TERCERAS JORNADAS MATEMATICAS ARGENTINAS

Con todo éxito se realizaron en la primera quincena de julio, las *Terceras Jornadas Matemáticas Argentinas,* organizadas por la Unión Matemática Argentina. Además de numerosos participantes locales, concurrieron a ellas delegaciones científicas del interior y del Uruguay.

Han de destacarse especialmente el apoyo prestado por el señor Decano de la Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniero Quinterno y la hospitalidad y cordialidad del señor Director del Instituto Radiotécnico, doctor Vignaux, que merecen un agradecimiento especialísimo.

La calidad y cantidad del público matemático concurrente tuvo su agradable nota complementaria en los refrigerios servidos en homenaje a los participantes y sus familiares.

La organización de las *Jornadas,* que resultó perfecta, estuvo a cargo de los colegas M. Sadosky, O. Varsavsky y L. A. Santaló.

Las *Jornadas* fueron iniciadas por una interesante alocución de J. Rey Pastor, desarrollándose a continuación el programa fijado.

Lunes 10 de Julio 17 horas. Sesión inaugural

G. Doetsch. Sobre el problema de la convergencia en la teoría de la transformación de Laplce.

Martes 11 de Julio 9 horas. Sesión dedicada a Algebra, Geometría y Topología

A. Durañona. Sobre el cálculo exterior de Cartan.

J. L. Massera. Estabilidad condicional de un homeomorfismo en el entorno de un punto fijo.

R. Ricabarra - M. Cotlar. Sobre el Análisis Armónico en grupos abelianos.

E. O. Roxin. Sobre el concepto de ordenación en grupos.

A. E. Sagastume Lerra. Divisibilidad en grupoides.

L. A. Santaló. Unas desigualdades entre los elementos de un tetraedro en geometría no-euclideana.

O. E. Villamayor. Nil-p anillos.

C. Villegas Mañé. Un teorema sobre inversión local de transformaciones.

J. J. Schaeffer. Figura mínima que cubre puntos de una red.

Además, otro trabajo de C. Villegas Mañé y dos comunicaciones de R. Laguardia y A. Monteiro, respectivamente.

15 horas. Sesión dedicada a Análisis

M. Cotlar - Y. Frenkel. Mayorantes no aditivas en la teoría de Perron-Denjoy.

M. Cotlar - R. Ricabarra. Series lacunares trigonométricas de dos variables.

Y. Frenkel - M. Cotlar. Sobre un lema de F. Riesz.

A. González Domínguez. Sobre una representación de la delta cónica.

M. Gutiérrez Burzaco. Nota a la memoria de Cotlar-Ricabarra sobre la integral de Caratheodory.

L. Koschmieder. Una contribución a la teoría de las funciones elípticas.

J. L. Massera. Sistemas de ecuaciones diferenciales periódicas de período T con respecto a la variable independiente y que admiten soluciones de período T' inconmensurable con T.

P. Pi Calleja. Sobre las funciones absolutamente continuas.

D. Voelker. Sobre las soluciones singulares de la ecuación de Laplace en el primer cuadrante.

Miércoles 12 de Julio. 9 horas. Sesión dedicada a Metodología y Didáctica

R. G. Carranza. Sobre el significado de la ley débil de los grandes números desde el punto de vista de la inferencia estadística.

R. García. Fundamento semántico del concepto de número.

M. C. de Macagno. El método de laboratorio en la enseñanza de la Matemática.

P. Pi Calleja. Nombramiento de profesores de Matemática en la enseñanza media.

— — Espíritu y orientación de la Matemática en el bachillerato.

15 horas. Sesión dedicada a Fisicamatemática y Matemática Aplicada

K. Fränz. Teoría de los servomecanismos lineales de alta precisión.

J. J. Giambiagi. Aplicación del método de Hadamard al cálculo del campo mesónico.

E. A. M. Machado. Cálculo del promedio mensual de temperatura en base a los promedios mensuales de 8, 14 y 20 horas.

S. Sispanov. Oscilaciones en el caso de resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad.

O. A. Varsavsky. Aplicación de algunos conceptos de grupos topológicos a la Mecánica Cuántica.

RESÚMENES DE LOS TRABAJOS PRESENTADOS

Damos a continuación los resúmenes de la mayoría de los trabajos presentados a las «Terceras Jornadas Matemáticas Argentinas», celebradas en Buenos Aires los días 10, 11 y 12 de julio de 1950. De algunos trabajos (Doetsch, Voelker, Giambiagi) no se publican los resúmenes, pues en este mismo número los trabajos aparecen in extenso. En números sucesivos irán apareciendo también algunos trabajos in extenso de los que aquí damos su resumen.

