SOBRE LA ESTABILIDAD EN ESPACIOS DE DIMENSION INFINITA

por José L. Massera, Montevideo (Uruguay)

Es sabido que muchos de los teoremas sobre la estabilidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales, particularmente los del llamado «segundo método de Lyapunov», son válidos en espacios de Banach de dimensión arbitraria, lo cual tiene importancia para posibles aplicaciones a ecuaciones en derivadas parciales. En un trabajo que será publicado en el «Annals of Mathematics», he demostrado una serie de nuevos resultados de ese tipo; sin embargo, uno de los teoremas más importantes de ese trabajo, que generaliza resultados anteriores de Malkin [2] y míos [3] sobre la existencia de funciones de Lyapunov, vale sólo en espacios de dimensión finita o, por lo menos, no he podido hallar una demostración aplicable al caso general. De ahí que haya cierto interés en aquellos resultados que, si bien no son tan generales en otros aspectos, no exigen la hipótesis de dimensión finita. La presente nota tiene precisamente por objeto demostrar un teorema de esta naturaleza el que, por otra parte, ya había sido expuesto, en lo esencial, en el cursillo que dicté en el «Centro Internazionale Matematico Estivo» (Varenna, 1954). Previamente demuestro algunos teoremas sobre dependencia de las soluciones con respecto a las condiciones iniciales, que posiblemente no sean nuevos, aunque no los he encontrado rigurosamente demostrados en ninguna parte.

Sobre la dependencia de las soluciones con respecto a las condiciones iniciales

En lo sucesivo, todas las variables y funciones tienen sus valores en espacios de Banach de cualquier número de dimensiones, salvo la variable t que es real y no negativa. En esas condiciones, la demostración de la existencia y unicidad de las soluciones de una ecuación diferencial $\dot{x} = dx/dt = f(x, t)$, en que f satisface una condición de Lipschitz en una cierta región, no presenta dificultad y es formalmente idéntica a la del caso de una variable real. Designaremos con $x = F(t, x_0, t_0)$ a la solución (general) que pasa por el punto (x_0, t_0), es decir, $x_0 \equiv F(t_0, x_0, t_0)$; la demostración de que F es función continua de sus tres argumentos no presenta tampoco novedades dignas de mención.

Teorema 1. — Sea la ecuación, dependiente del parámetro μ, $\dot{x} = f(x, t, \mu)$ *y sea* $x = G(t, \mu, t_0)$ *la solución que verifica la condición inicial* $G(t_0, \mu, t_0) = g(\mu, t_0)$, *en que* $g(\mu, t_0)$ *es una función dada de antemano. Si las funciones* f *y* g *son diferenciables Fréchet* [1] *con respecto al conjunto de sus argumentos, y si las diferenciales están uniformemente acotadas (como operadores en las diferenciales de los argumentos) en una cierta región,* G *es también diferenciable y su diferencial está uniformemente acotada. Más precisamente, si*

$$\|f\| \leqq A, \ \|\delta f\| \leqq B, \ \|\delta g\| \leqq C$$

($\|\delta f\|$ y $\|\delta g\|$ *representan las normas de los operadores diferenciales*), *es*

$$\|\delta G\| \leqq (A + C + 1) \, . \, e^{B|t - t_0|}.$$

La función

$$w(t) = \delta G[t, \mu, t_0); (\delta t, \delta\mu, \delta t_0)], \ \text{para} \quad \mu, t_0, \delta t, \delta\mu, \delta t_0$$

constantes, verifica la ecuación diferencial lineal

$$\dot{w} = P(t)\, w + Q(t),$$

en que $P(t)$ *es el operador lineal definido por*

$$P(t)\, h = \delta f[(G(t, \mu, t_0), t, \mu); \ (h, 0, 0)]$$

$$\text{y} \quad Q(t) = \delta f[(G(t, \mu, t_0), \, t, \mu); \, (0, \delta t, \delta\mu)],$$

con la condición inicial

$$w(t_0) = f[g(\mu, t_0), t_0, \mu] \,.\, (\delta t - \delta t_0) + \delta g[(\mu, t_0) ; (\delta\mu, \delta t_0)].$$

