

CONTRIBUCION A LA TEORIA DE LA FERRORESONANCIA

por A. SIRLIN y D. AMATI

Instituto de Física, Universidad de Buenos Aires

(Presentado en mayo 1953)

SUMMARY. CONTRIBUTION TO FERRORESONANCE THEORY

This paper considers the equilibrium and stability of the ferroresonant circuits (series and parallel), which obey non-linear differential equations of the form

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} + RI + (1/C) \int I dt = U_0 \sin \omega t.$$

The series circuit has been considered in the literature for small non-linearities. A similar limitation is generally used in those problems of Non-Linear Mechanics in which the time appears explicitly in the differential equation. Here, strong non-linearities are also considered, although the results are limited to points of the characteristic curve not too far from resonance.

To study the equilibrium of the series circuit, the basic idea is to try as a solution of the differential equation, a Fourier series in which the coefficients of the higher harmonics are assumed to be small in comparison with the coefficient of the fundamental oscillation. The validity of this solution is later discussed. With this method an expression for the characteristic curve is obtained, which also can be used to estimate the accuracy of the Zenneck and Schunk studies. These authors have not considered the higher harmonics of the current.

In addition, two methods are given to show that there are no subharmonics near resonance (the second method considers only the subharmonic 1/3).

Afterwards, a method is developed for considering the stability of the equilibrium solutions of Zenneck and Schunk, even for strong non-linearities. The basic idea of this method is to modify the equilibrium solutions by replacing the amplitude and phase constants of the current by slowly varying functions. With the ordinary methods of linearization, results are obtained which justify that solution exactly in the regions of the characteristic where the jumps take place. This stability method shows that the equilibrium solutions are unstable in

the falling region of the characteristic curve and stable elsewhere. Further, the possible advantages of this stability study in comparison with the ordinary method of the Hill's equation are discussed.

Finally, the parallel ferroresonant circuit is treated. With a similar accuracy to that of the Zenneck and Schunck method, an expression for the characteristic is obtained. The stability of the equilibrium solutions is discussed and they are shown to be unstable in the falling region of the characteristic and stable elsewhere.

In this manner, even for strong non-linearities, theoretical characteristics are obtained, which account for the jumps experimentally found in the ferroresonance phenomena.

I. Descripción de la ferroresonancia; problemas que se plantean

El circuito ferroresonante serie (fig. 1) es un circuito LCR serie cuya bobina posee un núcleo de hierro. Si este circuito es alimentado por una f.e.m. alternada $U = U_0 \sin \omega t$, la cur-

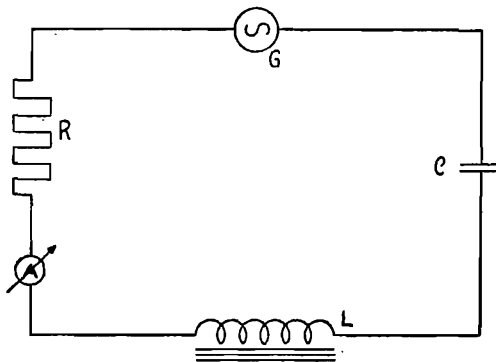


Fig. 1. — Circuito ferroresonante serie

va experimental obtenida es del tipo de fig. 2, donde se representa U_0 en ordenadas y en abscisas la intensidad eficaz de la corriente. Al aumentar U_0 a partir de $U_0=0$, la corriente aumenta de 0 a R , salta luego hasta N y sigue después creciendo hacia T .

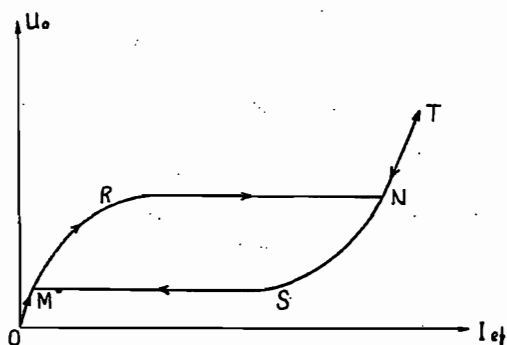


Fig. 2. - Curva característica experimental del circuito ferresonante serie.

Si ahora hacemos decrecer U_0 desde T , el punto representativo recorre el tramo TNS , saltando hasta M y decreciendo luego hasta 0.

Consideraremos ahora el circuito ferresonante paralelo constituido por las ramas I y II de fig. 3.

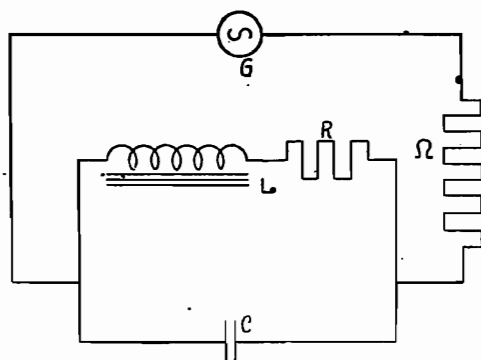


Fig. 3. - Circuito ferresonante paralelo

Si la resistencia exterior Ω es muy grande, de modo que la intensidad total de la corriente I sea prácticamente independiente del comportamiento del circuito LCR , podremos considerar que variando la f. e. m. imponemos I , y que ésta será sinusoidal de amplitud $I_0 \cong \frac{G_0}{\Omega}$ donde G_0 es la amplitud de la f. e. m. del generador.

La curva característica obtenida experimentalmente es del tipo de fig. 4, donde en abscisas se representa I_0 y en ordenadas las tensiones U entre los bornes de la bobina. En el caso en que Ω es pequeño impondremos al circuito U (en vez de la intensidad I), y la característica obtenida será del tipo de fig. 6, donde es adquirida la zona descendente.

La no-linealidad de las curvas de figs. 2 y 4, y los saltos que ellas presentan son debidos, como veremos, a la imantación del núcleo de la bobina.

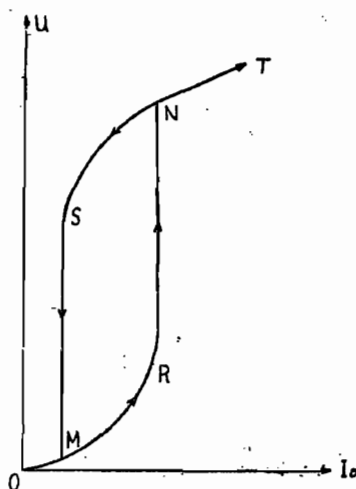


Fig. 4. - Curva característica experimental del circuito ferresonante paralelo (Q grande).

Al tratar teóricamente los fenómenos esbozados, nuestra tarea podrá dividirse en dos partes. La primera que llamaremos de régimen, consistirá en hallar las soluciones de las ecuaciones diferenciales que rigen los dos circuitos mencionados; estas soluciones nos darán curvas características de los tipos de figs. 5 y 6 para los circuitos ferresonantes en serie y paralelo respectivamente.

La segunda parte, que llamaremos de estabilidad, estudiará para cuales puntos de dichas curvas las soluciones de equilibrio son estables y para cuales otros son inestables; o sea daremos

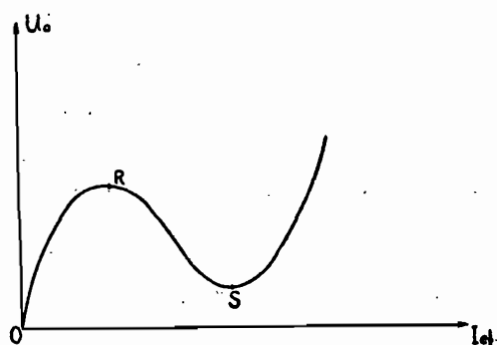


Fig. 5

un criterio para discernir cuales puntos pueden ser adquiridos experimentalmente y cuáles otros son imposibles de adquirir.

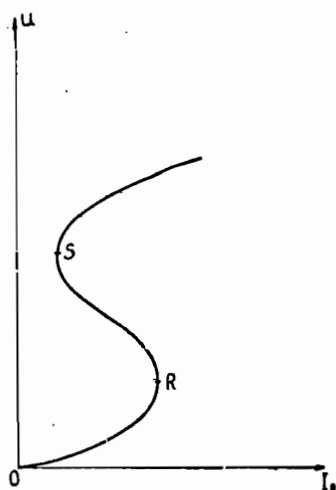


Fig. 6

Llegaremos, de esta manera, a explicar los saltos, fenómeno característico de la ferresonancia.

