AXIOMES INDEPENDANTS POUR LES ALGEBRES DE BROUWER

par ANTONIO MONTEIRO

1 - *Résumé.* — Dans cette note nous indiquons une caractérisation des algèbres de Brouwer au moyen de six axiomes indépendants et nous étudions aussi la notion d'Algèbre de Brouwer Généralisée.

2 - *La définition de Garrett Birkhoff.* — Soit A un *ensemble ordonné,* c'est-à-dire. un ensemble, non vide, A sur lequel est définie une relation binaire ($\leqq$) que vérifie les axiomes suivants:

Axiome 01: $a \leqq a$.
Axiome 02: si $a \leqq b$ *et* $b \leqq a$ *alors* $a = b$.
Axiome 03: si $a \leqq b$ *et* $b \leqq c$ *alors* $a \leqq c$.

Nous dirons que A a un *premier élément* s'il existe un élément 0 de A tel que: $0 \leqq x$, quel que soit x de A.

Nous dirons que A a un *dernier élément* s'il existe un élément 1 de A tel que: $x \leqq 1$ quel que soit x de A.

Nous dirons que c est la *borne inférieure* des éléments a et b si:

I1: $c \leqq a$ et $c \leqq b$.
I2: Si $c_1 \leqq a$ et $c_1 \leqq b$ alors $c_1 \leqq c$

et nous écrirons: $c = a \wedge b$.

Nous dirons que c est la *borne supérieure* des éléments a et b si:

S1: $a \leqq c$ et $b \leqq c$.
S2: Si $a \leqq c_1$ et $b \leqq c_1$ alors $c \leqq c_1$

et nous écrirons: $c = a \vee b$.

Si chaque couple d'éléments de A a une borne supérieure et une borne inférieure nous dirons que A est un *rétioulé*.

Nous supposons connues les propriétés des opérations $\wedge$ et $\vee$; (voir [3]) (1).

Définition 1. - *Un réticulé A dans lequel pour chaque couple (a, b) d'éléments de A il existe un élément $c = a \rightarrow b$ de A qui vérifie les deux propriétés suivantes*:

B1) Si $a \wedge x \leqq b$ alors $x \leqq a \rightarrow b$.
B2) $a \wedge (a \rightarrow b) \leqq b$

sera dit une algèbre de Brouwer Généralisée.

Cette notion a été introduite par G. Birkhoff ([1], pag 459; [2], pag 128; [3], pag 147) sous le nom de *réticulé relativement pseudo-complementé* et par M. Ward sous le nom de «residuated lattice» (voir [12]).

Il est bien connu qu'une telle algèbre est un réticulé distributif que a pour dernier élément $a \rightarrow \mathrm{a} = 1$.

Définition 2. - *Une algèbre de Brouwer généralisée A sera dite une algèbre de Brouwer si A contient un premier élément 0.*

Comme exemple d'une Algèbre de Brouwer Généralisée qui n'a pas un premier élément nous pouvons indiquer l'ensemble A de tous les nombres réels x tels que $0 < x \leqq 1$. Dans ce cas: si $a \leqq b$ nous aurons $a \rightarrow b = 1$ et $b \rightarrow a = a$.

Il est bien connu ([3], pag. 129; [6], pag. 130) que la famille A de tous les ensembles ouverts d'un espace topologique est une algèbre de Brouwver, si nous convenons que

1°) $a \vee b$ et $a \wedge b$ représentent la réunion et l'intersection des deux ensembles ouverts a et b.

2°) Si a et b sont des ensembles ouverts alors $a \rightarrow b = i(a' \vee b)$ où a' est le complément de l'ensemble a et $i(x)$ l'intérieur de l'ensemble x.

Les relations entre les algèbres de Brouwer et le calcul propositionel intuitioniste, dans la formalisation de Heyting [5], sont bien connues. Voir à ce sujet: [10], [11], [9], [7].

---

(1) Voir la liste bibliographique indiquée à la fin de cette note.

3 - *Axiomes indépendants pour les algèbres de Brouwer généralisées.* — Dans ce paragraphe nous allons définir une algèbre de Brouwer généralisée comme un ensemble, non vide, A sur lequel sont définies trois opérations binaires et nous montrerons que cette nouvelle définition est équivalente a la Définition 1, indiquée précédemment.