Para $\mu, t_0, \delta t, \delta\mu, \delta t_0$ constantes, sea

$$v(t) = G(t + \delta t, \mu + \delta\mu, t_0 + \delta t_0) - G(t, \mu, t_0).$$

Para $t = t_0$ se tiene

$$\begin{aligned} v(t_0) &= G(t_0 + \delta t, \mu + \delta\mu, t_0 + \delta t_0) - G(t_0, \mu, t_0) = \\ &= G(t_0 + \delta t, \mu + \delta\mu, t_0 + \delta t_0) - G(t_0 + \delta t_0, \mu + \delta\mu, t_0 + \delta t_0) + \\ &+ g(\mu + \delta\mu, t_0 + \delta t_0) - g(\mu, t_0) = \\ &= f(\xi, \tau, \mu + \delta\mu) \,.\, (\delta t - \delta t_0) + g(\mu + \delta\mu, t_0 + \delta t_0) - g(\mu, t_0), \end{aligned} \tag{1}$$

en que (ξ, τ) es un punto del arco de trayectoria

$$x = G(t, \mu + \delta\mu, t_0 + \delta t_0)$$

en el intervalo

$$(t_0 + \delta t_0, t_0 + \delta t).$$

Entonces, como

$$f(\xi, \tau, \mu + \delta\mu) - f[g(\mu, t_0), t_0, \mu]$$

tiende a cero con

$$\|(\delta t, \delta\mu, \delta t_0)\| = r,$$

se tiene

$$\begin{aligned} v(t_0) &= f[g(\mu, t_0), t_0, \mu] \,.\, (\delta t - \delta t_0) + \\ &\quad + \delta g[(\mu, t_0) ; (\delta\mu, \delta t_0)] + o(r) = w(t_0) + o(r) \end{aligned} \tag{2}$$

Por otro lado,

$$\dot{v} = f[G(t+\delta t, \mu+\delta\mu, t_0+\delta t_0), t+\delta t, \mu+\delta\mu] - \\ - f[G(t, \mu, t_0), t, \mu] \quad (3) \\ = \delta f[G(t, \mu, t_0), t, \mu); (v, \delta t, \delta\mu)] + \varphi(t, t_0, \mu; v, \delta t, \delta\mu),$$

en que

$$\|\varphi(t, t_0, \mu; v, \delta t, \delta\mu)\| = o(R),$$

siendo

$$R = \|(v, \delta t, \delta\mu)\|.$$

En virtud de la definición de P y Q, queda

$$\dot{v} = P(t)\, v + Q(t) + \varphi. \quad (4)$$

Por otra parte, de (3) resulta

$$dR/dt = d\|v\|/dt \leqq \|\dot{v}\| \leqq BR$$

de donde

$$R(t) \leqq R(t_0) \,.\, e^{B|t-t_0|},$$

y como, por (1),

$$R(t_0) \leqq (A+C)\, r,$$

resulta

$$R(t) \leqq (A+C)\, r e^{B|t-t_0|}. \quad (5)$$

De (5) se deduce finalmente que, en todo intervalo finito (t_0, t),

$$\|\varphi(t, t_0, \mu; v(t), \delta t, \delta\mu)\| = o(r).$$

Sea ahora $T(t)$ el operador lineal que verifica la ecuación homogénea $dT/dt = P(t)\,T$, con $T(0) = I$. Se tiene

$$w(t) = T(t)\,T^{-1}(t_0)\,w(t_0) + \int_{t_0}^{t} T(t)\,T^{-1}(\tau)\,Q(\tau)\,d\tau,$$

$$v(t) = T(t)\,T^{-1}(t_0)\,v\,(t_0) + \int_{t_0}^{t} T(t)\,T^{-1}(\tau)\,Q(\tau)\,d\tau +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} T(t)\,T^{-1}(\tau)\,\varphi(\tau, t_0, \mu; v(\tau), \delta t, \delta\mu)\,d\tau,$$

de donde

$$v(t) - w(t) = T(t)\,T^{-1}(t_0)\,[v(t_0) - w(t_0)] +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} T(t)\,T^{-1}(\tau)\,\varphi(\tau, t_0, \mu; v(\tau), \delta t, \delta\mu)\,d\tau.$$

Para cada τ fijo y $r \to 0$ se tiene

$$r^{-1}\,T(t)\,T^{-1}(\tau)\,\varphi(\tau, t_0, \mu; v(\tau), \delta t, \delta\mu) \to 0.$$