II. Trabajos de otros autores

Sobre estos problemas se han elaborado numerosos trabajos.

El de Zenneck y Schunck⁽¹⁾, sobre el cual nos detendremos

⁽¹⁾ ZENNECK y SCHUNCK, *Jahrbuch für Drahtlose Telegraphie*, 19, 1922.

más adelante, estudia el régimen del circuito ferresonante en serie cerca de la resonancia de la armónica fundamental.

Ellos no consideran, sin embargo, la influencia de las armónicas superiores, eventuales subarmónicas y no tratan la estabilidad.

Aparte del trabajo mencionado, estos problemas han sido en general abocados aceptando limitaciones que importan reducirse a pequeñas no-linealidades, vale decir a intensidades muy pequeñas respecto de la intensidad que produce saturación de la bobina.

Para relacionar el flujo magnético Φ con la corriente I , se han empleado en general expresiones potenciales del tipo $I = a\Phi - b\Phi^3$ en que a y b son constantes determinables empíricamente⁽²⁾. Con el objeto de poder aplicar los métodos analíticos de la mecánica cuasi-lineal (desarrollados especialmente por Poincaré, Kryloff y Bogoliuboff y Van der Pool)⁽³⁾, en dichos trabajos se supone pequeño el coeficiente b . De esta manera se introduce la no-linealidad como un pequeño factor correctivo, lo que naturalmente no puede ser cierto cerca de la saturación.

Nos abocaremos al estudio de estos problemas aún para fuertes no-linealidades; en compensación, nos deberemos limitar a la zona de resonancia de la armónica fundamental. En ella sin embargo, tienen lugar los interesantes fenómenos de salto.

III. Régimen del circuito ferresonante en serie

a) Introducción.

Para hallar la curva característica utilizaremos una fórmula empírica para la curva de imantación del hierro, dada por Dreyfus⁽⁴⁾ según la cual en forma simplificada

$$(1) \quad B = H + 8 M_{\infty} \operatorname{arc} \operatorname{tg} H/H^*$$

donde M_{∞} es la imantación de saturación y H^* otra constante característica del material ferromagnético que mide la dureza del mismo.

⁽²⁾ Ver por ejemplo CUNNINGHAM, *Amer. Journal of Phys.* 16/382/1948; KELLER, *Mathematics of Modern Engineering*, vol. 2, pág. 274; STOKER, *Non Linear Vibrations*, 1950, cap. IV.

⁽³⁾ Una recopilación de trabajos de KRYLOFF y BOGOLIUBOFF, se halla en: *Introduction to Non Linear Mechanics*, Princeton, 1947.

⁽⁴⁾ DREYFUS, *Archiv für Elektrotechnik*, 2, 1913, 343.

En virtud del alto valor de M_{∞} para valores no demasiado grandes de H podemos simplificar (1) poniendo

$$(2) \quad B = 8 M_{\infty} \operatorname{arc} \operatorname{tg} H/H^*$$

Siendo $I = I(t)$ la intensidad de la corriente en el circuito, definiremos

$$L_0 = \left(\frac{d\Phi}{dI} \right)_{I=0} \quad \text{y} \quad (3) \quad \psi(I) = \frac{1}{L_0} \frac{d\Phi}{dI}$$

donde Φ es el flujo de inducción. L_0 representa la self-inducción de la bobina para corrientes muy débiles.

Derivando (2) se obtiene

$$(4) \quad \psi(I) = \frac{1}{1 + (I/I^*)^2} \quad \text{donde} \quad (5) \quad I^* = \frac{H^* l}{4\pi N}$$

siendo l la longitud media del núcleo de la bobina y N el número total de espiras.

La ecuación general que rige el fenómeno es

$$(6) \quad \frac{d\Phi}{dt} + RI + \frac{1}{C} \int I dt = U_0 \sin \omega t.$$

Dividiendo (6) por $L_0 \omega$, definiendo $\delta = \frac{R}{L_0 \omega}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{L_0 C}$ e introduciendo la variable adimensional $\tau = \omega t$, tendremos

$$\psi(I) \frac{dI}{d\tau} + \delta I + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \int I d\tau = \frac{U_0}{L_0 \omega} \sin \tau.$$

Introduciendo la constante I^* dada por (5) (o cualquier otra constante con las dimensiones de una intensidad), definiendo

$$y = I/I^* \quad \text{y} \quad V_0 = \frac{U_0}{L_0 \omega I^*}$$

podremos escribir nuestra ecuación en la forma adimensional

$$(7) \quad \psi(y) \dot{y} + \delta y + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \int y d\tau = V_0 \sin \tau.$$

En el caso de la función de Dreyfus, utilizando (4) se obtiene

$$(8) \quad \frac{\dot{y}}{1+y^2} + \delta y + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \int y d\tau = V_0 \sin \tau.$$

Zenneck y Schunck (op. cit.) integraron (8) ensayando

$$(9) \quad y = \sum C_v \cos v \tau + S_v \sin v \tau$$

donde C_v y S_v son constantes. Estos autores supusieron luego que cerca de la resonancia de la oscilación fundamental, zona de particular interés, es posible limitarse al primer término de (9), teniendo con ello

$$(10) \quad y = C_1 \cos \tau + S_1 \sin \tau = c_1 \cos(\tau + \vartheta) = c_1 \cos \varphi; \quad \varphi = \tau + \vartheta.$$

Reemplazando (10) en (8) se obtiene

$$-\frac{c_1 \sin \varphi}{1+c_1^2 \cos^2 \varphi} + \delta c_1 \cos \varphi + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} c_1 \sin \varphi = V_0 \sin(\varphi - \vartheta).$$

El sentido de la aproximación de Zenneck y Schunck es que cerca de la resonancia puede reemplazarse el primer término del primer miembro de (11) por la armónica fundamental de su desarrollo en serie de Fourier. Vale decir que siendo

$$(12) \quad q_1(c_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \varphi}{1+c_1^2 \cos^2 \varphi} d\varphi = \frac{2}{c_1^2} [\sqrt{1+c_1^2} - 1]$$

reemplazaremos la (11) por

$$c_1 [-q_1 \sin \varphi + \delta \cos \varphi + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sin \varphi] = V_0 \sin(\varphi - \vartheta)$$

o, separando los coeficientes de $\sin \varphi$ y $\cos \varphi$

$$(13) \quad \begin{cases} c_1 \left(-q_1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) = V_0 \cos \vartheta \\ c_1 \delta = -V_0 \sin \vartheta \end{cases}$$

resultando

$$(14) \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{\delta}{q_1(c_1) - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}; \quad (15) \quad |c_1| \sqrt{\left(q_1(c_1) - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \delta^2} = V_0.$$

La función $q_1(c_1)$ dada por (11) es del tipo de fig. 7, y la curva característica que representa (15) es efectivamente del tipo de fig. 5⁽⁵⁾.

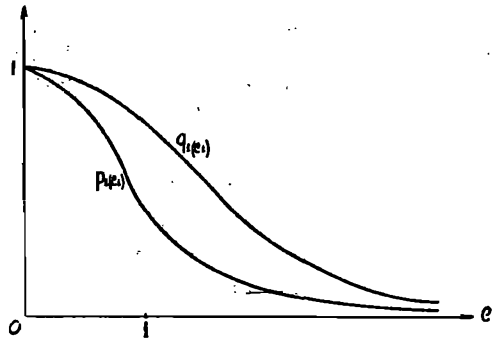


Fig. 7

Zenneck Schunck realizaron además experiencias (para valores de $\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ cercanos a la unidad, p. ej. $\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 0,9$) que concordaban con los resultados obtenidos, con excepción de la parte descendente de la curva sobre la cual solamente decían que no era realizable.

b) *Discusión de la curva característica de Zenneck y Schunck.*

Estudiaremos algunas propiedades de la curva característica $V_0 = V_0(c_1)$ dada por (15). Definiendo

$$(16) \quad p_1(c_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 \varphi \, d\varphi}{1 + c_1^2 \cos^2 \varphi} = \frac{2}{c_1^2} \left[1 - \frac{1}{\sqrt{1 + c_1^2}} \right] \quad (\text{Ver fig. 7})$$

(⁵) q_1 figura en la tercera columna de tablas II y III.

y teniendo en cuenta que p_1 y q_1 (definido por (12)) están ligados por

$$(17) \quad p_1 = q_1 + c_1 \frac{dq_1}{dc_1}$$

es fácil demostrar derivando (15) que

$$(18) \quad \frac{dV_0}{dc_1} = \frac{\left(q_1 - \frac{\omega_1^2}{\omega^2}\right) \left(p_1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) + \delta^2}{\sqrt{\left(q_1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \delta^2}}$$

La fórmula (18) nos muestra que para pequeños valores de δ la curva característica posee dos valores extremales, que para $\delta \rightarrow 0$ están dados por $q_1(c_1) = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ (mínimo) y $p_1(c_1) = \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ (máximo). Para $\delta = 0$ el mínimo de la curva degenera en un vértice sobre el eje de las abscisas.

