SOBRE LA NO-NUMERABILIDAD DEL CONTINUO

por PEDRO PI CALLEJA

El objeto de la presente nota es dar una demostración elemental de la no-numerabilidad del continuo, prescindiendo de expresiones particulares más o menos complicados de los números reales. Nos basaremos en el teorema (que puede tomarse como definición) según el cual toda sucesión creciente acotada de números tiene límite real. Obsérvese que la demostración que desarrollamos no puede aplicarse a los números racionales porque una sucesión creciente acotada de números racionales puede no tener límite *racional.*

Vamos, pues, a demostrar que el conjunto de números reales del intervalo cerrado $[a, b]$ no es numerable. Supongamos que los puntos de $[a, b]$ puedan ponerse en sucesión numerable x_n $(n=1, 2, 3, \ldots)$ lo que nos llevará a un absurdo. Dado $\varepsilon>0$ arbitrariamente pequeño, aunque basta tomarlo $0<\varepsilon<b-a$, hagamos corresponder a cada punto x_n el cubreintervalo abierto $i_n=\left(x_n-\dfrac{\varepsilon}{2^{n+1}}, x_n+\dfrac{\varepsilon}{2^{n+1}}\right)$ de longitud $|i_n|=\varepsilon/2^n$. Tendremos así una sucesión s de cubreintervalos distintos i_n tal que la suma de longitudes de cualquier número finito de ellos será menor que ε. Diremos que un cubreintervalo (a_0, b_0) cubre el punto x_0 si se cumple $a_0<x_0<b_0$. De la sucesión s tomemos el primer cubreintervalo $j_0=i_{n_0}$ que cubre $a=c_0$ y $c_1>c_0$ el extremo derecho de j_0. Volvamos a tomar en la sucesión s el primer cubreintervalo $j_1=i_{n_1}$ que cubre c_1 con extremo derecho $c_2>c_1>c_0$, siendo por tanto $j_1\neq j_0$. Sea nuevamente $j_2=i_{n_2}$ el primer cubreintervalo de la sucesión s que cubre c_2 con extremo derecho $c_3>c_2>c_1>c_0$, siendo por tanto $j_2\neq j_1, j_0$. Sigamos así sucesivamente. No podrá ser infinita la sucesión creciente acotada de puntos $c_r\leqq b$, es decir pertenecientes al intervalo $[a, b]$, pues en dicho caso tendría límite real $c\leqq b$ y al punto c, pertenecientes a $[a, b]$, correspondería un cubreintervalo i_m de s; entonces habría en i_m infinitos cubreintervalos distintos $j_r = i_{n_r}$ con n_r creciendo más allá de toda cota, en particular llegaría a ser $n_r > m$ en contra de la hipótesis que define j_r. Tendremos así un número finito de cubreintervalos distintos $j_0, j_1, j_2, \ldots, j_k$ de la sucesión s, tales que cada dos con-consecutivos tienen algún punto común, cubriendo j_0 al punto a y j_k al punto b. Por las leyes de monotonía de los números reales, será entonces $\sum_{r=0}^{k} |j_r| > b - a$. Esto contradice que la suma de longitudes de cualquier conjunto parcial de cubreintervalos i_n de la sucesión s es menor que $\varepsilon < b - a$, es decir $\sum_{r=0}^{k} |j_r| < \varepsilon < b - a$. Por tanto, hemos llegado a un absurdo suponiendo puedan ponerse en sucesión numerable los puntos reales del intervalo $[a, b]$ que es precisamente lo que nos proponíamos demostrar.

Nos hemos extendido minuciosamente en los detalles de la demostración anterior para evitar cualquier *elección arbitraria* y en ella queda involucrada la demostración del lema de Borel sobre cubrimientos numerables de conjuntos cerrados y acotados. Utilizando este lema, la demostración es muy corta y puede darse en la forma siguiente: Supongamos que el conjunto de puntos reales del intervalo cerrado $[a, b]$ fuese numerable, en cuyo caso, dado arbitrariamente ε tal que $0 < \varepsilon < b - a$, podríamos hacer corresponder a cada punto real x_n perteneciente a $[a, b]$ un intervalo i_n de longitud $|i_n| = \varepsilon/2^n$ que lo cubra. Por el lema de Borel bastaría entonces un número finito k de intervalos i_n para cubrir todo el conjunto $[a, b]$ y por la ley de monotonía de los números reales sería $\varepsilon > \sum_k |i_n| > b - a$, contra la hipótesis $\varepsilon < b - a$.

Esta es la demostración en realidad que está implícita en la consecuencia que suele sacarse de la teoría de la medida de Borel para afirmar que el conjunto de números reales del intervalo $[a, b]$ no puede ser numerable. A este respecto, conviene no caer en el error de suponer que basta definir la medida de un punto como nula, la de una suma de intervalos norampantes por la propiedad de aditividad infinita y la de un conjunto numerable como nula (por ser suma de las medidas de sus puntos), para creer que estas «convenciones» *demuestran* la no-numerabilidad del continuo, mientras no se haya probado la no-contradicción de la propiedad de aditividad infinita.