Como además esas funciones están uniformemente acotadas en el intervalo

$$t_0 \leqq \tau \leqq t < +\infty,$$

por el teorema de Lebesgue resulta

$$\int_{t_0}^{t} T(t)\,T^{-1}(\tau)\,\varphi(\tau, t_0, \mu; v(\tau), \delta t, \delta\mu)\,d\tau = o(r)$$

y como, por (2),

$$v(t_0) - w(t_0) = o(r)$$

queda finalmente

$$v(t) - w(t) = o(r),$$

lo cual prueba que $w(t)$, que es lineal en

$$(\delta t, \delta\mu, \delta t_0),$$

es la diferencial de Fréchet de G. Como

$$\|T(t)\, T^{-1}(t_0)\| \leqq e^{B|t-t_0|},\ \|w(t_0)\| \leqq (A+C)\, r,\ \|Q\| \leqq Br,$$

queda

$$\|w(t)\| \leqq (A+C)\, re^{B|t-t_0|} +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} e^{B|t-\tau|} Br\, d\tau \leqq (A+C+1)\, e^{B|t-t_0|}\, r,$$

lo cual completa la demostración.

Teorema 2. — Sea la ecuación $\dot{x} = f(x, t)$ *y* $x = F(t, x_0, t_0)$ *su solución general. Si* f *tiene diferenciales de Fréchet hasta el orden* s *inclusive, lo mismo ocurre con* F. *Más precisamente, si*

$$\|f\| \leqq A \quad y \quad \|\delta^{(p)} f\| \leqq B_p,\ p = 1, 2, \ldots, s,$$

se tendrá

$$\|\delta^{(p)} F\| \leqq Me^{N|t-t_0|},\ p = 1, 2, \ldots, s,$$

en que M *y* N *son funciones de* $A, B_1, \ldots, B_p, p$, *independientes de* t, x_0, t_0 *y de la ecuación diferencial considerada.*

Para $p = 1$ el teorema es un corolario del anterior, tomando $\mu = x_0$, $g(\mu, t_0) = x_0$. Como la variación primera $w_1 = \delta^{(1)} F$ verifica la ecuación lineal

$$\dot{w}_1 = \delta^{(1)} f[(F(t, x_0, t_0), t); (w_1, \delta t)],$$

y la condición inicial

$$w_1(t_0) = f(x_0, t_0) \,.\, (\delta t - \delta t_0) + \delta x_0,$$

tomando

$$\mu_1 = (x_0, t_0, \delta x_0, \delta t_0), g_1(\mu_1, t_0) = f(x_0, t_0) \,.\, (\delta t - \delta t_0) + \delta x_0,$$

resulta que w_1 y la ecuación diferencial que satisface están nuevamente en las condiciones del teorema anterior (si $s \geqq 2$) y por tanto existe $w_2 = \delta w_1 = \delta^{(2)} F$, que satisface, como es fácil ver,

$$\dot{w}_2 = \delta^{(1)} f[(F(t, x_0, t_0), t);\ (w_2, 0)] + \\ + \delta^{(2)} f[(F(t, x_0, t_0), t);\ (w_1, \delta t), (w_1, \delta t)]$$

$$w_2(t_0) = \delta^{(1)} f[(x_0, t_0);\ (f(x_0, t_0) \,.\, (\delta t - \delta t_0) + \\ + 2\,\delta x_0, \delta t + \delta t_0)] \,.\, (\delta t - \delta t_0),$$

y así sucesivamente.

La estabilidad asintótica

Dada la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x, t)$, $f(0, t) = 0$, diremos que la solución $x = 0$ es *asintótico-uniformemente estable* si se verifican las dos condiciones siguientes:

a) Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que, cualesquiera sean x_0, t_0, $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$, $t_0 \geqq 0$, se tiene $\|F(t, x_0, t_0)\| < \varepsilon$ para $t \geqq t_0$;

b) Existe un $\delta_0 > 0$ fijo y, dado $\varepsilon > 0$, un $T(\varepsilon) > 0$ tales que, cualesquiera sean x_0, t_0, $\|x_0\| < \delta_0$, $t_0 \geqq 0$, se tiene $\|F(t, x_0, t_0)\| < \varepsilon$ para $t \geqq t_0 + T(\varepsilon)$.