Puede demostrarse, además, que es condición necesaria para que exista parte descendente de la curva característica que $\delta^2 < 0,0294$ y lo que es mucho más evidente $\frac{\omega_0^2}{\omega^2} < 1$. Como nos interesa especialmente la parte descendente de la curva, la acotación de δ nos permitirá en general suponer δ muy pequeño, lo que equivale a una resonancia pronunciada.

Los resultados (14) y (15) y la fórmula (18) pueden ser inmediatamente extendidos para funciones $\psi(x)$ distintas a la de Dreyfus. En efecto, ensayando (10) en (7) se obtienen nuevamente (14) y (15) si se define

$$(19) \quad q_1(c_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(c_1 \cos \varphi) \sin^2 \varphi \, d\varphi$$

obteniéndose también (18) si

$$(20) \quad p_1(c_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(c_1 \cos \varphi) \cos^2 \varphi \, d\varphi$$

por subsistir entre p_1 y q_1 definidos por (19) y (20) la igualdad (17).

Para tener una idea del grado de no-linealidad del problema, estudiaremos Φ/Φ_∞ , donde Φ es el flujo de la imantación y Φ_∞ dicho flujo en la saturación. De (2) resulta

$$\Phi/\Phi_\infty = \frac{2}{\pi} \arctg y$$

función representada en tabla I; esta relación puede darnos un criterio del grado de no-linealidad en función de y .

Trataremos en el resto del trabajo de obtener soluciones aún válidas para fuertes no-linealidades; por ejemplo para intensidades que corresponden a un valor de Φ/Φ_∞ de hasta 0,8 aproximadamente ⁽⁶⁾.

TABLA I

y	Φ/Φ_∞
0	0,000
0,5	0,294
0,75	0,409
1	0,500
2	0,706
3	0,794
5	0,874
∞	1,000

c) *Influencia de las armónicas superiores.*

Queremos ahora hallar la solución (de régimen) de la ecuación diferencial (8), sin restringirnos a la armónica fundamen-

⁽⁶⁾ De este modo, convendremos en decir que un resultado es válido aún para grandes no linealidades, si llega a valer para intensidades correspondientes a valores de $\frac{\Phi}{\Phi_\infty}$ hasta 0,8 aproximadamente.

tal solamente. Esta solución nos dará además una pauta de la validez de los resultados de Zenneck y Schunck dados por (10), (14) y (15).

Consideraremos el ensayo (9) tomando en cuenta un número N , finito aunque arbitrariamente grande, de armónicas. Eligiremos además una constante de fase ϑ conveniente, de modo tal que siendo $\varphi = \tau + \vartheta$ pueda eliminarse del ensayo el término en $\sin \varphi$. Tendremos entonces

$$(21) \quad y = c_0 + c_1 \cos \varphi + \sum_2^N (c_v \cos v \varphi + s_v \sin v \varphi).$$

En lugar de suponer nulos los coeficientes de las armónicas superiores (como hicieron Zenneck y Schunck), supondremos ahora que ellos son pequeños; por ejemplo diremos que $\frac{c_i}{c_1}$ y $\frac{s_i}{c_1}$ ($i \neq 1$) son de cuadrado despreciable frente a la unidad. Procedemos luego con cálculo aproximado, vale decir que se harán en el cálculo los desprecios susodichos, obteniéndose como resultados expresiones del tipo

$$(22) \quad c_1 = c_1 \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \delta, V_0 \right), \quad (23) \quad \frac{c_i}{c_1} = \frac{c_i}{c_1} \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \delta, c_1 \right)$$

$$\text{y } (24) \quad \frac{s_i}{c_1} = \frac{s_i}{c_1} \left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \delta, c_1 \right) (i \neq 1).$$

Si estos resultados comprueban la suposición de pequeñez hecha diremos que habremos obtenido la solución buscada en (21) donde los coeficientes c_v y s_v estarán dados por (22), (23) y (24) (7).

Como veremos, para valores arbitrarios, fijos, de $\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ y δ los resultados dados por (23) y (24) verificarán la condición de pequeñez supuesta, para un determinado ámbito de valores de

(7) Reemplazando (22) en (23) y (24) se obtendrían las expresiones de c_i y s_i en función de los parámetros $\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$, δ y V_0 .

c_1 . Llamaremos a este ámbito, zona de preponderancia de la armónica fundamental.

Es de notar que si el amperímetro de fig. 5 mide el valor eficaz de la corriente, en dicha zona de preponderancia se cumplirá que

$$(25) \quad I_f = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I^2 dt} = |c_1| \quad (T \text{ período})$$

luego la curva característica estará dada por $U_0 = U_0(c_1)$.

Ante todo no es difícil demostrar que $c_0 = 0$.

De (8) además, es fácil ver que para $\delta = 0$ se cumple $\vartheta = s_v = 0$ para todo v , de modo que en tal caso (21) se vería reducido a

$$(26) \quad y = \sum_1^N c_v \cos v \tau.$$

Para simplificar haremos $\delta = 0$; el método de resolución para $\delta \neq 0$ es análogo.

Multiplicando (8) por $1 + y^2$ obtendremos

$$(27) \quad \dot{y} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \int y d\tau + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} y^2 \int y d\tau = V_0 \sin \tau + V_0 y^2 \sin \tau.$$

De (26) puede obtenerse

$$y^2 \int y d\tau = \frac{c_1^2}{4} \left\{ \sum_1^N 2 \frac{c_v}{v} \sin v \tau + \sum_2^N \frac{c_v}{v} [(2v-1) \sin(v-2) \tau + (2v+1) \sin(v+2) \tau] + c_1 (\sin 3\tau - \sin \tau) \right\}$$

$$y^2 \sin \tau = \frac{c_1^2}{4} (\sin \tau + \sin 3\tau) + \frac{c_1}{2} \sum_2^N \frac{c_v}{v} [\sin(v+2) \tau - \sin(v-2) \tau].$$

Reemplazando en (27) y separando los coeficientes de $\sin v \tau$ se obtiene:

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{sen } \tau \rightarrow -c_1 \left[1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{c_1^2}{4} \right) \right] - c_3 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{5}{12} c_1^2 = \\ \hspace{15em} = V_0 \left(1 + \frac{c_1^2}{4} - \frac{c_1 c_3}{2} \right) \\ \text{sen } 2\tau \rightarrow -c_2 \left[2 - \frac{1}{2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{c_1^2}{2} \right) \right] - \frac{7}{16} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} c_1^2 c_4 = \\ \hspace{15em} = -V_0 \frac{c_1 c_4}{2} \\ \text{sen } 3\tau \rightarrow \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{c_1^3}{4} - c_3 \left[3 - \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{c_1^2}{2} \right) \right] - \frac{9}{20} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} c_1^2 c_5 = \\ \hspace{15em} = V_0 \frac{c_1}{2} \left(\frac{c_1}{2} - c_5 \right) \\ \text{sen } i\tau \rightarrow \frac{2i-3}{i-2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{c_1^2}{4} c_{i-2} - c_i \left[i - \frac{1}{i} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \left(1 + \frac{c_1^2}{2} \right) \right] - \\ i > 3 \quad - \frac{2i+3}{i+2} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{c_1^3}{4} c_{i+2} = V_0 \frac{c_1}{2} (c_{i-2} - c_{i+2}). \end{array} \right.$$

Por lo pronto vemos que las ecuaciones provenientes de senos pares de τ nos determinan un sistema lineal y homogéneo en c_2, c_4 , etc., luego en general se tendrá

$$(29) \quad c_{2v} = 0$$

para cualquier valor de v ⁽⁸⁾.

