ,

$$\psi = \frac{p_0 + mc - \gamma p}{\sqrt{L^3 2 p_0 (p_0 + mc)}} e^{\frac{2\pi i}{\hbar} (\beta p_0 ct + \vec{p} \cdot \vec{r})} \quad (4)$$

con

$$p_0 = \pm \sqrt{p^2 + m^2 c^2}, \quad \gamma = \beta \alpha.$$

U es la parte del hamiltoniano del sistema que corresponde al acoplamiento entre el electrón y el campo de radiación

$$U(\epsilon) = -e \sum_k \vec{a}_k \alpha_k \sqrt{\frac{\hbar c}{k}} \left\{ \frac{1}{2} (1 - \epsilon_k) [N_k e^{i\vartheta_k} u_k^* + e^{-i\vartheta_k} \sqrt{N_k} u_k] + \frac{1}{2} (1 + \epsilon_k) [\sqrt{N_k^*} e^{-i\vartheta_k} u_k + e^{i\vartheta_k} \sqrt{N_k^*} u_k^*] \right\} \quad (5)$$

$N_k = (\partial/i \partial \vartheta_k)$ es el operador del número de fotones; \vec{a}_k , el vector de polarización, $u_k = e^{i \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar}} / L^{3/2}$.

La expresión (2) es unívoca sólo para transiciones de primera clase (transiciones entre estados del electrón, con el mismo signo de energía). Para dar un significado unívoco a las partes de segunda clase de (2), establecemos, para todas las expresiones que seguirán, que el factor dependiente del tiempo, en los elementos de matriz, estará siempre escrito a la izquierda (*).

2. *La matriz de la transición de segundo orden.*— Consideramos, ahora, la matriz (2), indicando los estados inicial y final, más explícitamente, así: $A \rightarrow (A, k)$, $F \rightarrow (F, k')$, es decir que admitimos en el estado inicial un fotón k presente, en el estado final un fotón k' . Distinguiremos, además, dos estados intermedios posibles, uno sin fotón (absorción del fotón k), otro con dos fotones (emisión del fotón k'),

$$I; II \rightarrow (II, k, k').$$

Distinguiendo entre las partes de primera y de segunda clase de $H = {}^{(1)}H + {}^{(2)}H$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int {}^{(1)}H_{Ak, I} \cdot dt &= - \frac{1}{\beta E_A + \varepsilon_k ck - \beta E_I} {}^{(1)}H_{Ak, I} \\ \int {}^{(2)}H_{Ak, I} \cdot dt &= - \frac{1}{\beta E_A + \varepsilon_k ck + \beta E_I} {}^{(2)}H_{Ak, I} \\ \int {}^{(1)}H_{Ak, IIk'} \cdot dt &= - \frac{1}{\beta (E_A - E_{II}) - \varepsilon_{k'} ck'} {}^{(1)}H_{Ak, IIk'} \\ \int {}^{(2)}H_{Ak, IIk'} \cdot dt &= - \frac{1}{\beta (E_A + E_{II}) + \varepsilon_{k'} ck'} {}^{(2)}H_{Ak, IIk'} \end{aligned} \quad (6)$$

Para poder introducir (6) en (2) debemos fijar, primero, los signos de ε_k en cada caso. Para ello, tomamos en cuenta la condición de conservación de la energía en los estados inicial y final del sistema, la cual se expresa, adoptando la regla men-

(*) Ver G. БЕСК, Phys. Rev., 64, 336, 1943, donde, sin embargo, el comportamiento de los ε_k no está completamente determinado.

cionada acerca del factor dependiente del tiempo que escribimos a la izquierda, mediante las relaciones

$$\text{en primera clase: } \beta(E_A - E_F) + \varepsilon_k ck - \varepsilon_{k'} ck' = 0$$

$$\text{en segunda clase: } \beta(E_A + E_F) + \varepsilon_k ck - \varepsilon_{k'} ck' = 0;$$

de manera que obtenemos:

$$\text{en primera clase: } \varepsilon_k = \varepsilon_{k'} = \beta, \quad E_A + ck = E_F + ck'$$

$$\text{en segunda clase: } \varepsilon_k = -\varepsilon_{k'} = -\beta, \quad E_A + E_F = ck + ck'. \quad (7)$$

De (7) fluye, inmediatamente que, según el formalismo hipercomplejo, las partes de primera clase hacen intervenir fotones de energía positiva solamente y corresponden a un proceso de difusión de un fotón (efecto de Compton), mientras que en la parte de segunda clase el fotón inicial figura, formalmente, con energía negativa, describiéndose un proceso de aniquilación (o producción) de un par de electrones de distinto signo, por emisión (o absorción de dos fotones).

