IL TEOREMA DI UNICITÀ PER I FLUIDI INCOMPRESSIBILI, PERFETTI, ETEROGENEI

di DARIO GRAFFI, Bologna (Italia)

1. In una Nota pubblicata due anni fa [1] ho stabilito il teorema di unicità per le equazioni dei fluidi compressibili barotropici, ovviamente corredate da opportune condizioni iniziale al contorno; l'analogo teorema per i fluidi incompressibili rientra, come caso particolare, in una mia ricerca del 1930 [2]. In tutti questi lavori ho però supposto il fluido omogeneo, qui intendo trattare il caso del fluido eterogeneo,, però perfetto e con densità variabile con continuità. Dimostrerò cioè il teorema: *le equazioni del moto dei fluidi incompressibili, perfetti, eterogenei, determinano in modo univoco i valori della velocità* $\bar{v}$, *della densità* ρ, *della pressione* p *(quest'ultima a meno di una funzione arbitraria del tempo) in ogni punto* P *di un dominio limitato* (D) *e in ogni istante* t *positivo, qualora siano assegnate:* a) *per ogni* t *le forze di massa come funzione di* ρ, P, t, *funzione con derivata limitata rispetto a* ρ; b) *all'istante iniziale i valori di* ρ *e* $\bar{v}$ *in tutto* (D); c) *in ogni istante positivo sulla superficie* σ *che limita* (D) $\bar{v}\,.\,\bar{n}$. ($\bar{n}$ *versore normale a* σ *diretto verso l'esterno di* (D), $\bar{v}\,.\,\bar{n}$ *indica ovviamente il prodotto scalare fra* $\bar{v}$ *ed* $\bar{n}$) *e dove questa grandezza è negativa (cioè dove il fluido entra in* (D)) *anche le altre componenti di* $\bar{v}$ *e la densità* ρ. Le $\bar{v}, p, \rho$ si suppongono regolari, cioè finite e continue con derivate prime, rispetto al tempo ed alle coordinate, limitate in tutto (D) e per ogni t compreso fra zero e T dove T è un nu-

(1) D. GRAFFI, *Il teorema di unicità nella dinamica dei fluidi compressibili.* Journal of Rational Mechanics and Analysis, vol. 2, 1953, 99-106.

(2) D. GRAFFI, *Sulla teoria della propagazione del calore per convezione naturale,* Rend. Lincei, (6), XII, 1930, pp. 129-135.

mero positivo e del resto arbitrario. Inoltre, conforme all'esperienza, si suppone la ρ sempre e dovunque positiva.

Il teorema di unicità risulta valido anche se (D) è illimitato purchè si pongano alcune condizioni di convergenza all'infinito.

2. Le equazioni del moto dei fluidi perfetti, incompressibili, non omogenei, sono:

$$
(1) \qquad \begin{cases} \rho \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \rho \dfrac{d\bar{v}}{dP}\,\bar{v} = -\operatorname{grad} p + \bar{F}(\rho, P, t) \\[2mm] \operatorname{div} \bar{v} = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{grad} \rho \,.\, \bar{v} = 0 \end{cases}
$$

dove $\bar{F}(\rho, P, t)$ indica la forza di massa; $\dfrac{d\bar{v}}{dP}\,\bar{v}$ il vettore ottenuto applicando a $\bar{v}$ l'omografia vettoriale $\dfrac{d\bar{v}}{dP}$, o se si vuole il vettore ottenuto eseguendo il prodotto di composizione fra il tensore $\dfrac{d\bar{v}}{dP}$ e il vettore $\bar{v}$. La seconda equazione del sistema (1) è, ovviamente, quella di continuità, l'ultima equazione esprime l'invarianza della densità di una determinata particella di fluido.