Queda entonces un sistema inhomogéneo, no-lineal en c_1 , que ofrece la particularidad de presentar sólo tres incógnitas por ecuación, además de c_1 que figura en todas. Esta particularidad nos permitirá utilizar un sencillo método de iteración.

Si llamamos $x = c_1^2/4$ la primera ecuación de (28) nos da

$$(30) \quad -V_0 = \frac{c_1 \left[1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} (1+x) + c_1 c_3 \frac{5}{12} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right]}{1+x - \frac{c_1 c_3}{2}}$$

⁽⁸⁾ Este resultado también es obtenido para $\delta \neq 0$, obteniéndose además $S_{2v} = 0$.

Desarrollando el denominador en serie de Taylor y no considerando los cuadrados y potencias superiores de c_3 , puede escribirse

$$(31) \quad c_1 = \frac{-V_0}{\left(Q - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)}$$

donde

$$(32) \quad Q = \frac{1}{1 + x - \frac{c_1 c_3}{2} \left(1 - \frac{1}{6} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} (1 + x)\right)}$$

(31) tiene así, la forma de (15) para $\delta = 0$.

Definiremos punto de resonancia como el mínimo de la curva $V_0 = V_0(|c_1|)$ (fig. 5); en este caso por ser $\delta = 0$ es el punto para el cual $V_0 = 0$ siendo $c_1 \neq 0$.

La primera ecuación de (28) nos dice que $V_0 = 0$ si

$$1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} (1 + x) - c_1 c_3 \frac{5}{12} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 0$$

o sea, la condición de resonancia es

$$(33) \quad \frac{\omega_0^2}{\omega^2} = \frac{1}{1 + x - \frac{5}{12} c_1 c_3}$$

Trataremos ahora de hallar c_3 en función de $\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ y c_1 . Haciendo $c_5 = 0$ en la tercera ecuación de (28) (procedimiento que puede justificarse), y restando esa ecuación previamente multiplicada por $1 + x - \frac{c_1 c_3}{2}$ a la primera de (28) multiplicada por x , se llega a obtener

$$(34) \quad \frac{c_3}{c_1} = \frac{x}{k_3(1+x) + \frac{\omega_0^2 x^2}{\omega^2 3}} = \frac{x}{3(1+x) - \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} (1+3x+x^2)}$$

donde

$$(35) \quad k_3 = 3 - \frac{1}{3} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} (1 + 2x).$$

Reemplazando (34) en (32) resulta

$$(36) \quad Q\left(\frac{\omega_0^2}{\omega^2}, c_1\right) = \frac{3(1+x) - \frac{1}{8} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} (1+3x+x^2)}{3+6x+x^2 - \frac{1}{8} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} (1+4x+3x^2)}$$

Este resultado combinado con (31) nos da la función $V_d = V_0\left(c_1, \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$ que representa la curva característica. Para comparar este resultado con el de Zenneck y Schunck, representamos en las tablas II y III los valores de Q dados por (36) para dos valores distintos de $\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$, y los correspondientes valores de q dados por (12).

TABLA II $\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 0,81$

c_1	q	Q	Δy en %
0	1	1	0
0,2	1,000	0,999	0,1
0,5	0,944	0,943	0,11
0,8	0,876	0,872	0,46
1,0	0,830	0,822	0,97
1,2	0,778	0,770	1,04
1,5	0,714	0,696	2,95
2	0,618	0,593	4,22
3	0,480	0,434	10,6

TABLA III $\frac{\omega_0^2}{\omega^2} = 0,5$

c_1	q	Q	Δy en %
0	1	1	0
1	0,830	0,822	0,97
2	0,618	0,596	3,69
2,5	0,541	0,512	5,67
3	0,480	0,427	12,2

En las últimas columnas tabulamos el error porcentual Δy con el cual la curva característica de Zenneck y Schunck apro-

xima a la obtenida en este estudio para los dos valores mencionados de $\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$.

Este error en general aumenta al aumentar c_1 , vale decir al crecer el grado de no-linealidad del problema, y además al alejarse de 1 el valor de $\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$.

Hallaremos el valor de c_3/c_1 en el punto de resonancia, reemplazando en (34) el valor de $\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ dado por (33) se obtiene

$$(37) \quad \left(\frac{c_3}{c_1}\right)_{res} = \frac{x}{3(1+x) + \frac{4x^2-3x-1}{3(1+x)}}$$

representada, en función de c_1 , en tabla IV. Esta tabla nos enseña que la amplitud c_3 no puede despreciarse, ni siquiera en la resonancia, frente a c_1 . Hay que considerar, sin embargo, que para calcular la característica, es decir la intensidad eficaz de la corriente (véase la (25)), no intervienen explícitamente c_3, c_5 , sino únicamente en forma implícita ya que c_1 depende de ellos gracias al sistema (28).

TABLA IV

c_1	x	$(c_3/c_1)_{res}$
0	0	0
0,63	0,1	0,093
1,15	0,33	0,104
1,4	0,5	0,12
2	1	0,166
2,82	2	0,190
3,46	3	0,213

Nuestra suposición que $(c_3/c_1)^2$ es despreciable frente a 1, vale para el punto de resonancia hasta $c_{1res}=2,82$, lo que corresponde a un grado de saturación del flujo $\Phi/\Phi_\infty=0,78$ apro-

ximadamente, si despreciamos $(0,19)^2 = 0,036$ frente a la unidad. Consideraciones análogas sobre la pequeñez de $(c_3/c_1)^2$, pueden hacerse para valores de c_1 comprendidos entre $c_1 = 0$ y $c_1 = c_{1\text{res}}$; fuera de esa zona la aproximación es peor.

Con el mismo error puede en general demostrarse que $\left(\frac{c_5}{c_3}\right)^2$ y $\left(\frac{c_{n+2}}{c_n}\right)^2$ ($n=5,7,\dots$) son despreciables frente a 1, a partir de

$$(38) \quad \frac{c_5}{c_3} = \frac{\frac{x}{6} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + k_3 \frac{c_3}{c_1}}{\frac{k_5}{5} + x \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{8}{15} \frac{c_3}{c_1}}$$

$$\text{y } (39) \quad \frac{c_{n+2}}{c_n} = \frac{\frac{c_n}{c_{n-2}} k_n - x \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{2}{n(n-2)}}{k_{n+2} + \frac{c_n}{c_{n-2}} x \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{2(n+1)}{n(n+2)}}, \quad n=5,7,\dots$$

siendo

$$(40) \quad k_v = v - \frac{1}{v} \frac{\omega_0^2}{\omega^2} (1 + 2x).$$

Mientras los métodos de la Mecánica cuasi-lineal limitan la no-linealidad del problema, el procedimiento aquí desarrollado permite obtener soluciones sin grandes restricciones al grado de no-linealidad, debiendo limitarse, por otro lado, a aquellas soluciones (intensidades) en las cuales prevalece la armónica fundamental.

d) Habría sido posible hacer un estudio análogo al anterior, ensayando (21) en la ecuación diferencial (8), vale decir no multiplicando la ecuación diferencial por $1 + \gamma^2$.

Haciendo la misma suposición de pequeñez de $\frac{c_v}{c_1}$ y $\frac{s_v}{c_1}$ ($v \neq -1$) y desarrollando en serie de Fourier los distintos términos de la ecuación, se obtiene en lugar de (28) un sistema que presenta todas las incógnitas en cada ecuación. Para resolver este sistema es inaplicable el método de iteración anteriormente utilizado; por otro lado el método crameriano presenta determinantes difíciles de interpretar. Estos determinantes fueron evaluados, y con ello obtenido resultados para c_1 , c_v y s_v , limitando la no linealidad del problema, hecho que hace perder mucho interés a este es-

tudio. Estos resultados fueron también obtenidos para funciones $\psi(y)$ relativamente generales, lo que permite la consideración de otras fórmulas que la (2) para la curva de imantación del hierro ⁽⁹⁾.

d) *Subarmónicas.*

Podría surgir la duda que el ensayo (21) no fuera acertado por ignorar posibles subarmónicas del tipo $\cos \tau/n$. Tal resonancia subarmónica aparece en algunos fenómenos y ha sido estudiada especialmente en problemas de radiotécnica. Ensayar (21) significa suponer que la solución es periódica con el mismo período que la f. e. m. Consideraremos, ahora, en cambio,

$$(41) \quad y = \sum_{v=1}^N \left[c_{v/m} \cos \frac{v\varphi}{m} + s_{v/m} \sin \frac{v\varphi}{m} \right]$$

donde m es un entero arbitrario fijo. Si reemplazamos esta expresión en (26) y procedemos de manera análoga a la de sección c), vale decir despreciando los cuadrados y potencias superiores de $c_{v/m}$ y $s_{v/m}$ para $v \neq m$, obtenemos un sistema de ecuaciones algebraicas que puede subdividirse en otros dos. Uno de ellos es homogéneo en $c_{v/m}$ para v/m distinto de un entero cualquiera. El segundo sistema se reduce exactamente a (27).