Consideraremos «funciones de Lyapunov» $V(x, t)$ (escalares) que satisfacen las siguientes hipótesis (L): existen tres funciones $a(r)$, $b(r)$, $c(r)$ reales y continuas de la variable real y no negativa r; a, b, c se anulan para $r = 0$ y son positivas para

$$r > 0, \text{ y se tiene: } a(\|x\|) \leqq V(x, t) \leqq b(\|x\|), \\ \delta V[(x, t);\ (f, 1)] \leqq -c(\|x\|)$$

(esta última diferencial es la «derivada total» de V, es decir, la derivada de V con respecto a t a lo largo de las curvas integrales).

Malkin [2] demostró el siguiente teorema que vale, con la misma demostración, en espacio de dimensión infinita: *Si existe una función que satisface las hipótesis (L), la solución* $x=0$ *es asintótico-uniformemente estable.*

Nuestro objetivo es demostrar el siguiente recíproco, que generaliza y precisa teoremas anteriores de Malkin [2] y míos [3]:

Teorema 3. — Si f *posee una diferencial de Fréchet uniformemente acotada en el cilindro* $\|x\| \leqq a, t \geqq 0$, *y si la solución* $x=0$ *es asintótico-uniformemente estable, existe una función de Lyapunov* V *que satisface las hipótesis (L) y que posee una diferencial de Fréchet uniformemente acotada. Si además* f *satisface una o más de las siguientes hipótesis suplementarias:*

a) f *posee diferenciales de Fréchet hasta el orden* s *inclusive, acotadas en toda región acotada;*

b) f *posee diferenciales de Fréchet hasta el orden* m *inclusive, uniformemente acotadas en el cilindro* $\|x\| \leqq a, t \geqq 0$;

c) f *es periódica en* t;

d) f *es independiente de* t;

puede elegirse V *de modo que tenga, respectivamente, las mismas propiedades.*

Para la demostración necesitamos el siguiente Lema (Cf. [3]):

Lema.-Dados un número natural s, *una función* $\varepsilon(t)>0$ *definida para* $t \geqq 0$, $\lim_{t\to+\infty} \varepsilon(t)=0$, *y una función* $M(t)>0$, *definida para* $t \geqq 0$, *diferenciable y no decreciente, existe una función* $G(\eta)$, *definida para* $\eta \geqq 0$, *cuyas derivadas hasta el orden* s *inclusive existen, son continuas, positivas, crecientes, se anulan para* $\eta=0$ *y tienden a infinito para* $\eta \to +\infty$, *tal que, para cada número fijo* $\delta>0$, *las integrales*

$$\int_0^{+\infty} G^{(p)}[\varepsilon^*(t)] \, . \, M(t) \, dt, \, 0 \leqq p \leqq s,$$

convergen uniformemente en la familia F_δ *de funciones* $\varepsilon^*(t)$

definida por las disigualdades

$$0 \leqq \varepsilon^*(t) \leqq \delta \,.\, \varepsilon(t) \ (^*).$$

Construimos primero la función $\eta(t)$, definida para $t > 0$, continuamente diferenciable, η' negativa y creciente,

$$\lim_{t \to +\infty} \eta(t) = \lim_{t \to +\infty} \eta'(t) = 0, \lim_{t=0} \eta(t) = +\infty,$$

tal que, para cada $\delta > 0$, exista un $T(\delta)$ con la siguiente propiedad: si $t \geqq T(\delta)$, es $\delta \,.\, \varepsilon(t) \leqq \eta(t)$. Con ese fin, sea t_n una sucesión, $t_1 \geqq 1$, $t_{n+1} \geqq t_n + 1$, tal que, si $t \geqq t_n$, es $\varepsilon(t) \leqq (n+1)^{-2}$; entonces definimos $\eta(t_n) = n^{-1}$, $\eta(t)$ lineal entre t_n y t_{n+1} y $\eta(t) = (t_1/t)^k$ para $0 < t \leqq t_1$, en que k se elije bastante grande para que $\eta'(t_1 - 0) \leqq \eta'(t_1 + 0)$. Esta función no es, evidentemente. diferenciable para $t = t_n$, pero es posible corregir este defecto redondeando ligeramente el gráfico en el entorno de esos puntos, de modo que la nueva $\eta(t)$ sea mayor que la definida primitivamente. Entonces

$$\delta \,.\, \varepsilon(t) \leqq \delta \,.\, (n+1)^{-2} \quad \text{y} \quad \eta(t) \geqq (n+1)^{-1}$$

para $t_n \leqq t \leqq t_{n+1}$, de donde

$$\delta \,.\, \varepsilon(t) \leqq \eta(t) \,.\, \delta \,.\, (n+1)^{-1} \leqq \eta(t)$$

en cuanto $n \geqq N =$ parte entera de δ. Se puede entonces tomar $T(\delta) = t_N$.