Ciò posto, si supponga, per assurdo, che il sistema (1) ammetta due soluzioni rappresentate rispettivamente da p, ρ, v e $p + p_1, \rho + \rho_1, \bar{v} + \bar{v}_1$, ambedue regolari e soddisfacenti alle stesse condizioni iniziali ed al contorno. Sarà perciò, in tutto (σ) e per ogni istante positivo $\bar{v}_1 \,.\, \bar{n} = 0$, inoltre $\bar{v}_1 = 0$, $\rho_1 = 0$, dove $\bar{v} \,.\, \bar{n} < 0$, $\bar{v}_1 = 0$, $\rho_1 = 0$ in tutto (D) per $t = 0$. Allora, ponendo nella (1) in luogo di $\rho, p, \bar{v}$ rispettivamente $\rho + \rho_1$, $\bar{v} + \bar{v}_1$, $p + p_1$, si ottengono altre equazioni da cui sottraendo le analoghe di (1), dopo ovvi passaggi, si ha:

$$
(2) \qquad \begin{aligned} \rho \frac{\partial \bar{v}_1}{\partial t} + \rho \frac{d\bar{v}_1}{dP}(\bar{v} + \bar{v}_1) + \rho \frac{d\bar{v}}{dP}\,\bar{v}_1 + \rho_1 \frac{\partial(\bar{v} + \bar{v}_1)}{\partial t} &+ \\ + \rho_1 \frac{d(\bar{v} + \bar{v}_1)}{dP}(\bar{v} + \bar{v}_1)& \\ = -\operatorname{grad} p_1 + \bar{F}(\rho + \rho_1, P, t) - \bar{F}(\rho, P, t)& \end{aligned}
$$

$$\operatorname{div} \bar{v}_1 = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{grad} \rho_1 . (\bar{v} + \bar{v}_1) + \operatorname{grad} \rho . \bar{v}_1 = 0. \tag{4}$$

Ciò posto, si moltiplichi scalarmente per $\bar{v}_1$ ogni termine di (2) e si integri il risultato ottenuto su tutto il volume S del dominio (D). Dopo semplici calcoli si ottiene:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_S \rho\, v_1^2\, dS = \frac{1}{2} \int_S \frac{\partial \rho}{\partial t} v_1^2\, dS - \tag{5}$$

$$- \int_S \rho \frac{d\bar{v}_1}{dP} (\bar{v} . + \bar{v}_1) . \bar{v}_1\, dS - \int_S \rho \frac{d\bar{v}}{dP} \bar{v}_1 . \bar{v}_1\, dS$$

$$- \int_S \rho_1 \frac{\partial(\bar{v} + \bar{v}_1)}{\partial t} . \bar{v}_1\, dS - \int_S \rho_1 \frac{d(\bar{v} + \bar{v}_1)}{dP} (\bar{v} + \bar{v}_1) . \bar{v}_1\, dS -$$

$$- \int_S \operatorname{grad} p_1 . \bar{v}_1\, dS + \int_S [\bar{F}(\rho + \rho_1, P, t) - \bar{F}(\rho, P, t)] . \bar{v}_1\, dS.$$

Ora tenendo presente (4) e che $\bar{v}_1 . \bar{n}$ è nullo su σ si ha:

$$\int_S \operatorname{grad} p_1 . v_1\, dS = \int_S \operatorname{div}(p_1 \bar{v}_1)\, dS = \int_\sigma p_1 \bar{v}_1 . \bar{n}\, dS = 0. \tag{6}$$

Inoltre, ricordando alcuni risultati della prima Nota citata (precisamente le formule (13), (14), (15), (16), (17) e (19)) si ha che, se t è minore T positivo arbitrario, la somma dei termini non nulli a secondo membro di (5) è inferiore ad un numero positivo che per comodità indicheremo con $\frac{M}{2}$, moltiplicato per l'integrale esteso ad S di $\rho_1^2 + v_1^2$. Si ha così:

$$\frac{d}{dt} \int_S \rho\, v_1^2\, dS \leq M \int_S \rho_1^2 + v_1^2)\, dS. \tag{7}$$

Integrando la (7) da zero a t e detto $m > 0$ l'estremo inferiore di ρ per P in (D) e t nell'intervallo $(0, T)$ si ha:

$$\int_S v_1^2 \, dS \leqq \frac{M}{m} \int_0 dt \int_S (\rho_1^2 + v_1^2) \, dS. \tag{8}$$