Trabajos de Algebra, Geometría y Topología.

J. L. Massera. *Estabilidad condicional de un homeomorfismo en el entorno de un punto fijo.*

Sea Z un espacio de Banach, producto topológico de dos espacios X, Y, uno de los cuales, por lo menos, se supone euclideano (de dimensión finita). Sea T un homeomorfismo en Z con O como punto fijo. Admitimos que T tiene una diferencial de Fréchet en O: $Tz = Nz + o(\|z\|)$, N lineal; más precisamente, si $z = (x, y)$, $\varsigma = Tz = (\xi, \eta)$, $x, \xi \in X$, $y, \eta \in Y$, entonces $\xi = Lx + o(\|z\|)$, $\eta = My + o(\|z\|)$, L, M lineales. Bajo hipótesis generales acerca de las normas de L, M, se demuestra la existencia de un «conjunto de estabilidad», es decir, de un conjunto S tal que: a) $TS \subseteq S$; b) si $z \in S$, $T^n z \longrightarrow 0$; c) S es el máximo conjunto con las propiedades a) y b). S tiene una propiedad de separación con respecto al espacio Z.

Si se aumentan las restricciones sobre T se obtiene gradualmente resultados que aclaran la naturaleza topológica y analítica de S. Por ejemplo, si T admite una diferencial de Fréchet continua en el contorno de O (si T es analítica), S es el gráfico de una función $y = F(x)$ que admite una diferencial de Fréchet continua (que es analítica) en el entorno de O. Sin estas hipótesis suplementarias S puede ser un conjunto bastante complicado, a saber, puede no ser un continuo o puede ser un continuo que no es de conexión curvilínea.

R. A. Ricabarra y Mischa Cotlar, *Sobre el análisis armónico en grupos abelianos.*

La fundamentación del análisis armónico suele hacerse o bien usando la teoría de ideales de anillos normados (Raikoff, Gelfand), o combinando el método de puntos extremales con la teoría de representaciones de espacios de Hilbert (Cartan, Godement). En el presente trabajo se ofrece una exposición simplificada y elemental de esta teoría, prescindiendo de la teoría de operadores de espacios de Hilbert y simplificando las demostraciones de los teoremas de Bochner y de Plancherel.

Emilio O. Roxin, *Sobre el concepto de ordenación en grupos.*

El concepto de orden, es decir de conjunto ordenado, ha demostrado ser de una fecundidad extraordinaria en la historia de la matemática. Resulta, pues, lógico, tratar de aplicarlo a una estructura tan importante como ser el grupo. Eso es, sin embargo, en general imposible. Cuando se trata de un semigrupo positivo, se hace sin dificultad y el semigrupo resulta convertido en un látice. En cambio en los grupos más sencillos, los cíclicos, no es lógicamente aplicable el concepto de ordenación, ya sea lineal o parcial. A ellos se puede aplicar, a su vez, la noción de orden cíclico.

Los postulados del orden cíclico fueron establecidos por E. V. Huntington: «Sets of completely independent postulates for cyclic order», Proc. Nat. Acad.. Sci., 1924, aún cuando el origen de estos postulados corresponde evidentemente a los trabajos, anteriores, de fundamentación rigurosa de la geometría. Huntington enuncia los siguientes postulados:

Dado un conjunto de elementos $a, b, c, \ldots$ definimos una relación ternaria, tal que 3 elementos a, b, c (distintos) pueden estar en una relación de sucesión que escribimos $a\,b\,c$, tal que satisface a:

E) $a\,b\,c \longrightarrow c\,a\,b$.

B) Si a, b, c son distintos, se cumple por lo menos una de las relaciones $a\,b\,c$, $b\,c\,a$, $c\,a\,b$, $a\,c\,b$, $c\,b\,a$, $b\,a\,c$.

C) Si a, b, c son distintos, las relaciones $a\,b\,c$, $a\,c\,b$ se excluyen.

D) Si se verifica la relación $a\,b\,c$, son a, b, c distintos.

2) $x\,a\,b$, $a\,y\,b \longrightarrow x\,a\,y$.