Luego este procedimiento, generalización natural del método desarrollando en c), demostraría la inexistencia de subarmónicas en nuestro problema, dando para las armónicas superiores los mismos resultados que c).

e) *Estudio de la subarmónica 1/3.*

Desarrollaremos, ahora, un método más cuidadoso que nos mostrará la existencia de la subarmónica 1/3 en el régimen. Sin embargo, para la existencia de dicha subarmónica, deduciremos una condición que limita los valores de la frecuencia de la f. e. m., y que no es cumplida cerca de la resonancia de la armónica fundamental. En dicha zona, por tanto, este procedi-

(9) Este estudio se halla en AMATI, *Tesis*, § 6 (Buenos Aires, 1952).

miento mostrará que no existe subarmónica $1/3$, de acuerdo con el método anterior.

Consideremos, primeramente, el caso de pequeñas no-linealidades. Tenemos, entonces:

$$(42) \quad \frac{\dot{y}}{1+y^2} \sim \dot{y}(1-y^2)$$

pudiendo nuestra ecuación (8) escribirse en la forma:

$$(43) \quad \dot{y}(1-y^2) + \delta y + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \int y d\tau = V_0 \cos \tau.$$

Ensayaremos:

$$(44) \quad y = b \sin \varphi/3 + A_1 \cos \varphi + B_1 \sin \varphi; \quad \varphi = \tau + \vartheta$$

donde se ha elegido ϑ en forma tal que en (44) no figure $\cos \varphi/3$.

Hallaremos ahora qué condición debe cumplir la frecuencia de la f. e. m. para que b sea un número real distinto de 0. Reemplazando (44) en (43), sin hacer desprecios y anulando los coeficientes de $\cos \varphi/3$ y $\sin \varphi/3$, obtenemos previa división por $b \neq 0$:

$$(45) \quad b^2 - b B_1 + \left[2(A_1^2 + B_1^2) + 36 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 4 \right] = 0$$

$$(46) \quad \delta - \frac{A_1 b}{12} = 0.$$

De (45) deducimos:

$$(47) \quad b = \frac{B_1}{2} \pm \sqrt{\frac{B_1^2}{4} - 2(A_1^2 + B_1^2) - 36 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} + 4}.$$

Para que b resulte real es necesario que el radicando de (46) sea no negativo, de donde se deduce:

$$(48) \quad \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \leq \frac{1}{9} (1 - 7/16 B_1^2 - A_1^2/2) \leq \frac{1}{9} (1 - 7/16 (B_1^2 + A_1^2)) = \\ 1/9 (1 - 7/16 c_1^2)$$

donde

$$(49) \quad c_1^2 = A_1^2 + B_1^2.$$

Por lo pronto se ve, en (47), este resultado: para que exista la subarmónica $1/3$ la frecuencia $\omega/2\pi$ de la f. e. m. debe ser mayor que tres veces la frecuencia propia del circuito lineal sin resistencia, es decir $\omega_0/2\pi$ ⁽¹⁰⁾. Para no-linealidades pequeñas la resonancia está caracterizada por $\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sim 1$. Por tanto, en dicho caso, la condición (47) es incompatible y no puede haber subarmónica $1/3$ cerca de la resonancia de la armónica fundamental.

Veamos, ahora, si puede existir subarmónica $1/3$ en el punto de resonancia, aun cuando dicho punto corresponda a grandes no-linealidades ⁽¹¹⁾. Para simplificar el cálculo nos limitamos al caso $\delta=0$ y al punto de resonancia (caracterizado por la condición (33)). En tal caso $V_0=0$ y nuestra ecuación puede escribirse:

$$(50) \quad \dot{y} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} (1 + y^2) \int y d\tau = 0$$

Ensayamos en (50):

$$(51) \quad y = a \cos \tau/3 + c_1 \cos \tau + c_3 \cos 3\tau.$$

Anulando el coeficiente de $\sin \tau/3$, reemplazando $\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$ por la condición de resonancia (33), deducimos en forma análoga a la descrita anteriormente la siguiente condición de existencia de la subarmónica $1/3$:

$$(52) \quad \frac{1}{1 + c_1^2/4 - 5/12 c_1 c_3} \leq \frac{1}{9 \left[1 + \frac{47}{144} c_1^2 + \frac{c_3^2}{2} \right]}$$

Siendo $c_1 c_3$ un número positivo (ver (34)), la condición (52) no se cumple. Luego, cerca del punto de resonancia, aún para grandes no-linealidades, no existe subarmónica $1/3$.

IV) *Estabilidad de las oscilaciones del circuito ferroresonante en serie.*

a) *Método de estabilidad para la zona de resonancia*

Sea P un punto cualquiera de la característica teórica (fig.

⁽¹⁰⁾ Un resultado análogo es ya conocido en el estudio de una ecuación no lineal diferente. (Ecuación de Duffing). Véase STOKES, *op. cit.*, 106.

⁽¹¹⁾ Véase nota (6).

5), de coordenadas $(u_0)_p$ y $(c)_p$. De acuerdo con Zenneck y Schunck (y con los estudios realizados en la sección III c), cerca de la resonancia de la arcónica fundamental y aún para no-linealidades grandes ⁽¹²⁾, el equilibrio de régimen queda convenientemente explicado mediante el ensayo:

$$(53) \quad y = c \cos(\tau + \vartheta) = c \cos \varphi$$

en que c y ϑ son constantes que representan, respectivamente, la amplitud de la corriente dividida por I^* (ver (5)), y la constante de fase.

Supongamos, ahora, que variamos levemente las condiciones iniciales de nuestro problema, lo que equivale a suponer aplicada una perturbación —impulso de la f.e.m., de modo que tendremos como solución de nuestra ecuación

$$(54) \quad \psi_{(y)} \dot{y} + \delta \cdot y + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \int y d\tau = V_0 \sin \tau$$

una expresión $Y_{(\tau)}$, en general, diferente de (53).

Si, para el punto de coordenadas $(u_0)_p$ y $(c)_p$, la diferencia entre $Y_{(\tau)}$ e $y_{(\tau)}$ permanece acotada para todos los tiempos positivos diremos que, en ese punto, nuestra solución de equilibrio (53) es estable. Si, por lo contrario, dicha diferencia crece indefinidamente, en ese punto, nuestra solución (53) será inestable.

Una vez variadas las condiciones iniciales de nuestro problema, la amplitud y la constante de fase de la intensidad quedarán perturbadas lo que nos sugiere como solución variacional de (54), el ensayo:

$$(55) \quad Y = C_{(\tau)} \cos(\tau + \Theta_{(\tau)}) = C_{(\tau)} \cos \phi; \quad \phi = \tau + \Theta_{(\tau)}$$

en que $C_{(\tau)}$ y $\Theta_{(\tau)}$, así como sus derivadas, son funciones muy lentamente variables en un período. Ellas reemplazan, respectivamente, a las constantes c y ϑ que figuran en la solución de equilibrio (53). Naturalmente, el ensayo (55) deberá justificarse por los resultados.

Derivando (54) obtenemos:

$$(54') \quad \psi_{(y)} \ddot{Y} + \psi' \dot{Y}^2 + \delta \cdot \dot{Y} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} Y = V_0 \cos \tau \quad \text{donde} \quad \psi' = \frac{d\psi}{dY}.$$

⁽¹²⁾ Véase nota (6).

De (55) se desprende:

$$\dot{Y} = -C \sin \phi + \dot{C} \cos \phi - C \dot{\Theta} \sin \phi.$$

Como tenemos dos incógnitas (C y Θ) y una sola ecuación a satisfacer (la (54)), podemos imponer una condición arbitraria. Ella será que:

$$(56) \quad \dot{C} \cos \phi - C \dot{\Theta} \sin \phi = 0$$

de modo que

$$(57) \quad \dot{Y}_{(\tau)} = -C \sin \phi.$$

El objeto de este artificio es obtener ecuaciones variacionales del primer orden.