Desarrollada la teoría de la medida de Borel en forma constructiva, se observa que el lema fundamental de la misma está en que si un conjunto lineal acotado puede considerarse de dos maneras distintas como suma de una infinidad numerable a lo más de intervalos no-rampantes, la suma de las medidas de estos intervalos es la misma en los dos casos. Este lema fundamental se demuestra precisamente (v. g. Ch. de la Vallée Poussin: «Intégrales de Lebesgue, Fonctions d'Ensemble, Classes de Baire», Col. Borel, 2ª. ed., París 1934, pág. 17) mediante el lema de Borel sobre cubrimientos (v. g. E. Borel: «Leçons sur la Théorie des Fonctions», Col. Borel, 2ª. ed., París 1914, pág. 228; inicialmente expuesto en E. Borel: Annales sc. éc. normale (3), *12*, París 1895, pág. 51).

El Prof. Rey Pastor nos comunica esta otra sencilla demostración: Supongamos numerados los puntos de un segmento finito o infinito y designemos cada punto por su índice. Todos los interiores al intervalo $(0, 1)$ tienen índices superiores a los extremos 0 y 1; si es i el menor de ellos y j el menor de los índices dentro de $(1, i)$ todos los puntos interiores a (i, j) tienen índice superior a los extremos i, j. Prosiguiendo, se forma una sucesión decreciente de intervalos tal que los índices interiores de cada uno, superan a los extremos. Como hay al menos un punto interior a todos los intervalos, su índice debería superar a los infinitos índices extremos, absurdo que prueba la imposibilidad de la numerabilidad supuesta.

La Plata, octubre 1949.

Nota. — Otras demostraciones, igualmente inmediatas, expuestas en nuestros cursos elementales, pueden merecer quizás divulgación.

Tal vez preferible a la anterior es esta variante no esencial: sean a, a' los dos índices mínimos interiores a $(0, 1)$, sean b, b' los dos índices interiores al intervalo (a, a'); sean c, c' los dos índices mínimos interiores al (b, b'); ... el punto común a esta sucesión de intervalos encajados debería tener índice superior a todos estos extremos, imposible.

Si se prefiere evitar el principio del entero mínimo, basta bisecar el segmento $(0,1)$ y sea I_1 el segmento mitad que no contiene el 1; sea I_2 el segmento mitad que no contiene 2; sea I_3 la mitad que no contiene 3.... Como I_n sólo contiene índices superiores a n el punto común a todos los I_n debería tener índice infinitamente grande.

Otra demostración análoga dió Poincaré, por fraccionamiento en tres partes, a fin de eludir la libre elección, que también queda evitada en las arriba apuntadas. En efecto, si el punto medio de I_n fuese precisamente $n+1$, bastaría adoptar como I_{n+1} la primera mitad de la primera mitad.

J. R. P.

BIBLIOGRAFIA

Colloque de Géométrie Algébrique. Centre Belge de recherches mathématiques, 1950. Un volumen de 198 páginas.

Se trata de las conferencias y trabajos comunicados al Coloquio de Geometría Algebraica organizado por el Centro Belga de Investigación matemática que preside L. Godeaux y que fué celebrado en Lieja durante los días 19, 20 y 21 de diciembre de 1949.

Tras una introducción del profesor Godeaux, empieza el volumen con una conferencia de Severi, altamente interesante por su propósito: "Desde hace algunos años circula entre los matemáticos una leyenda que encuentra cierta credulidad en círculos felizmente restringidos: es la leyenda de que la geometría algebraica italiana, si bien ingeniosa y rica en resultados importantes, *no posee sin* embargo todo el rigor necesario. Examinemos los fundamentos que esta leyenda pueda tener, no tanto por lo que pueda resultar enojosa para ciertos geómetras, como por el perjuicio que podría causar al progreso de nuestra rama de la geometría, el hecho de continuar dejándola correr sin reacción". A continuación hace Severi la historia de varios capítulos de la geometría algebraica italiana, para probar que en ellos no falta un rigor "substancial", si bien reconoce que pueden existir "ciertas omisiones de demostraciones explícitas de propiedades bien seguras, que los geómetras del tiempo (con acertada visión del porvenir) pensaban poder construir o reconstruir en ocasión de futuras exposiciones metódicas de las teorias".

Contiene después el volumen los siguientes trabajos, cuyo índice puede servir para dar una idea de su contenido y también para valorar la importancia del Coloquio a través de la lista de geómetras que a él concurrieron:

Dubreil-Jacotin (M. L.) y Dubreil (P.), *Divers types d'anneaux intervenant en géométrie algébrique.*