3) $x\,a\,b$, $a\,y\,b \longrightarrow x\,y\,b$.

9) Si $a. b, c, x$ son distintos y se cumple $a\,b\,c$, entonces se cumple una de las dos relaciones $a\,b\,x$, $x\,b\,c$.

Para determinar el orden cíclico pueden utilizarse, como demuestra Huntington, indistintamente los siguientes sistemas de postulados: $E, B, C, D, 2$ — $E, B, C, D, 3$ — $E. B, C, D, 9$. Huntington también demuestra la independencia de estos postulados.

Evidentemente, como un grupo puede, en general, contener subgrupos cíclicos de orden finito y de orden infinito, un concepto de orden más general, para ser aplicable en grupos, debe incluír los de orden lineal (o mejor, parcial) y de orden cíclico.

Damos a continuación un sistema de postulados que incluye ambos conceptos de orden; y que llamamos ordenación ternaria:

I) Dados 3 elementos a, b, c distintos, pueden estar ellos en una relación de sucesión que escribimos $a\,b\,c$.

II) $a\,b\,c$ es incompatible con cualquiera de las permutaciones impares $a\,c\,b$, $b\,a\,c$, $c\,b\,a$.

III) $a\,b\,c$, $a\,x\,b \longrightarrow x\,b\,c$, $a\,x\,c$.

IV) $a\,b\,c$, $b\,x\,c \longrightarrow a\,b\,x$, $a\,x\,c$.

V) $a\,b\,c$, $c\,d\,a \longrightarrow b\,c\,a$.

Se discuten estos postulados, mediante los que se llega a lo que parece la propiedad más fundamental:

Teorema: Si se verifica abc, cda, también se verifica: abd, acd, bcd, bca, bda, cdb, cab, dab, dac, dbc. Es decir, estamaos en presencia del orden cíclico.

Toda ordenación parcial da origen a una ordenación ternaria, que a su vez queda determinada por esta última, con tal que toda cadena que aparezca en la ordenación parcial tenga más de dos elementos.

Las aplicaciones a la teoría de grupos son evidentes en los casos más sencillos, pero es de esperar que en casos más complicados este concepto de orden también pueda ser de utilidad.

ALBERTO E. SAGASTUME BERRA. *Divisibilidad en grupoides.*

Sea G un *grupoide* o sistema cerrado con respecto a un producto asociativo (conmutativo y con unidad 1). Si se da una *ley* M que a cada $a \in \mathrm{G}$ haga corresponder un subconjunto $\mathrm{M}(a)$ de un conjunto fijo M, a se dice *divisor de* b *según* M, $a|b(M)$, cuando $\mathrm{M}(b) \subseteq \mathrm{M}(a)$. Los conjuntos $\mathrm{M}(a)$ deben cumplir solamente la condición $\mathrm{M}(ab) \subseteq \mathrm{M}(a)$. Queda así generalizada la noción de divisibilidad, cumpliéndose muchas de las propiedades elementales referentes a múltiplos, submúltiplos, unidades, elementos asociados e ideales: un (M)-*ideal* es un subconjunto que, simultáneamente con un $a \in \mathrm{G}$, contiene a todos sus múltiplos (M).

El sistema $\{\mathrm{I}\}$ de todos los (M)-ideales $\mathrm{I} \subseteq \mathrm{G}$ goza de propiedades que son características y permiten, por lo tanto, inversamente, determinar la divisibilidad (M). Otro tanto ocurre con las clases A, B, ... de elementos asociados (M). Se tienen así dos procedimientos para determinar todas las posibles (M).

Una divisibilidad (M) se dice *incluída* en otra (M') (de un mismo grupoide G), $(M) \subseteq (M')$, cuando $a|b(M')$ implica $a|b(M)$. Queda así definido un ordenamiento parcial a cuyo respecto todas las divisibilidades constituyen un *lattice* completo $\mathrm{L} = \mathrm{L}(\mathrm{G})$; reunión e intersección de (un conjunto arbitrario de) divisibilidades, dan también divisibilidades en G. El cero de este *lattice* L es la divisibilidad *trivial* (T), caracterizada por $a|b(T)$ cualesquiera sean a y b; la unidad de L es la divisibilidad absoluta (A), caracterizada por ser $a|b(A)$ si y sólo si $b = a \,.\, c$.