Si en (54') consideramos (55) y (57), obtendremos una nueva ecuación diferencial para C y Θ , que agregada a la (56), nos da el sistema buscado de ecuaciones variacionales.

$$(58) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{I) } H_1(C, \Theta, \dot{C}, \dot{\Theta}) = \psi [C \cos \phi + \dot{C} \sin \phi + C \dot{\Theta} \cos \phi] - \\ \quad - \psi' C^2 \sin^2 \phi + \delta C \sin \phi - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} C \cos \phi + V_0 \cos \tau = 0 \\ \text{II) } H_2(C, \Theta, \dot{C}, \dot{\Theta}) = \psi \dot{C} \cos \phi - \psi C \dot{\Theta} \sin \phi = 0. \end{array} \right.$$

Si en (58) hacemos $C=c$; $\Theta=\vartheta$; $\dot{C}=\dot{\Theta}=0$, obtendremos una sola ecuación que representa el equilibrio, a saber:

$$(59) \quad \psi(c \cos \varphi) c \cos \varphi - \psi'(c \cos \varphi) c^2 \sin^2 \varphi + \delta \cdot c \sin \varphi - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} c \cos \varphi + V_0 \cos \tau = 0.$$

Desarrollemos, ahora, $H_1(C, \Theta, \dot{C}, \dot{\Theta})$ y $H_2(C, \Theta, \dot{C}, \dot{\Theta})$ en serie de Taylor alrededor del punto de equilibrio ($C=c$; $\Theta=\vartheta$; $\dot{C}=\dot{\Theta}=0$), despreciando las potencias de $C-c$, $\Theta-\vartheta$, $\dot{C}$ y $\dot{\Theta}$ superiores a la primera y restando de (58 I) la ecuación de equilibrio (59) ⁽¹³⁾:

⁽¹³⁾ Este procedimiento de desprecios es habitual en la literatura. Véase, por ejemplo, la definición de *Estabilidad Infinitesimal* dada por STOKER, op. cit., 115.

(60)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{I)} \quad \left(\frac{\partial H_1}{\partial \dot{C}} \right)_0 \dot{C} + \left(\frac{\partial H_1}{\partial \dot{\Theta}} \right)_0 \dot{\Theta} + \left(\frac{\partial H_1}{\partial C} \right)_0 (C - c) + \left(\frac{\partial H_1}{\partial \Theta} \right)_0 (\Theta - \vartheta) = 0 \\ \text{II)} \quad \left(\frac{\partial H_1}{\partial \dot{C}} \right)_0 \dot{C} + \left(\frac{\partial H_1}{\partial \dot{\Theta}} \right)_0 \dot{\Theta} = 0 \end{array} \right.$$

donde el símbolo $\left(\frac{\partial H}{\partial} \right)_0$ significa que las derivadas deben calcularse en el punto de equilibrio ($C = c$; $\Theta = \vartheta$, $\dot{C} = \dot{\Theta} = 0$).

Tenemos en cuenta la expresión (58 I) de H_1 ; multiplicamos (60 I) por $\sin \varphi$ (60 II) por $\cos \varphi$ y sumamos; luego multiplicamos (60 I) por $\cos \varphi$ (60 II) por $-\sin \varphi$ y sumamos, obteniendo:

$$(61) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{I)} \quad \psi_0 \dot{C} + (C - c) \left(\frac{\partial H_1}{\partial \dot{C}} \right)_0 \sin \varphi + (\Theta - \vartheta) \left(\frac{\partial H_1}{\partial \dot{\Theta}} \right)_0 \sin \varphi = 0 \\ \text{II)} \quad \psi_0 c \dot{\Theta} + (C - c) \left(\frac{\partial H_1}{\partial \dot{C}} \right)_0 \cos \varphi + (\Theta - \vartheta) \left(\frac{\partial H_1}{\partial \dot{\Theta}} \right)_0 \cos \varphi = 0. \end{array} \right. \quad \text{donde } \psi_0 = \psi(c \cos \varphi)$$

En (61) consideraremos como variable a $\varphi = \tau + \vartheta$ en lugar de τ . Si integramos cada una de las ecuaciones (61) con respecto a φ entre φ y $\varphi + 2\pi$, debido a la lenta variabilidad de $C(\tau)$, $\Theta(\tau)$ y derivadas, podemos sacarlas fuera del signo integral, y debido a la periodicidad de los coeficientes obtendremos:

$$(62) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{I)} \quad C(\varphi) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \psi_0 d\varphi + (C - c) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{\partial H_1}{\partial \dot{C}} \right)_0 \sin \varphi d\varphi + \\ \quad \quad \quad + (\Theta - \vartheta) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{\partial H_1}{\partial \dot{\Theta}} \right)_0 \sin \varphi d\varphi = 0 \\ \text{II)} \quad \Theta(\varphi) \frac{c}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \psi_0 d\varphi + (C - c) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{\partial H_1}{\partial \dot{C}} \right)_0 \cos \varphi d\varphi + \\ \quad \quad \quad + (\Theta - \vartheta) \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{\partial H_1}{\partial \dot{\Theta}} \right)_0 \cos \varphi d\varphi = 0. \end{array} \right.$$

Teniendo en cuenta la forma de H_1 (58 I), se demuestran fácilmente las relaciones⁽¹⁴⁾:

⁽¹⁴⁾ La demostración de (63) se encuentra en el Apéndice.

$$(63) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial H_1}{\partial C} \right)_0 &= - \left[\frac{d^2}{d\varphi^2} (\psi_0 \cos \varphi) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \cos \varphi - \delta \sin \varphi \right] \\ \left(\frac{\partial H_1}{\partial \Theta} \right)_0 &= c \left[\frac{d^2}{d\varphi^2} (\psi_0 \sin \varphi) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sin \varphi + \delta \cos \varphi \right]. \end{aligned} \right.$$

Recordando las definiciones (19) y (20), y considerando las relaciones (63) obtenemos inmediatamente:

$$(64) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \psi_0 d\varphi &= p(c) + q(c); \quad \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{\partial H_1}{\partial C} \right)_0 \sin \varphi d\varphi = \delta; \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{\partial H_1}{\partial \Theta} \right)_0 \sin \varphi d\varphi &= -c \left(q(c) - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{\partial H_1}{\partial C} \right)_0 \cos \varphi d\varphi &= p(c) - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}; \\ \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left(\frac{\partial H_1}{\partial \Theta} \right)_0 \cos \varphi d\varphi &= \delta c. \end{aligned} \right.$$

Con las relaciones (64), el sistema (62) puede escribirse en la forma

$$(65) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi (p(c) + q(c)) + \delta \cdot \xi - \left(q(c) - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \zeta &= 0 \\ \zeta (p(c) + q(c)) + \left(p(c) - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \xi + \delta \cdot \zeta &= 0 \end{aligned} \right.$$

donde

$$(66) \quad \xi = \frac{C-c}{c}; \quad \zeta = \Theta - \vartheta.$$

Físicamente ξ representa la perturbación relativa de la amplitud de intensidad y ζ la perturbación absoluta de la constante de fase.

El sistema (65) se integra inmediatamente con el ensayo Euleriano:

$$(67) \quad \xi = A e^{\mu \varphi}; \quad \zeta = B e^{\mu \varphi}$$

donde A, B y μ no dependen de φ .

Reemplazando (67) en (65) se ve que μ debe ser una de las raíces de la ecuación:

$$(68) \quad [\mu(p+q) + \delta]^2 + \left(p - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \left(q - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) = \\ = \mu^2(p+q)^2 + 2\delta(p+q)\mu + K^2_{(c)} \frac{dV_0}{dc} = 0$$

en que se ha tenido en cuenta la expresión de la derivada de la característica (18) y donde $K^2_{(c)} = \sqrt{\left(q(c) - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \delta^2} > 0$ para todo c .