Définition 1'. - *Un ensemble, non vide, A sur lequel sont définies trois opérations binaires* $\wedge, \vee, \rightarrow$ *(qui à chaque couple ordonné (a, b) d'éléments de A font correspondre les éléments $a \wedge b, a \vee b, a \rightarrow b$ de A) de telle manière que les axiomes suivants soient vérifiés* (pour tout a, b, c de A):

A1) $a \rightarrow a = b \rightarrow b$
A2) $(a \rightarrow b) \wedge b = b$
A3) $a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge b$
A4) $a \rightarrow (b \wedge c) = (a \rightarrow c) \wedge (a \rightarrow b)$
A5) $(a \vee b) \rightarrow c = (a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c)$

sera dit une algèbre de Brouwer généralisée.

Démontrons tout d'abord le Lemme suivant:

Lemme 1. *Les axiomes A1-A5 sont indépendants.*

Démonstration. 1°) *A1 est indépendant de A2, A3, A4 et A5.*

Soit A l'ensemble formé par les deux éléments 0 et 1, sur lequel on définit les opérations $\wedge, \vee, \rightarrow$, au moyen des tables suivantes:

$\rightarrow$	0	1
0	0	1
1	0	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	0
1	0	0

Les axiomes A2, A3, A4 et A5 sont vérifiés; mais l'axiome A1 ne l'est pas car $0 \rightarrow 0 \neq 1 \rightarrow 1$.

2°) *A2 est indépendant de A1, A3, A4 et A5.*

Sur le même ensemble A considérons les opérations définies par les tables suivantes:

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	1	1

$\vee$	0	1
0	1	1
1	1	1

Les axiomes A1, A3, A4 et A5 sont vérifiés, mais l'axiome $A2$ ne l'est pas car: $(0 \rightarrow 0) \wedge 0 \neq 0$.

3°) *A3 est indépendant de A1, A2, A4 et A5.*

Sur le même ensemble A, considérons les opérations définies par les tables suivantes:

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

Les axiomes $A1, A2, A4$ et $A5$ sont vérifiés tandis que $A3$ ne l'est pas car: $1 \wedge (1 \rightarrow 0) \neq 1 \wedge 0$.

4°) *A4 est indépendant de A1, A2, A3 et A5.*

Sur l'ensemble A formé par les éléments $0, a, 1$ considérons les opérations définies par les tables suivantes:

$\rightarrow$	0	a	1
0	1	1	1
a	0	1	1
1	0	a	1

$\wedge$	0	a	1
0	0	0	0
a	a	a	a
1	0	a	1

$\vee$	0	a	1
0	0	a	1
a	a	a	1
1	1	1	1

Les axiomes $A1, A2, A3$ et $A5$ son vérifiés et $A4$ ne l'est pas car: $a \rightarrow (a \wedge 0) \neq (a \rightarrow 0) \wedge (a \rightarrow a)$.

5°) *A5 est indépendant de A1, A2, A3 et A4.*

Sur l'ensemble A, formé par 0 et 1, considérons les opérations définies par les tables suivantes:

$\rightarrow$	0	1
0	1	1
1	0	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	0
1	0	0

Les axiomes $A1, A2, A3$ et $A4$ sont vérifiés et $A5$ ne l'est pas car $(0 \vee 1) \to 0 \neq (0 \to 0) \wedge (1 \to 0)$; et la démonstration est terminée.

Démonstrons maintenant le théorème suivant:

Théorème 1. *Une algèbre de Brouwer généralisée A, au sens de la définition 1', est un réticulé par rapport aux opérations* $\wedge$ *et* $\vee$, *ayant pour dernier élément* $a \to a = 1$ *et l'opération* $\to$ *vérifie les conditions suivantes*:

$B1$) *Si* $a \wedge x \leqq b$ *alors* $x \leqq a \to b$.
$B2$) $a \wedge (a \to b) \leqq b$.

Démonstration. Posons $a \to a = 1$ et démontrons sucessivement les points suivants:

1°) $1 \wedge a = a$.

En remplaçant dans $A2$, b par a nous aurons:

$$(a \to a) \wedge a = a$$

c'est-à-dire:

$$1 \wedge a = a.$$

2°) $a \wedge 1 = a \wedge a$.