Consideraremos, en lo que sigue, estos dos casos por separado.

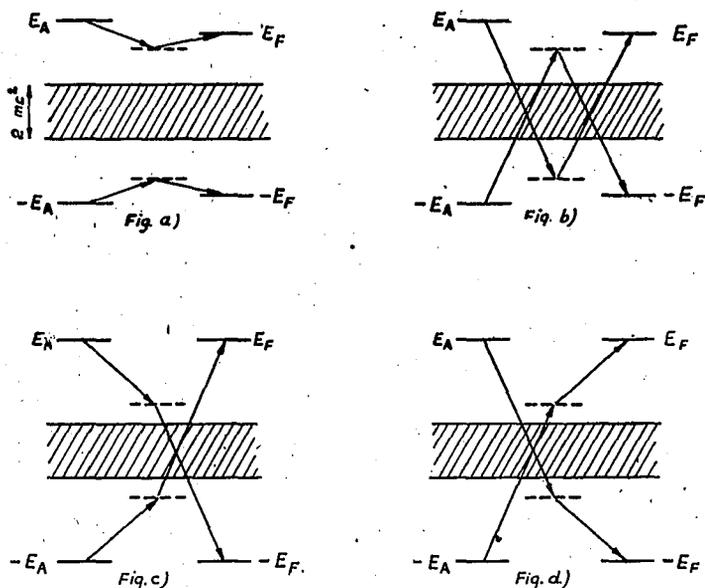
3. *El efecto de Compton.* - Como vimos más arriba, el efecto de Compton se describe mediante la parte de primera clase de la matriz (2) ${}^{(1)}H_{A_k, Fk'}$.

Introduciendo (6) en (2); tomando en cuenta las consecuencias (7) y separando la parte de primera clase, obtenemos

$${}^{(1)}H_{A_k, Fk'} = -\frac{\beta^{(1)}H_{A_k, I} {}^{(1)}H_{I, Fk'}}{E_A + ck - E_I} - \frac{\beta^{(1)}H_{A_k, II, k'} {}^{(1)}H_{II, k', Fk'}}{E_A - E_{II} - ck'} \quad (8)$$

$$- \frac{\beta^{(2)}H_{A_k, I} {}^{(2)}H_{I, Fk'}}{E_A + ck + E_I} - \frac{\beta^{(2)}H_{A_k, II, k'} {}^{(2)}H_{II, k', Fk'}}{E_A + E_{II} - ck'}$$

Comparando (8) con las transiciones conocidas, representadas en las figuras a) y b), se ve claramente cómo, según el formalismo hipercomplejo, estas transiciones corresponden a los términos de la primera y de la segunda fila de (8), respectivamente.



Para hallar el valor de la expresión (8), elegimos un sistema de referencia en el que el electrón, en el estado inicial, se encuentra en reposo, $E = mc^2$, $\vec{p} = 0$; introduciendo las notaciones

$$\gamma = \frac{h\epsilon}{2\pi mc}; \quad \gamma' = \frac{hk'}{2\pi mc}$$

$$\vec{I}p = \vec{n} \cdot \gamma \cdot mc; \quad \vec{II}p = \vec{n}' \cdot \gamma' \cdot mc,$$

donde \vec{n} y \vec{n}' son los vectores unitarios normales a las ondas primaria y difundida, y siendo

$$\gamma' = \frac{\gamma}{1 + \gamma(1 - \cos \vartheta)}; \quad \cos \vartheta = \vec{n} \cdot \vec{n}'$$

obtenemos

$$H_{A_k, Fk'} = \frac{-\beta e^2 \hbar^2}{4\pi L^3 m^2 c^2 \sqrt{\gamma \gamma'}} \frac{1}{\sqrt{2A(A-1)}} \left\{ A[(\vec{\alpha} \vec{\alpha}) (\vec{\alpha} \vec{\alpha}') + (\vec{\alpha} \vec{\alpha}') (\vec{\alpha} \vec{\alpha})] + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \gamma \left[(\vec{a} \vec{a}) (\vec{a} n) (\vec{a} a') (\vec{a} n) - \frac{(\vec{a} \vec{a}) (\vec{a} n) (\vec{a} a') (\vec{a} n')}{f} \right. \\
 & \left. + (\vec{a} a') (\vec{a} n') (\vec{a} a) (\vec{a} n) - \frac{(\vec{a} a') (\vec{a} n') (\vec{a} a) (\vec{a} n')}{f} \right] \quad (9)
 \end{aligned}$$

con $A = 1 + \sqrt{1 + (\gamma n - \gamma' n')^2}$; $f = 1 + \gamma(1 - \cos \vartheta)$.