Las raíces de (68) son:

$$(69) \quad \mu_1 = \frac{1}{(p+q)} \left[-\delta + \sqrt{\delta^2 - K^2_{(c)} \frac{dV_0}{dc}} \right]; \\ \mu_2 = \frac{1}{(p+q)} \left[-\delta - \sqrt{\delta^2 - K^2_{(c)} \frac{dV_0}{dc}} \right].$$

La lenta variabilidad de $C_{(\tau)}$, $\Theta_{(\tau)}$ y derivadas en el ensayo (55) queda justificada por nuestros resultados cerca de los puntos de transición entre las zonas ascendentes y descendentes de la característica (puntos R y S de fig. 5). En efecto, cerca de dichos puntos, $K^2_{(c)} \frac{dV_0}{dc} \sim 0$ de modo que $\mu_1 \sim 0$ y μ_2 resulta ser del orden de δ . Como en los casos de interés práctico δ es muy pequeño resulta que, cerca de dichos puntos, nuestras dos raíces μ_1 y μ_2 son muy pequeñas, de donde se deduce, teniendo en cuenta las expresiones (66) y (67), que, efectivamente, $C_{(c)}$, $\Theta_{(c)}$ y derivadas son muy lentamente variables en un período cerca de esos puntos de transición. Por lo tanto, nuestros resultados justifican el ensayo (55) justamente en las zonas donde se producen los saltos.

Veamos, ahora, qué nos dicen nuestras soluciones (67) acerca de la estabilidad de las soluciones (53) del equilibrio.

La solución general del sistema (65) será de la forma:

$$(70) \quad \begin{cases} \xi = k_1 A_{1(c)} e^{\mu_1 \varphi} + k_2 A_{2(c)} e^{\mu_2 \varphi} \\ \zeta = k_1 B_{1(c)} e^{\mu_1 \varphi} + k_2 B_{2(c)} e^{\mu_2 \varphi} \end{cases}$$

donde k_1 y k_2 se determinan por las condiciones iniciales.

Por ser $\psi_0 = \frac{1}{L_0} \frac{d\phi}{dI} > 0$, se tiene recordando (19) y (20):

$$(71) \quad p(c) + q(c) > 0$$

para todo c .

Observando (69), es claro que cuando $\frac{dV_0}{dc} > 0$ (zonas ascendentes de la característica) ⁽¹⁵⁾ $R(\mu_1) < 0$, $R(\mu_2) < 0$ obteniendo por tanto que nuestra solución de equilibrio (53) es estable. Cuando $\frac{dV_0}{dc} < 0$ (zonas descendentes), $R(\mu_2) < 0$, $R(\mu_1) > 0$ (inestabilidad).

Podemos, pues, afirmar que los puntos de transición entre las zonas ascendentes y descendentes, son a la vez puntos de transición entre zonas estables e inestables, correspondiendo las primeras a las zonas ascendentes y las segundas a las descendentes.

Puede observarse que, en este tratamiento de la estabilidad, sobre la función $\psi(y) = \psi(c \cos \varphi)$ sólo se ha supuesto que sea positiva y que su naturaleza sea tal que la ecuación (54) admita como solución de régimen el ensayo (53).

b) *Método de estabilidad para pequeñas no-linealidades (Ecuación de Hill).*

Mostraremos, brevemente, como elemento de comparación, un camino que se apoya en los métodos de estabilidad usualmente empleados, los que conducen, en general, al complicado problema de discutir una ecuación de Hill.

Una vez variadas las condiciones iniciales del problema, tendremos como solución de nuestra ecuación (54) una expresión $Y_{(\varphi)}$, diferente de (53). Escribiremos:

$$(72) \quad Y = y + \varepsilon_{(\varphi)}$$

⁽¹⁵⁾ El símbolo $R()$ significa parte real.

en que $y = c \cos \varphi$ es el ensayo de equilibrio y ε y derivada son de potencias superiores despreciables.

$$(73) \quad \psi_{(Y)} = \psi_{(y)} + \left(\frac{d\psi}{dY} \right)_0 \varepsilon \quad \text{donde} \quad \left(\frac{d\psi}{dY} \right)_0 = \left(\frac{d\psi}{dY} \right)_{Y=y}$$

$$(74) \quad \psi_{(Y)} \dot{Y} = \left(\psi_{(y)} + \left(\frac{d\psi}{dY} \right)_0 \varepsilon \right) (\dot{y} + \dot{\varepsilon}) = \psi_{(y)} \dot{y} + \frac{d}{d\varphi} (\psi_{(y)} \varepsilon).$$

Reemplazando en la ecuación (54'):

$$(75) \quad \frac{d}{d\varphi} (\psi_{(y)} \dot{y}) + \frac{d^2}{d\varphi^2} (\psi_{(y)} \varepsilon) + \delta (\dot{y} + \dot{\varepsilon}) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} (y + \varepsilon) = V_0 \cos \tau.$$

La ecuación de equilibrio es precisamente:

$$(76) \quad \frac{d}{d\varphi} (\psi_{(y)} \dot{y}) + \delta \dot{y} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} y = V_0 \cos \tau.$$

Si de (75) restamos (76) obtenemos la ecuación de perturbación buscada:

$$(77) \quad \frac{d^2}{d\varphi^2} (\psi_{(y)} \varepsilon) + \delta \dot{\varepsilon} + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \varepsilon = 0.$$

Para obtener una nueva ecuación diferencial en que no figure la primera derivada, en (77) ensayamos:

$$(78) \quad \varepsilon = \frac{v(\varphi)}{\psi} \cdot \exp \left[-\frac{\delta}{2} \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\psi} \right]$$

obteniendo:

$$(79) \quad \ddot{v} + \left[\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{1}{\psi} + \delta/2 \left(\frac{1}{\psi} \right) \frac{\delta^2}{4\psi^2} \right] v = 0.$$

Siendo $\psi_{(y)} = \psi(c \cos \varphi)$ una función periódica (79), es una ecuación de Hill. Ella admite, de acuerdo con la teoría de Floquet, una solución del tipo

$$(80) \quad v = e^{\mu\varphi} F_{(\varphi)}$$

en que μ no depende de φ y donde $F_{(\varphi)}$ es una función periódica. Para la estabilidad interesa pues, únicamente, conocer el exponente característico μ . Para discutir el valor de μ hemos empleado el así llamado método del determinante infinito de

Hill. Este camino es bastante complicado y sólo hemos podido interpretarlo restringiendo la no-linealidad del problema, con idéntico resultado que el obtenido mediante el método explicado en A) ⁽¹⁶⁾. El procedimiento desarrollado en A) es, pues, mucho más sencillo y da resultados más poderosos en el sentido de que permite considerar no-linealidades mucho mayores.

V) *Equilibrio y estabilidad del circuito ferromagnético en paralelo:*

Nos limitaremos al caso en que imponemos la intensidad total de corriente I . (Ver fig. 3). Llamamos: I_1 a la intensidad de la rama I, I_2 a la de la rama II; $y = I/I^*$; $y_1 = I_1/I^*$; $y_2 = I_2/I^*$ donde I^* está dada por (5); U designará la tensión entre los bornes de la bobina.

$$(81) \quad U = \frac{d\phi(y_1)}{dt} + R_1 y_1; \quad (82) \quad U = 1/C \int y_2 dt = 1/C \int (y - y_1) dt.$$

La intensidad total I será sinusoidal de modo que podemos escribir:

$$(83) \quad y = -c \sin \tau.$$

De (81), (82) y (83) se desprende:

$$(84) \quad \frac{d\phi(y_1)}{dt} + R_1 y_1 + 1/C \int y_1 dt = 1/C \int I dt = \frac{c}{C\omega} \cos \tau.$$

Llamando:

$$(85) \quad L_0 = \left(\frac{d\phi}{dI_1} \right)_{I_1 \rightarrow 0}; \quad \psi(y_1) = \frac{1}{L_0} \frac{d\phi(y_1)}{dI_1}; \quad \delta_1 = \frac{R}{L_0 \omega};$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L_0 C}; \quad \bar{c} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} c$$

obtenemos:

$$(86) \quad \psi(y_1) \dot{y}_1 + \delta_1 y_1 + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \int y_1 d\tau = \bar{c} \cos \tau.$$

⁽¹⁷⁾ El desarrollo del método b) se encuentra en SIBLIN, *Tesis*, § 6.