Se puede definir el grupoide *asociado* G* de G, que se obtiene identificando los elementos de G que pertenecen a cada clase de asociados absolutos, y definiendo entre estos nuevos elementos de G*, o entre las clases de asociados (A) de G, un producto $C(a).C(b)=C(ab)$, donde $C(x)$ es la clase que contiene a x. La propiedad más importante de G* y que justifica su introducción consiste en que los *lattices* L(G*), L(G) son isomorfos.

El trabajo termina con la consideración de algunas divisibilidades especiales y ejemplos. En particular se construye el grupoide asociado E^*_m del grupoide E_m de (clases de) restos módulo m en el campo de los enteros. Si el módulo se descompone en factores primos, $m=p_1^{e_k}\dots p_k^{e_k}$, E^*_m depende solamente solamente de los e_i y no de los p_i. En particular, el *lattice* $L(E^*_{p^n})$ es isomorfo al de subconjuntos de un conjunto de n elementos.

L. A. Santaló. *Unas desigualdades entre los elementos de un tetraedro en geometría no-euclidiana.*

Pólya ha demostrado, mediante las probabilidades geométricas, que entre las longitudes l_i de las aristas de un tetraedro y los ángulos diedros α_i correspondientes existen las desigualdades

$$\frac{\pi}{3}\sum_1^6 l_i<\sum_1^6 l_i\alpha_i<\frac{\pi}{2}\sum_1^6 l_i.$$

Se trata de la generalización de estas desigualdades a las geométricas no-euclidianas.

Orlando E. Villamayor. *Nil - p - anillos.*

Estudio sobre los anillos que cumplen las condiciones $(x-x^p)^i=0$, $(px)^j=0$, donde p es un número primo fijo e i y j funciones de x, la primera de ellas acotada. (La segunda condición *no es necesaria* para $p=2$). Se estudian los ideales primos, se da un teorema de representación y se estudia la aritmética de los ideales en esta clase de anillos.

Cesáreo Villegas Mañé. *Un teorema sobre inversión local de transformaciones.*

Diremos que un punto $\alpha\in E_\xi$ es regular para la transformación $x=x(\xi)$ si esta transformación es continua en α y localmente topológica en todos los puntos de un entorno reducido de α.

De los teoremas de inversión local y de prolongación continua de transformaciones interiores, ambos debidos a Stoïlow, se deduce inmediatamente que si E_x y E_ξ son localmente homeomorfos a E_2, la transformación $x=x(\xi)$ en un punto regular es localmente equivalente a la transformación $z=\varsigma^p$ en $\zeta=0$, siendo z y ζ variables complejas.

El teorema de inversión en los puntos regulares extiende este resultado a espacios menos restringidos en la siguiente forma:

Teorema: Si α es un punto regular para una transformación $x=x(\xi)$ de un espacio E_ξ regular, localmente compacto, que satisface el primer axioma de numerabilidad, a un espacio E_x localmente homeomorfo a E_n, dado un entorno U de α y un entorno V de su imagen a, se puede determinar una esfera centrada en a y un dominio $D\subset U$ que contiene a α y $K\subset V$ tal que $D-(\alpha)$ se divide en m dominios desunidos D_h de tal manera que:

1) si $n\geqq 3$ cada $C_h=D_h U(\alpha)$ se transforma topológicamente en K;

2) si $n=2$ se puede hallar una correspondencia topológica T_h entre C_h y un círculo K_h del plano complejo E_ς, con centro en el origen $\zeta=0$, de tal manera que si $\xi\zeta$ se corresponden mediante T_h es, considerando también a x como variable compleja,

$$x(\xi)=a+\zeta^{kh};$$

3) si $n=1$ la esfera K es un intervalo I cuyo punto medio es a, y es por lo tanto la unión de los intervalos semicerrados $I^- I^+$ cuyo único punto común es a, y hay p conjuntos C_h que se transforman topológicamente en I^+ y q que se transforman topológicamente en I^-, siendo $m=p+q$.