El cuadrado absoluto de la matriz (9) es

$$\begin{aligned}
 |H|^2 = & \frac{e^4 h^4}{16\pi^2 L^6 m^4 c^4 \gamma \gamma'} \frac{1}{2A(A-1)} \{ 4A^2 (\vec{a} a')^2 + \\
 & + 4\gamma A (\vec{a} a') [(\vec{a} a') + (\vec{a} a') (\vec{n} n') - (\vec{a} n') (\vec{a}' n)] \left(\frac{1}{f} - 1 \right) + \\
 & + 2\gamma \left(1 + \frac{1}{f^2} \right) [1 + (\vec{a} a')^2 (\vec{n} n') - (\vec{a} a') (\vec{a}' n)] \\
 & \left. (\vec{a} n') - (\vec{a}' n') \left((\vec{a} \wedge a') \wedge (\vec{a} \wedge n) \right) \right] \quad (10)
 \end{aligned}$$

Efectuadas las sumas sobre los spins y utilizando la relación que vincula $|H|^2$ con la sección eficaz de choque

$$d\phi = \frac{4\pi^2 L^3}{hc} |H|^2 \rho_F$$

donde ρ_F indica el número de estados finales por intervalo de energía, se obtiene la intensidad de la radiación difundida bajo el ángulo ϑ con una dirección de polarización dada, cuando la radiación primaria tiene una dirección determinada de polarización

$$\begin{aligned}
 d\phi = & \frac{e^4}{4m^2 c^4} \frac{1}{[1 + \gamma(1 - \cos \vartheta)]^2} \\
 & \left\{ \frac{1 + [1 + \gamma(1 - \cos \vartheta)]^2}{1 + \gamma(1 - \cos \vartheta)} + 4 \cos^2 \theta - 2 \right\} d\Omega \quad (11)
 \end{aligned}$$

$\vec{a} \cdot \vec{a}' = \cos \theta$ ($\theta =$ ángulo entre las polarizaciones)

(11) representa la fórmula de Klein-Nishina (*).

(*) Zeits. Phys. 52, 853, 1929.

4. *La aniquilación de pares.* - Introduciendo (6) en (2), utilizando (7) y separando la parte de segunda clase, se obtiene

$$H_{A_k, Fk'} = - \frac{\beta^{(1)} H_{A_k, I}^{(2)} H_{I, Fk'}}{E_A - E_I - ck} - \frac{\beta^{(1)} H_{A_k, IIk'}^{(2)} H_{IIk', Fk'}}{E_A - E_{II} - ck'} \quad (12)$$

$$- \frac{\beta^{(2)} H_{A_k, I}^{(1)} H_{I, Fk'}}{E_A + E_I - ck} - \frac{\beta^{(2)} H_{A_k, IIk'}^{(1)} H_{IIk', Fk'}}{E_A + E_{II} - ck'}$$

Los términos de la primera y de la segunda fila de (12) se identifican con las transiciones indicadas en las figuras c) y d) respectivamente.

Para evaluar las expresiones (12) escogemos, esta vez, un sistema de referencia en el que el centro de gravedad de las partículas consideradas está en reposo. En este caso, por referirse a transiciones entre estados electrónicos de distinto signo de energía, es

$${}^A \vec{p} = {}^I \vec{p}$$

Además, los impulsos de los estados intermedios valen:

$${}^I \vec{p} = {}^A \vec{p} - \vec{k}; \quad {}^{II} \vec{p} = {}^A \vec{p} + \vec{k}; \quad \vec{k}' = -\vec{k}.$$

Adoptando la notación $p_0 = E/c$ para las energías de los distintos estados del electrón, se obtiene, finalmente, como resultado del cálculo de la expresión (12)

$$H_{A_k, Fk'} = - \frac{\beta e^2 \hbar}{L^3 k} \frac{1}{2^A p_0 ({}^A p_0 + mc)} \times$$

$$\left(\frac{1}{p_0^2} \{ ({}^A p_0 + mc)^2 (\overset{\rightarrow}{\alpha} \overset{\rightarrow}{\alpha}) (\overset{\rightarrow}{\alpha} \vec{p}) (\overset{\rightarrow}{\alpha} \overset{\rightarrow}{\alpha}') - (\overset{\rightarrow}{\alpha} \vec{p}) (\overset{\rightarrow}{\alpha} \overset{\rightarrow}{\alpha}) (\overset{\rightarrow}{\alpha} \vec{p}) (\overset{\rightarrow}{\alpha} \overset{\rightarrow}{\alpha}') (\overset{\rightarrow}{\alpha} \vec{p}) + \right.$$