En remplaçant, dans $A3$, b par a nous avons:

$$a \wedge (a \to a) = a \wedge a$$

c'est-à-dire:

$$a \wedge 1 = a \wedge a.$$

3°) $1 \to b = b$.

En remplaçant, dans $A3$, a par 1 nous aurons:

$$1 \wedge (1 \to b) = 1 \wedge b$$

d'où, par 1°)

$$1 \to b = b.$$

4°) $b \wedge c = c \wedge b$.

En remplaçant, dans $A4$, a par 1 nous avons:

$$1 \to (b \wedge c) = (1 \to c) \wedge (1 \to b)$$

c'est-à-dire, par 3°)

$$b \wedge c = c \wedge b.$$

5°) $a = a \wedge a.$

En remplaçant dans 4°) b par 1 nous avons:

$$1 \wedge a = a \wedge 1$$

d'où par 1°) et 2°):

$$a = a \wedge a.$$

6°) $a \wedge 1 = a$

c'est une conséquence de 2°) et 5°).

7°) $a \wedge (a \wedge b) = a \wedge b.$

Par $A4$, $A1$ et 6°) nous pouvons écrire successivement:

$$a \rightarrow (a \wedge b) = (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow a) = (a \rightarrow b) \wedge 1 = a \rightarrow b.$$

De cette égalité on déduit:

$$a \wedge (a \rightarrow (a \wedge b)) = a \wedge (a \rightarrow b)$$

d'où par $A3$

$$a \wedge (a \wedge b) = a \wedge b.$$

8°) $a \wedge (b \wedge c) = a \wedge ((a \wedge b) \wedge c).$

Par $A4$, $A1$, 6° et $A4$ nous pouvons écrire successivement:

$$\begin{aligned}
\text{(i)} \quad a \rightarrow (a \wedge (b \wedge c)) &= (a \rightarrow (b \wedge c)) \wedge (a \rightarrow a) \\
&= (a \rightarrow (b \wedge c)) \wedge 1 \\
&= a \rightarrow (b \wedge c) \\
&= (a \rightarrow c) \wedge (a \rightarrow b).
\end{aligned}$$

Par $A4, A1$ et 6°) nous pouvons écrire:

$$\begin{aligned}
\text{(ii)} \quad a \rightarrow ((a \wedge b) \wedge c) &= (a \rightarrow c) \wedge (a \rightarrow (a \wedge b)) \\
&= (a \rightarrow c) \wedge ((a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow a)) \\
&= (a \rightarrow c) \wedge ((a \rightarrow b) \wedge 1) \\
&= (a \rightarrow c) \wedge (a \rightarrow b).
\end{aligned}$$

De (i) et (ii) on déduit:

$$a \to (a \wedge (b \wedge c)) = a \to ((a \wedge b) \wedge c)$$

d'où:

$$a \wedge (a \to (a \wedge (b \wedge c))) = a \wedge (a \to ((a \wedge b) \wedge c)))$$

d'où, par $A3$:

$$a \wedge (a \wedge (b \wedge c))) = a \wedge ((a \wedge b) \wedge c).$$

et alors par 7°)

$$a \wedge (b \wedge c) = a \wedge ((a \wedge b) \wedge c).$$

9°) $(a \wedge b) \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c.$

En remplaçant dans 8°) a par $(a \wedge b)$ nous aurons

(i) $(a \wedge b) \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge (((a \wedge b) \wedge b) \wedge c).$

D'autre part, par 4°), 7°), 4°) et 7°)

(ii) $$\begin{aligned}(a \wedge b) \wedge (((a \wedge b) \wedge b) \wedge c) &= (a \wedge b) \wedge ((b \wedge (b \wedge a)) \wedge c) \\ &= (a \wedge b) \wedge ((b \wedge a) \wedge c) \\ &= (a \wedge b) \wedge ((a \wedge b) \wedge c). \\ &= (a \wedge b) \wedge c.\end{aligned}$$

De (i) et (ii) on déduit 9°).