Cesáreo Villegas Mañé. *Sobre algunas fórmulas relativas al movimiento de flúidos.*

Se dan demostraciones rigurosas de las siguientes fórmulas, ampliamente conocidas

$$\frac{d}{dt}\int_{A(t)} f dA=\int_{S(t)} f(\overline{VN})\,dS+\int_{A(t)}\frac{\partial f}{\partial t}dA \tag{1}$$

$$\frac{dQ}{dt}+\frac{dW_R}{dt}=G\left(h_2+\frac{1}{2}V_2^2+Z_2\right)-G\left(h_1+\frac{1}{2}V_1^2+Z_1\right)+\varepsilon \tag{2}$$

$$\frac{dW_R}{dt}=G\left[\int_{P_1}^{P_2} v dp+\frac{1}{2}V_2^2-\frac{1}{2}V_1^2+Z_2-Z_1\right]+\varepsilon' \tag{3}$$

$$\frac{dW_R}{dt} = G(\bar{V}_2 \bar{V}_2{}^* - \bar{V}_1 \bar{V}_1{}^*) + \varepsilon''. \tag{4}$$

La fórmula (1) da la derivada respecto al tiempo de la integral de una función cualquiera f cuando el dominio de integración es el volumen $A(t)$ ocupado en el instante t por una determinada masa de flúido.

Las fórmulas restantes se refieren al funcionamiento en régimen de aparatos a través de los cuales circula el flúido.

Estos aparatos pueden tener o no partes giratorias, como las turbinas.

$\frac{dW_R}{dt}$ es el trabajo que entra al aparato por unidad de tiempo a través de sus partes giratorias; $\frac{dQ}{dt}$ es el calor recibido por unidad de tiempo por el flúido circulante; G es la cantidad de flúido que pasa por unidad de tiempo. Las demás variables tienen los significados usuales.

JOSÉ L. MASSERA - JUAN J. SCHÄFFER. *Figura mínima que cubre puntos de una red.*

Consideremos la red de puntos de coordenadas enteras respecto de un par de ejes ortogonales. Una figura plana F se llamará una figura recubridora cuando, por cualquier posición de F en el plano, por lo menos un punto de la red es cubierto por ella. El problema consiste en: hallar, entre todas las figuras recubridoras, aquella de área mínima.

Se estudia el caso de las figuras convexas, se hallan acotaciones para el área de figuras recubridoras, y caracterizaciones geométricas de las mismas, algunos criterios para figuras «minimales» o indisminuíbles, y una serie de ejemplos interesantes.

Trabajos de Análisis.

MISCHA COTLAR y YANNY FRENKEL. *Mayorantes no aditivas en la teoría de Perron y Denjoy.*

En la teoría clásica de integral de Perron (o de Denjoy) se prueba que si una función de punto $p(x)$ admite por lo menos una mayorante y una minorante, entonces $p(x)$ es integrable Perron (Denjoy). Aquí las mayorantes o minorantes son funciones de intervalo *aditivas*. El objeto del presente trabajo es probar que el mismo resultado subsiste si $p(x)$ admite una mayorante y una minorante cualesquiera, *aditivas* o *no*. Para tal fin se extienden previamente a funciones no aditivas teoremas fundamentales de la teoría de Perron-Denjoy.

MISCHA COTLAR - R. A. RICABARRA. *Sobre series ortogonales lacunares de dos variables.*

Se prueba que las principales propiedades de las series trigonométricas lacunares, y las de Rademacher, subsisten para una clase más amplia de las series ortogonales que verifican determinadas condiciones generales, obteniéndose así un método unificado de demostración. El mismo método permite extender al caso de series lacunares de 2 variables los resultados clásicos demostrados para 1 variable.

YANNY FRENKEL - MISCHA COTLAR. *Sobre un lema de F. Riesz.*

F. Riesz probó en forma muy elegante el teorema fundamental de la integral de Lebesgue, haciendo uso de un simple lema, que resultó útil también para otras cuestiones; así por ejemplo, Hartman mostró que el mismo lema puede ser usado para la demostración del teorema ergódico. En la presente nota se prueba que dicho lema, convenientemente generalizado, puede servir para demostrar el teorema correspondiente de la integral de Denjoy.