Sea $t(\eta)$ la función inversa de $\eta(t)$. $G(\eta)$ se construye entonces por medio de $s+1$ integraciones sucesivas de la función

$$H(\eta) = \exp\,[-\,t(\eta)]/M[t(\eta)],$$

tomando todas las integrales entre 0 y η. Todas las propiedades requeridas, salvo la convergencia de las integrales, se satisfacen entonces evidentemente.

(*) En realidad, a los efectos de la demostración del Teorema 3, alcanzaría considerar el caso $\delta = 1$. El caso general se precisa para la demostración de un teorema análogo al 3 relativo a la estabilidad asintótica en grande.

Digo que, para $\eta < \eta_0$ (en que η_0 es tal que $t'(\eta_0) = -1$) y $0 \leqq p \leqq s+1$, se tiene $G^{(p)}(\eta) \leqq H(\eta)$. Esto es cierto para $p = s+1$; supongámoslo cierto para un determinado valor de p, $0 < p \leqq s+1$. Entonces

$$G^{(p-1)}(\eta) = \int_0^{\eta} G^{(p)}(\eta)\, d\eta \leqq \int_0^{\eta} H(\eta)\, d\eta \leqq H(\eta);$$

la última de esta serie de desigualdades es una igualdad para $\eta = 0$ y se deduce, para $0 < \eta < \eta_0$, de la desigualdad, fácil de verificar, $H \leqq H'$.

Ahora bien, dado $\delta > 0$, si

$$t \geqq \sup \{T(\delta),\ t(\eta_0)\},$$

y si $\varepsilon^* \in F_\delta$ se tendrá

$$0 \leqq \varepsilon^*(t) \leqq \delta \,.\, \varepsilon(t) \leqq \eta(t),$$

de donde

$$G^{(p)}[\varepsilon^*(t)] \leqq H[\varepsilon^*(t)] \leqq H[\eta(t)] = e^{-t}/M(t)$$

y la integral

$$\int^{+\infty} G^{(p)}[\varepsilon^*(t)] \,.\, M(t)\, dt$$

es mayorada por

$$\int^{+\infty} e^{-t}\, dt,$$

lo que prueba la convergencia uniforme.

Demostración del Teorema 3. - Sean $\delta(\varepsilon), \delta_0, T(\varepsilon)$ los números y funciones que caracterizan la estabilidad asintótico-uniforme de la solución $x = 0$; suponemos $\delta_0 < \delta(a)$. Sea

$$\varepsilon(\tau) = \sup \{\|F(t_0 + \tau, x_0, t_0)\| : \|x_0\| \leqq \delta_0,\ t_0 \geqq 0\}.$$

Por la estabilidad asintótico-uniforme, es

$$\varepsilon(\tau) \leqq a \quad \text{y} \quad \lim_{\tau \to +\infty} \varepsilon(\tau) = 0$$

Admitiendo que se verifique la hipótesis suplementaria a) (siempre es así si se toma $s = 1$), del Teorema 2 resulta que

$$F(t_0 + \tau, x_0, t_0)$$

admite diferenciales hasta el orden s inclusive, acotadas en toda región acotada; sea $M(t)$ una cota superior de todas las normas de las diferenciales sucesivas en la región

$$\|x_0\| \leqq \delta_0, 0 \leqq t_0 \leqq t, 0 \leqq \tau \leqq t;$$

podemos suponer $M(t)$ crecciente y diferenciable.