10°) $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c.$

En utilisant successivement 4°), 4°), 9°), 4°), 4°) et 9°) nous aurons:

$$\begin{aligned}a \wedge (b \wedge c) &= (b \wedge c) \wedge a = (c \wedge b) \wedge a = (c \wedge b) \wedge (b \wedge a) = \\ &= (b \wedge a) \wedge (c \wedge b) = (a \wedge b) \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c.\end{aligned}$$

Remarque. Les formules 4°), 5°) et 10°) montrent que A est un ensemble réticulé inférieurement relativement à l'opération $\wedge$; c'est-à-dire: si nous posons $a \leqq b$ lorsque $a = a \wedge b$, alors la relation $\leqq$ ainsi définie est une relation d'ordre et par raport à cette relation la borne inférieure de a et b est précisément $a \wedge b$. Dans ces conditions chaque couple d'éléments de A a une borne inférieure $a \wedge b$, ce que nous exprimons en disant que A est un ensemble réticulé inférieurement. La formule 1°)

montre en outre que 1 est le dernier élément de A. Démontrons maintenant que $a \vee b$ est la borne supérieure de a et b, par rapport à relation d'ordre que nous venons de définir.

11°) *$a \leqq b$ est équivalent à $a \rightarrow b = 1$.*

Supposons que $a \leqq b$, c'est-à-dire que $a = a \wedge b$.

Alors en utilisant successivement $A1, A4, A1$ et 6°) nous avons

$$1 = a \rightarrow a = a \rightarrow (a \wedge b) = (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow a)$$
$$= (a \rightarrow b) \wedge 1 = a \rightarrow b.$$

Réciproquement soit $1 = a \rightarrow b$, alors

$$a \wedge 1 = a \wedge (a \rightarrow b)$$

d'où l'on déduit par 6°) et $A3$) que $a = a \wedge b$, c'est-à-dire $a \leqq b$.

12°) $a \leqq a \vee b$; $b \leqq a \vee b$.

En effet par $A1$:

$$(a \vee b) \rightarrow (a \vee b) = 1$$

d'où par $A5$:

$$(a \rightarrow (a \vee b)) \wedge (b \rightarrow (a \vee b)) = 1$$

et comme A est réticulé inférieurement alors

$$a \rightarrow (a \vee b) = 1 \quad \text{et} \quad b \rightarrow (a \vee b) = 1$$

d'où par 11°)

$$a \leqq a \vee b \quad \text{et} \quad b \leqq a \vee b.$$

13°) *Si $a \leqq x$ et $b \leqq x$ alors $a \vee b \leqq x$.*

Des hypothèses on déduit par 11°) que

$$a \rightarrow x = 1 \text{ et } b \rightarrow x = 1.$$

En utilisant $A5$ nous pouvons écrire:

$$(a \vee b) \rightarrow x = (a \rightarrow x) \wedge (b \rightarrow x) = 1 \wedge 1 = 1$$

d'où par 11°)

$$a \vee b \leqq x.$$

Nous venons donc de montrer que A est un ensemble réticulé par rapport aux opérations $\wedge$ et $\vee$.

Démonstrons maintenant que

Propriété B1. *Si* $a \wedge x \leqq b$ *alors* $x \leqq a \rightarrow b$.

Soit x tel que $a \wedge x \leqq b$, c'est-à-dire:

$$a \wedge x = a \wedge b \wedge x.$$

Alors

$$a \rightarrow (a \wedge x) = a \rightarrow (a \wedge b \wedge x)$$

d'où

$$(a \rightarrow a) \wedge (a \rightarrow x) = (a \rightarrow a) \wedge (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow x)$$

c'est-à-dire

$$(a \rightarrow x) = (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow x)$$

donc

$$(a \rightarrow x) \wedge x = (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow x) \wedge x$$

et alors par $A2$

$$x = (\mathrm{a} \rightarrow b) \wedge x$$

c'est-à-dire:

$$x \leqq a \rightarrow b.$$

Propriété B2. $a \wedge (a \rightarrow b) \leqq b$.

En effet par $A3$:

$$a \wedge (a \rightarrow b) = a \wedge b \leqq b$$

et la démonstration du théorème est terminée.

Nous venons donc de voir que si A est une algèbre de Brouwer généralisée, au sens de la Définition 1′, il en est de même au sens de la Définition 1.

D'autre part, il est bien connu, que dans une algèbre de Brouwer généralisée, au sens de la Définition 1, les formules de calcul $A1 - A5$ sont vérifiées (voir [4] et [12]).

Corolaire. — Les définitions 1 et 1′ sont équivalentes.