ALBERTO GONZÁLEZ DOMÍNGUEZ. *Sobre una representación integral de la delta cónica.*

Sea F(t) una función definida en todo el eje real. Supongámosla, para simplificar, sumable (aunque las consideraciones que siguen tienen validez en casos mucho más generales). Formemos con ella la integral

$$\phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{F(t)\, dt}{t^2 - z^2}.$$

Según que $Re(z) \gtrless 0$, esta integral define dos funciones regulares en los semiplanos superior e inferior respectivamente. Puede demostrarse que al tender z a x se verifica

$$\lim_{z \downarrow x} \phi_1(z) = \lim \frac{1}{2\pi i} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{F(t)\, dt}{t^2 - z^2} = \phi_1(x) = \frac{1}{2x} [F(x) + F(-x)] +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{F(t)\,dt}{t^2-x^2},\ z=x+y,\ y>0,$$

$$\lim_{\uparrow x}\phi_2(z)=\lim -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{F(t)\,dt}{t^2-z^2}=\phi_2(x)=\frac{1}{2x}\,[F(x)+F(-x)]-$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{F(t)\,dt}{t^2-x^2},\ y<0.$$

Es decir, que el efectuar sobre $F(t)$ las operaciones indicadas obteniendo $\phi_1(x)$ y tomar la parte real de esta función, equivale a operar sobre F(t) con la delta cónica $\delta(t^2-x^2)$ de Dirac. Igualmente el operador que transforma $F(t)$ en $F_1(x)$ equivale a la que puede llamarse «delta cónica positiva». Consideraciones similares valen para la función $F_2(x)$.

MARIO GUTIÉRREZ BURZACO. *Nota a la memoria de Cotlar-Ricabarra sobre la integral de Caratheodory.*

La teoría de la integral y medida de Daniell-Stone-Bourbaki considera una funcional *lineal* sobre un látice vectorial. Cotlar y Ricabarra, por analogía con la medida exterior de Caratheodory, consideran una funcional *convexa* y logran una teoría mucho más amplia.

Se simplifica en esta nota la caracterización del látice vectorial de las funciones «integrables Caratheodory», sobre el cual la funcional es lineal.

J. L. MASSERA. *Sistemas de ecuaciones diferenciales periódicas de período T con respecto a la variable independiente y que admiten soluciones de período T' inconmensurable con T.*

Para sistemas de orden $n=1$ (una sola ecuación de primer orden) o para sistemas lineales de orden $n\leqq 2$, se demuestra que la existencia de tales soluciones es imposible. En cambio, si el orden es mayor, pueden existir tales soluciones y es posible hallar condiciones necesarias y suficientes para que tal cosa ocurra. Estas condiciones dicen, esencialmente, que la trayectoria de esas soluciones excepcionales es una curva simple y cerrada sobre la cual los segundos miembros de las ecuaciones no dependen, en realidad, de la variable independiente.

Pedro Pi Calleja. *Sobre las funciones absolutamente continuas.*

Se da un ejemplo muy sencillo y se discuten las demostraciones de los teoremas referentes a la superposición de funciones.

Trabajos de Metodología y Didáctica.

Roque G. Carranza. *Sobre el significado de la ley débil de los grandes números desde el punto de vista de la inferencia estadística.*

La forma habitual de enunciar el teorema de Bernouilli conduce a confusiones, que desaparecen al considerarlo desde el punto de vista de la teoría de la inferencia estadística desarrollada modernamente, y para la que puede servir como un ejemplo que tiene la ventaja de su sencillez y de ser de fácil demostración.

Rolando Víctor García. *Fundamento semántico del concepto de número.*

El objeto de este trabajo consiste en una exposición del procedimiento por el cual es posible obtener los conceptos matemáticos (en particular el concepto de número) a partir de nociones puramente lógicas. Los puntos tratados son los siguientes:

1) *Importancia del problema*: Se señala la importancia de la fundamentación de la matemática a partir de nociones lógicas, ya que ella permite un tratamiento científico de problemas que habían sido con frecuencia objeto de especulación metafísica. Se indica la notable contribución de la escuela logística en este terreno.

2) *Ubicación del problema*: Se discute el problema de dónde encontrar una línea divisoria entre lógica y matemática. Se analiza la sugestión de W. V. O, Quine, según la cual la lógica se ocupa del cálculo proposicional y de la teoría de la cuantificación, mientras que la matemática comienza con el estudio de la relación «member-ship» (para Quine la posición loigcista se reduce al hecho de que toda la matemática se reduce a teoría de clases). Se precisa con nitidez cuál es el sistema semántico que involucra la posición mínima de Quine, y se plantea el problema de si el ámbito U' de objetos de la teoría de clases agrega algún contenido al universo de los «designata» de aquel sistema semántico.