Comparando con la ecuación (54), vemos que (86) representa un fenómeno resonante serie cuya intensidad es I_1 . De acuerdo con lo visto en el circuito serie, cerca de la resonancia de la armónica fundamental, para calcular la característica basta considerar el ensayo:

$$(87) \quad y_1 = c_1 \cos(\tau + \vartheta_1)$$

resultando:

$$(88) \quad c_1 = \frac{\bar{c}}{\sqrt{\left(q(c_1) - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \delta_1^2}}; \quad \operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - q(c_1)}{\delta_1};$$

$$q(c_1) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \psi(y_1) \sin^2(\tau + \vartheta_1) d(\tau + \vartheta_1).$$

Consideremos la curva c_1 en función de $\bar{c}$ dada por (88). Nuestro estudio de estabilidad del fenómeno serie nos muestra que la solución dada por (87) es estable en las zonas ascendentes de dicha curva e inestable en la descendente. Como las perturbaciones que encontrábamos eran de tipo exponencial (ver (70)), se comprende por (82) que si y_1 es estable también lo es U ; si y_1 es inestable, lo mismo sucede con U . Luego, en las zonas descendentes de (99), U es inestable; en las ascendentes, estable.

Busquemos, ahora, la ecuación de la característica $U_0 = U_0(c)$ donde U_0 designa la amplitud de la tensión U . Para ello nos bastará hallar la relación $U_0 = U_0(c_1)$ pues por (88) ya conocemos $c = c(c_1)$.

Como en la resonancia tenemos $y_1 = c_1 \cos(\tau + \vartheta_1)$ e $y = -c \sin \tau$, es evidente por (82) que, en ella, U será de la forma:

$$(89) \quad U = U_0 \cos(\tau + \vartheta_2).$$

La ecuación de equilibrio de la rama I puede escribirse:

$$(90) \quad \psi(y_1) y_1 + \delta_1 y_1 = V_0 \cos(\tau + \vartheta_2) \quad \text{donde} \quad V_0 = \frac{U_0}{L_0 \omega}.$$

Reemplazamos y_1 por la expresión (87), multiplicamos por $\sin(\tau + \vartheta_1)$ e integramos respecto de $\tau + \vartheta_1$ entre $-\pi$ y $+\pi$;

luego multiplicamos por $\cos(\tau + \vartheta_1)$ e integramos nuevamente obteniendo:

$$(92) \quad \begin{cases} V_0 \sin(\vartheta_2 - \vartheta_1) = c_1 q(c_1) \\ V_0 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_1) = c_1 \delta_1. \end{cases}$$

Cuadrando, sumando y teniendo en cuenta la (88) obtenemos las ecuaciones paramétricas de la característica:

$$(92) \quad \begin{cases} V_0 = c_1 \sqrt{q(c_1)^2 + \delta_1^2}; & \bar{c} = c_1 \sqrt{\left(q(c_1) - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \delta_1^2} \end{cases}$$

donde c_1 puede considerarse como un parámetro.

Se demuestra de inmediato a partir de (92) que

$$(93) \quad \text{Signo} \frac{dV_0}{dc} = \text{Signo} \left[\left(q(c_1) - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) \left(p(c_1) - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \right) + \delta_1^2 \right] = \\ = \text{Signo} \frac{d\bar{c}}{dc_1}$$

Luego la característica dada por (92) y la curva (88) presentan sus zonas descendentes en los mismos ámbitos de valores de c_1 . Como habíamos demostrado que U es inestable para aquellos valores de c_1 en que la curva (88) es descendente, queda ahora probado que dicha inestabilidad corresponde también a las zonas descendentes de la característica dada por (92). Lo mismo sucede con la estabilidad de las zonas ascendentes.

De esta manera probamos que las zonas descendentes de la característica del circuito ferresonante paralelo son inestables, las ascendentes estables, siempre que se imponga la intensidad de corriente.

Agradecemos al Prof. Dr. Ricardo Gans la proposición del tema y sus continuos consejos.

APENDICES

1) Demostración de (17):

$$p_1(c_1) = q_1(c_1) + c_1 \frac{dq_1(c_1)}{dc_1}$$

Siendo

$$(10) \quad y = c_1 \cos \varphi$$

$$\frac{\partial \psi(y)}{\partial c_1} = \frac{d\psi(y)}{dy} \cos \varphi; \quad (95) \quad \frac{\partial \psi(y)}{\partial \varphi} = -\frac{d\psi(y)}{dy} c_1 \sin \varphi$$

luego

$$(96) \quad \frac{d\psi(y)}{dy} = \frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial \psi(y)}{\partial c_1} = -\frac{1}{c_1 \sin \varphi} \frac{\partial \psi(y)}{\partial c_1}.$$

A partir de (19) y (96)

$$\begin{aligned} q_1 + c_1 \frac{dq_1}{dc_1} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(y) \sin^2 \varphi \, d\varphi + \frac{c_1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \psi(y)}{\partial c_1} \sin^2 \varphi \, d\varphi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi \sin^2 \varphi \, d\varphi - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi \sin^2 \varphi \, d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \, d\varphi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \psi(y) \cos^2 \varphi \, d\varphi = p_1(c_1) \quad \text{según (20).} \end{aligned}$$

con lo que queda demostrada la fórmula (17).

2) Demostración de las fórmulas (63):

Llamando:

$$\psi_0 = \psi(y) = \psi(c \cos \varphi); \quad \psi_0' = \left(\frac{d\psi}{dY} \right)_{Y=y}; \quad \psi_0'' = \left(\frac{d^2\psi}{dY^2} \right)_{Y=y}$$

a partir de (58 I) obtenemos inmediatamente:

$$(97) \quad \left\{ \begin{aligned} \left(\frac{\partial H_1}{\partial C} \right)_0 &= \psi_0 \cos \varphi - 2 \psi_0' c \sin^2 \varphi - (\psi_0'' c^2 \sin^2 \varphi - \\ &\quad - \psi_0' c \cos \varphi + \delta \sin \varphi - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \cos \varphi \\ \left(\frac{\partial H_1}{\partial \Theta} \right) &= c \left\{ -\psi_0 \sin \varphi - 2 \psi_0' c \sin \varphi \cos \varphi + \right. \\ &\quad \left. + (\psi_0'' c^2 \sin^2 \varphi - \psi_0' c \cos \varphi) \sin \varphi + \delta \cos \varphi + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sin \varphi \right\}. \end{aligned} \right.$$

Por otra parte se tiene, siendo $\gamma = c \cos \varphi$ y recordando (95):

$$(98) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} = \psi_0'' c^2 \sin^2 \varphi - \psi_0' c \cos \varphi$$

Teniendo en cuenta (95) y (98), las fórmulas (97) pueden escribirse:

$$(99) \quad \left(\frac{\partial H_1}{\partial C} \right)_0 = \psi_0 \cos \varphi + 2 \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \sin \varphi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \cos \varphi + \delta \sin \varphi - \\ - \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \cos \varphi = - \left[\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (\psi_0 \cos \varphi) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \cos \varphi - \delta \sin \varphi \right]$$

$$(100) \quad \left(\frac{\partial H_1}{\partial \Theta} \right)_0 = c \left\{ -\psi_0 \sin \varphi + 2 \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \cos \varphi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \sin \varphi + \right. \\ \left. + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sin \varphi + \delta \cos \varphi \right\} = c \left[\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} (\psi_0 \sin \varphi) + \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \sin \varphi + \delta \cos \varphi \right]$$

con lo que quedan demostradas las fórmulas (63).

LAS SEPTIMAS JORNADAS MATEMATICAS ARGENTINAS

Organizadas por la Unión Matemática Argentina y bajo los auspicios de la Universidad Nacional de Cuyo se realizaron en Mendoza, el 25 de julio de 1954, las *Séptimas Jornadas Matemáticas Argentinas*. Asistieron los siguientes delegados extranjeros: José Adem (México), Alberto Calderón (Princeton), J. Dahmköhler (Bolivia), Mario González (Cuba), F. Grabiell (Cuba), A. Grothendieck (Brasil), Juan Horvath (Colombia), Rafael Laguardia (Uruguay), George Mostow (Brasil), Leopoldo Nachbin (Brasil), J. Valles (Uruguay), así como los delegados de la UNESCO Ing. L. Mattson y Prof. O. Dodera Lüscher.

Fué elegido presidente de la reunión M. Cotlar y secretario M. Sadosky, presentándose las comunicaciones cuyos resúmenes se publican a continuación:

DR. GERMÁN FERNÁNDEZ. (Clasificación de las superficies desarrollables en el espacio de 4 dimensiones de curvatura constante).

RESUMEN: Consideremos una superficie, $S_2: (x = x, y = y, z_1 = z_1(x, y), z_2 = z_2(x, y))$, del espacio de 4 dimensiones de curvatura constante S_4 , y agreguemos a cada punto P de S una "repere mobile" definida por 4 vectores unita-