3. Si moltiplichi ora la (4) per ρ_1 e si integri ancora su tutto S.

Si ottiene:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_S \rho_1^2 \, dS = - \int_S \rho_1 \operatorname{grad} \rho_1 \, . \, (\bar{v} + \bar{v}_1) \, dS - \int_S \rho_1 \operatorname{grad} \rho \, . \, \bar{v}_1 \, dS. \tag{9}$$

Ora, detto N il massimo di $|\operatorname{grad} \rho|$ sempre per P in (D) e per t in $(0, T)$ si ha:

$$\int_S \rho_1 \operatorname{grad} \rho \, . \, \bar{v}_1 \, dS \leqq \frac{N}{2} \int_S (\rho_1^2 + v_1^2) \, dS. \tag{10}$$

Si ha poi, tenendo presente (3) e la seconda di (1):

$$- \int_S \rho_1 \operatorname{grad} \rho_1 (\bar{v} + \bar{v}_1) \, dS = - \frac{1}{2} \int_S \operatorname{div} (\rho_1^2 (\bar{v} + \bar{v}_1)) \, dS = - \frac{1}{2} \int_\sigma \rho_1^2 (\bar{v} + \bar{v}_1) \, . \, \bar{n} \, d\sigma \leqq 0 \tag{11}$$

perchè dove ρ_1 è diversa da zero $(\bar{v} + \bar{v}_1) \, . \, \bar{n}$ è positiva o nulla. Si ha allora, sostituendo (10) in (9), tenendo presente (11) e poi integrando da 0 a t:

$$\int_S \rho_1^2 \, dS \leqq N \int_0^t dt \int_S (\rho_1^2 + v_1^2) \, dS \tag{12}$$

sommando ora (12) con (8) si ha subito:

$$\int_S (\rho_1^2 + v_1^2) \, dS \leqq \left(\frac{M}{m} + N \right) \int_0^t dt \int_S (\rho_1^2 + v_1^2) \, dS$$

da cui, ragionando come nella prima Nota citata (3), si ha che l'integrale al primo membro di questa equazione è nullo per ogni t positivo minore di T, ossia, per l'arbitrarietà di T, per ogni t. Allora, con ragionamenti ben noti, si deduce subito ρ_1 e v_1 identicamente nulli per ogni punto di (D) e per ogni istante positivo. Dalla (2) si ha poi $\operatorname{grad} p_1 = 0$ cioè p_1 vale una funzione del tempo, però indipendente dalle coordinate. Il teorema di unicità è perciò completamente provato e si estende anche a domini illimitati purchè si ammettano alcune condizioni di convergenza all'infinito, ad es. infinitesima di ordine superiore a 3/2 la differenza fra ρ, p e v ed i valori assegnati per queste grandezze all'infinito.

4. Un esempio di fluido incompressibile eterogeno è fornito da un liquido che contiene una sostanza disciolta con concentrazione variabile in ogni suo punto. Infatti se si trascura la diffusione della sostanza disciolta le equazioni che reggono il moto del liquido sono appunto le (1). E' da notare che se si suppone il liquido omogeneo di densità ρ_0 la densità del fluido vale $\rho_0(1+c)$ se c è la concentrazione (e se si trascurano le variazioni di volume dovute alle variazioni di c), sicchè il gradiente di ρ è proporzionale a quello di c. Quindi, se non si trascura la diffusione, bisogna aggiungere al secondo membro dell'ultima equazione di (1) un termine proporzionale al laplaciano di ρ con coefficiente di proporzionalità costante e positivo. Collo stesso procedimento usato nei numeri precedenti non sarebbe difficile dimostrare che il teorema di unicità vale anche in questo caso, purchè si ammetta assegnata, in ogni istante en tutta la superficie che limita (D), la densità del fluido.

(3) Cioè applicando il lemma di Gronwall. Cfr. G. SANSONE, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Zanichelli, Bologna, 1948, vol. 1º, p. 30.