3) *Clases y propiedades.* Se pasa revista a las distintas formas en que ha sido concebida la teoría de las clases. a) Russell y las clases como símbolos incompletos; b) Quine y las razones para

adoptar «clase» como concepto primitivo, y no «propiedad»; c) Carnap, y la teoría según la cual «clase» y «propiedad» no son sino aspectos semánticos distintos de entidades neutrales.

4) *Las paradojas.* Se estudia la influencia que tuvieron las paradojas lógicas en el estudio de la teoría de las clases. La clasificación de las paradojas en paradojas lógicas y paradojas semánticas. La teoría de los tipos de Russell. Los tipos ramificados. El axioma de reducibilidad y el axioma de extensionalidad. Inconvenientes de la teoría de los tipos, aún de la simple. La solución de Quine: abolir los tipos y restringir el empleo de «membership». Cómo maneja Quine la abstracción de clases y cómo evita las paradojas lógicas.

5) *La definición de número.* Se estudian los pasos necesarios para obtener una definición rigurosa de número natural en el sistema semántico mínimo del que se ha partido. Se definen los números cardinales y se demuestra que las definiciones son adecuadas. Se define luego el «número de miembros de una clase dada» y el «número cardinal» de manera general. Se definen las relaciones de sucesor y ancestral.

6) *El principio de inducción completa.* Se estudia con detalle la relación «ancestral» y se muestra con detalle cómo es posible utilizarla para una completa formalización del principio de inducción completa.

7) *El axioma del infinito.* Se analizan las presuposiciones semánticas involucradas por el axioma del infinito. Se plantean dos vías para solucionar la dificultad: a) Abolición de la teoría de los tipos —siguiendo a Quine— y demostrar como teorema al «axioma del infinito», siendo para ello estudiar las clases engendradas a partir de la clase nula; b) Adoptar —siguiendo a Carnap— un determinado lenguaje coordinado semejante al que sirve de base a este trabajo.

Nota: Definiciones adoptadas en el trabajo:

«0» $= DF$ «$(\lambda f) \sim (\exists x)\,(fx)$»

«1» $= DF$ «$(\lambda f)\,[(\exists x)\, fx \,.(z)\,(fz \equiv (z \equiv x))]$»

«2» $= DF$ «$(\lambda f)\,[(\exists x)\,(\exists y)\,\{\sim(x \equiv y).\ (z)\,(fz \equiv (z \equiv x)\ V\ (z \equiv y))\}\,]$»

«$Nn'f$» $= DF$ «$(\lambda g)\,[Is(g, f)]$» «$(Is(g, f)$» significa «g es isomorfo cont.)»

«$S'n$» $= df$ «$(\lambda f)\ E)y)\,[fy\,.(g)\,((g \equiv f \cap \overline{\iota y}) \supset n(g))]$

$$«{}^{*}R» = df \; «\hat{x}\,\hat{z}(g)\,[\,\{(R»\, g \subset g).(gz)\} \supset gx]$$

$$«{}^{*}S»\iota o = df \; «(\lambda n)\,\{\hat{n}\,\hat{o}(a)\,[((s»\, \alpha \subset \alpha).\; \alpha(o)) \supset \alpha(n)]\}$$

$$«Nn» = df \; «{}^{*}S''\iota o».$$

MATILDE C. DE MACAGNO. *El método de laboratorio en la enseñanza de la matemática.*

En relación con la dificultad que se presenta a la mayor parte de los alumnos secundarios, se informa en este trabajo, acerca del método de laboratorio para la enseñanza de la matemática, en el ciclo medio, en especial, en las escuelas técnicas industriales y comerciales.

Un breve comentario de los distintos métodos de enseñanza, en especial, el método heurístico, antecede al tema principal.

Se comenta la historia del método de laboratorio. Se hacen consideraciones generales sobre la aplicación e importancia del mismo y se encara su realización por medio de la creación de un laboratorio. Se da una lista de elementos que puede contener el mismo y, al final, se dan los enunciados de trabajos prácticos, como ejemplos de aplicación del método.

Moción: Se propone la formación de una comisión, dentro de la U. M. A. para que estudie el problema de la enseñanza de la Matemática en la escuela secundaria, que podría organizarse con el siguiente plan:

1) Formación del profesorado.
2) Métodos de enseñanza.
3) Programas. — Modificaciones, innovaciones y reestructuración de los mismos

PEDRO PI CALLEJA. Contribución a los temas programados: *Nombramiento de profesores de Matemática en la enseñanza media. Espíritu y orientación de la Matemática en el bachillerato.*

Trabajos de Fisiomatemática y Matemática aplicada.