Dadas las funciones $\varepsilon(t)$ y $M(t)$, construyamos la función $G(\eta)$ de acuerdo al Lema, y definamos, para $\|x\| \leqq \delta_0$, $t \geqq 0$,

$$V(x, t) = \int_t^{+\infty} G[R(\tau, x, t)]\, d\tau = \int_0^{+\infty} G[R(t + \tau, x, t)]\, d\tau,$$

en que $R(\tau, x, t) = \|F(\tau, x, t)\|$. En virtud de la definición de $\varepsilon(\tau), M(\tau)$ y $G(\eta)$, la última integral y las integrales que se obtienen por diferenciación

$$\int_t^{+\infty} G^{(p)}[R(t + \tau, x, t)] \,.\, \delta^{(p)} R[(t + \tau, x, t);$$
$$\delta_1(x, t), \delta_2(x, t), \ldots, \delta_p(x, t)]\, d\tau$$

tienen su resto desde t a $+\infty$ mayorado en norma por

$$\int_t^{+\infty} G[\varepsilon(\tau)]\, d\tau \quad \text{y}$$

$$\int_t^{+\infty} G^{(p)}[\varepsilon(\tau)] \,.\, M(\tau)\, d\tau \,.\, \|\delta_1(x, t)\| \,.\, \|\delta_2(x, t)\| \ldots \|\delta_p(x, t)\|,$$

respectivamente, y son, por tanto, uniformemente convergentes. Esto prueba que V posee diferenciales hasta el orden s inclusive. Si f satisface la hipótesis b), las diferenciales de $F(t+\tau, x, t)$ hasta el orden m inclusive son mayoradas por expresiones de la forma $Ae^{B\tau}$ (Teorema 2), con A, B independientes de (x, t); entonces las diferenciales de V hasta el orden m inclusive están mayoradas por expresiones de la forma

$$A\int_{t}^{+\infty} G^{(p)}[\varepsilon(\tau)] \,.\, e^{B\tau}\, d\tau$$

y V satisface la hipótesis b). Si f satisface la hipótesis c) con período ϑ, se tiene

$$F(t+\tau, x, t) = F(t+\tau+\vartheta, x, t+\vartheta)$$

y de ahí

$$V(x, t+\vartheta) = V(x, t).$$

El caso de la hipótesis d) es consecuencia de c).

Basta pues verificar las hipótesis (L). Si el punto (x, t) se mueve sobre una trayectoria fija que pasa, digamos, por (x_0, t_0), se tiene

$$V(x, t) = \int_{t}^{+\infty} G[R(\tau, x_0, t_0)]\, d\tau$$

y, por tanto,

$$\delta V[(x, t);\ (f, 1)] = -G[R(t, x_0, t_0)] = -G(\|x\|) = -c(\|x\|).$$

Puesto que $\|\delta f\| \leqq B$ en todo el cilindro $\|x\| \leqq a, t \geqq 0$, se tendrá $\|F(t+\tau, x, t)\| \geqq \|x\| \,.\, e^{-B\tau}$, de donde

$$V(x, t) \geqq \int_{0}^{1} G[R(t+\tau, x, t)]\, d\tau \geqq G(\|x\| \,.\, e^{-B}) = a(\|x\|).$$

Por último, dado $b > 0$ bastante pequeño, sea $u(b)$ tal que

$$\int_{u(b)}^{+\infty} G[\varepsilon(\tau)]\,d\tau = b/2,$$

y $v(b)$ tal que

$$u(b)\,.\,G[v(b)] = b/2. \quad \text{Si} \quad \|x\| = \delta[v(b)],$$

se tendrá

$$V(x, t) = \int_0^{u(b)} G[R(t+\tau, x, t)]\,d\tau + \int_{u(b)}^{+\infty} G[R(t+\tau, x, t)]\,d\tau$$

$$\leqq u(b)\,.\,G[v(b)] + \int_{u(b)}^{+\infty} G[\varepsilon(\tau)]\,d\tau = b = b(\|x\|),$$

en que $b = b(r)$ es la función inversa de $r = \delta[v(b)]$.

BIBLIOGRAFIA

[1] Fréchet, M., *La notion de différentielle en Analyse générale.* Annales Scient. École Norm. Sup. 42 (1925) 293-323.

[2] Malkin, I. G., *Sobre la cuestion del recíproco del Teorema de Lyapunov acerca de la estabilidad asintótica.* Prikladnaya Matematika i Mehanika 18 (1954) 129-138.

[3] Massera, J. L., *On Liapounoff's conditions of stability.* Annals of Mathematics 50 (1949) 705-721.