$$\left. + mc ({}^A p_0 + mc) [(\overset{\rightarrow}{\alpha} \overset{\rightarrow}{\alpha}) (\overset{\rightarrow}{\alpha} \overset{\rightarrow}{\alpha}') (\overset{\rightarrow}{\alpha} \vec{p}) + (\overset{\rightarrow}{\alpha} \vec{p}) (\overset{\rightarrow}{\alpha} \overset{\rightarrow}{\alpha}) (\overset{\rightarrow}{\alpha} \overset{\rightarrow}{\alpha}') \right] +$$

$$+ \frac{1}{{}^{II} p_0^2} \{ ({}^A p_0 + mc)^2 (\overset{\rightarrow}{\alpha} \overset{\rightarrow}{\alpha}') (\overset{\rightarrow}{\alpha} \vec{p}) (\overset{\rightarrow}{\alpha} \overset{\rightarrow}{\alpha}) - (\overset{\rightarrow}{\alpha} \vec{p}) (\overset{\rightarrow}{\alpha} \overset{\rightarrow}{\alpha}') (\overset{\rightarrow}{\alpha} \vec{p}) (\overset{\rightarrow}{\alpha} \overset{\rightarrow}{\alpha}) (\overset{\rightarrow}{\alpha} \vec{p}) +$$

$$\left. + mc ({}^A p_0 + mc) [(\overset{\rightarrow}{\alpha} \overset{\rightarrow}{\alpha}') (\overset{\rightarrow}{\alpha} \overset{\rightarrow}{\alpha}) (\overset{\rightarrow}{\alpha} \vec{p}) + (\overset{\rightarrow}{\alpha} \vec{p}) (\overset{\rightarrow}{\alpha} \overset{\rightarrow}{\alpha}') (\overset{\rightarrow}{\alpha} \overset{\rightarrow}{\alpha}) \right] \}. \quad (13)$$

Formando el cuadrado absoluto de (13), que, por ser una expresión larga, no será reproducida explícitamente, sumando sobre los spins y las polarizaciones, promediando sobre las direcciones iniciales de los spins, llegamos a la fórmula de Dirac (*) por la sección eficaz de la aniquilación de pares

$$d\phi = \frac{e^4}{4kp} \left\{ \frac{k^2 + p^2 + p^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta}{k^2 - p^2 \cos^2 \vartheta} - \frac{2p^4 \operatorname{sen}^4 \vartheta}{(k^2 - p^2 \cos^2 \vartheta)^2} \right\} d\Omega. \quad (14)$$

5. *Discusión.* - El formalismo hipercomplejo conduce, en consecuencia, a las fórmulas conocidas de los procesos radiativos de segundo orden, estableciendo una relación más estrecha entre distintos procesos, tales como el efecto de Compton y la aniquilación de pares. Una relación semejante se encuentra entre el efecto de Cherenkov y la formación espontánea de un par por un fotón en un medio de índice de refracción distinto (inferior), de uno; entre el efecto de «bremsstrahlung» y la producción de un par en la proximidad de un núcleo, etc. El método permite, además, seguir durante el cálculo, de manera muy ceñida los procesos físicos.

Para los procesos de primera clase, este método no difiere esencialmente de los otros métodos conocidos. Para los procesos de segunda clase, en cambio, la representación adoptada necesita, contrariamente a las otras teorías, la intervención de estados fotónicos con energías de distintos signos, análogamente a la teoría del electrón. Desde el punto de vista formal, la diferencia no es esencial: en efecto, el elemento de matriz de una transición radiativa no cambia si, durante la transición, están presentes un número arbitrario de fotones de energías positivas o negativas, sin participar en ella

$$H_{AB} = H_{A(nk), B(nk)}$$

y, en particular, la absorción de un fotón negativo es equivalente a la emisión de un fotón positivo

$$H_{A_k, B} = H_{A, B-k}$$

(*) Proc. Camb. Phil. Soc. 26, 361, 1930.

Sin embargo, desde el punto de vista físico, la admisión de fotones de energía negativa no puede ser incluida en un modelo del tipo de la teoría de las lagunas, ya que tal modelo no puede ser extendido a partículas que obedecen la estadística de Bose-Einstein. Solamente criterios más amplios que este problema restringido de que nos hemos ocupado podrán decidir si los fotones negativos pueden ser admitidos o no por la teoría.

Agradezco encarecidamente al doctor Guido Beck los consejos recibidos durante la realización de este trabajo.