KURT FRÄNZ, *Teoría de los servomecanismos lineales de alta precisión.*

La siguiente teoría se refiere a los servomecanismos lineales de alta precisión que sirven para el control de magnitudes continuas. Tratamos por ejemplo los dispositivos electromecánicos para la estabilización automática del rumbo de una nave o para mantener una antena directiva de recepción en la dirección de incidencia de las ondas emitidas por un avión.

Sea $x(t)$ el valor preciso de la magnitud controlada (por ejemplo el ángulo de incidencia) y $X(t)$ el valor indicado por el servomecanismo. En un servomecanismo lineal $X(t)$ satisface una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes. A la excitación $x(t)=e^{pt}$ corresponde la respuesta del mecanismo $X(t)=T(p)\,e^{pt}$. Esta magnitud, la llamada transferencia del sistema admite una sencilla determinación experimental y teórica. Para una excitación arbitraria $x(t)$ resulta

$$X(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} T(g\omega)\, f(g\omega)\, e^{g\omega t}\, d\omega$$

$$\text{con} \qquad f(g\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-g\omega t}\, dt.$$

En general es difícil evaluar tales integrales de Fourier; pero en el caso de un servomecanismo de alta precisión y de una variable continua $x(t)$ la convergencia numérica de la siguiente serie convergente o semiconvergente para el error del sistema es excelente.

$$\Delta(t)=X(t)-x(t)=\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{d^nT}{dp^n}\right)_{p=0}\frac{d^nx}{dT^n}.$$

La respuesta del sistema a las perturbaciones de carácter estadístico (al ruido de fondo del receptor o al fading de las ondas) es proporcional al ancho de banda del sistema

$$\Omega=\int_{-\infty}^{\infty}|T|^2\, d\omega$$

mientras el error sistemático Δ disminuye si el ancho de banda aumenta. Se determinan transferencias óptimas (funciones racionales de p) para las cuales se anulan las primeras n derivadas

$$\left(\frac{d^nT}{dp^n}\right)_{p=0}$$

y asume su valor mínimo la magnitud

$$\left(\frac{d^{n+1}T}{dp^{n+1}}\right)\Omega^{n+1} \longrightarrow \text{Mín.}$$

Posee transcendencia práctica sobre todo la transferencia óptima con $n=1$

$$T(p)=\frac{1+\frac{p}{\omega_0}}{1+\frac{p}{\omega_0}+\frac{p^2}{\omega_0{}^2}}$$

a la cual corresponde

$$\left(\frac{d^2T}{dp^2}\right)_{p=0}\left(\frac{\Omega}{\omega_0}\right)^2=-4\pi.$$

Eligimos el ancho de banda óptimo de manera que resulta un error sistemático Δ igual al error estadístico. Las transferencias «óptimas» con valores $n\geqq 2$ corresponden a circuitos poco amortiguados. Tal servomecanismo $(n\geqq 2)$ presentaría transitorios de gran amplitud y duración y de carácter oscilatorio, al iniciar su funcionamiento, mientras después que los transitorios iniciales estén amortiguados, el error $\Delta(t)$ resulta pequeño.

SERGIO SISPANOV. *Oscilaciones en el caso de resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad.*

Se considera el movimiento de un punto material bajo la influencia de una fuerza proporcional a la distancia, y teniendo en cuenta la resistencia del medio proporcional al cuadrado de la velocidad. Mediante una sustitución la ecuación diferencial del movimiento se reduce a la de Bernoulli y se integra por cuadraturas.

Se dan fórmulas exactas para los alejamientos sucesivos y un método gráifco para su rápida construcción. Las integrales que figuran en las expresiones para los períodos sucesivos conducen a las fórmulas aproximadas muy sencillas.

OSCAR A. VARSAVSKY. *Sobre los postulados de la mecánica cuántica.*

Se obtienen los postulados fundamentales de la Mecánica Cuántica agregando al formalismo clásico los siguientes dos principios:

1º) Variables canónicamente conjugadas toman sus valores en espacios topológicos duales.

2º) Existe para cada sistema físico una función de cuadrado sumable en el espacio de coordenadas cuyo módulo mide la densidda de probabilidad en dicho espacio. Su transformada de Fourier mide de la misma manera la densidad de probabilidad en el espacio de impulsos.