4 - *Axiomes indépendants pour les algèbres de Brouwer.* — Des résultats indiquées dans le numero précedent et de la Définition 2, on déduit le résultat suivant:

Théorème 2. — *Un ensemble, non vide, A sur lequel sont définies trois opérations binaires $\wedge, \vee$ et $\rightarrow$ qui vérifient les axiomes:*

$A0$) *Il existe un élément 0 de A tel que $0 \wedge a = 0$, quel que soit a de A,*

$A1, A2, A3, A4$ et $A5$ est une algèbre de Brouwer (²).

Si l'on remarque que l'axiome $A0$) est indépendant des axiomes $A1 - A5$, (comme on le voit en considérant l'ensemble A de tous les nombres réels x tels que $0 < x \leqq 1$) on reconnait que nous venons d'indiquer une définition d'algèbre de Brouwer au moyen de six égalités indépendantes.

McKinsey et Tarski [6], ont aussi indiquée une définiton d'algèbre de Brouwer au moyen d'équations. Les postulats de ces auteurs sont les suivants:

1°) A est un réticulé contenant un prémier élément 0.

vi) $(a \wedge (a \rightarrow b)) \wedge b = a \wedge (a \rightarrow b)$

vii) $(a \rightarrow (a \wedge b)) \wedge b = b$

viii) $a \rightarrow (b \wedge c) = (a \rightarrow (b \wedge c)) \wedge (a \rightarrow b)$.

Les axiomes que nous avons indiqué sont plus simples, moins nombreux et indépendants.

(²) Ce théorème a été indiqué, sans demostration, dans [8].

5 - *Les systèmes implicatifs.* — Un ensemble ordonné A, où chaque couple d'éléments a une borne inférieure $a \wedge b$ et que vérifie les axiomes $B1$ et $B2$, indiquées dans la définition 1, sera dit un *système implicatif*. Cete notion a été introduite par H. Curry ([4], pag. 66) sous le nom de *groupe logique implicatif*. D'après cet auteur dans un tel système sont valables les formules $A1 - A4$. Nous pouvons démontrer la réciproque.

Théorème 3. — *Un ensemble, non vide, A sur lequel sont définies deux opérations binaires $\wedge$ et $\rightarrow$ que vérifient les axiomes $A1, A2, A3$ et $A4$ est un système implicatif.*

Démonstration. -Il suffit de suprimer dans la démonstration du Théorème 1, les points 12°) et 13°) que sont les seuls où intervient l'opération $\vee$.

Nous avons ainsi une définition de système implicatif au moyen de quatre axiomes indépendants.

BIBLIOGRAPHIE

BIRKHOFF (Garrett)

[1] *On the combination of subalgebras.* Proc. Camb. Phil. Soc. 29 (1933), 441-464.

[2] *Lattice Theory.* American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXV, New York City, 1940.

[3] *Lattice Theory.* American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXV, New Yory City, 1948.

CURRY (Haskell B.)

[4] *Leçons de Logique Algébrique.* Collection de Logique Mathématique. Série A, Vol. 2, París, 1952.

HEYTING (Arend)

[5] *Die formalen Regeln des intuitionistischen Logik.* Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften, physikalische mathematische Klasse, 1930, 42-56.

McKINSEY (J. C. C.) and TARSKI (Alfred)

[6] *On closed elements in closure algebras,* Annals of Mathematics, Vol. 47 (1946), 122-162.

[7] *Some theorems about the sentencial calculi of Lewis and Heyting.* Journal of Symbolic Logic, Vol. 13 (1948), 1-15.

MONTEIRO (António)

[8] *L'arythmétique des filtres et les espaces topologiques.* Segundo Symposium Latino Americano de Matemática. Centro de Cooperación Científica de la Unesco para América Latina. Montevideo, 1954, págs. 129-162.

OGASAWARA (Tôzirô)

[9] *Relation between Intuitionistic Logic and Lattice.* Journal of Science of the Hiroshima University. Series A, Vol. 9 (1939), págs. 157-164.

STONE (Marshall)

[10] *Topological representations of distributive lattices and Brouwerian lattices.* Cas. Mat. Fys., 67 (1937), 1-25.

TARSKI (Alfred)

[11] *Der Aussagenkalkül und die Topologie.* Fundamenta Mathematicae, Vol. 31 (1938), págs. 103-134.

WARD (Morgan)

[12] *Structure Residuation.* Annals of Mathematics, Vol. 33 (1938), págs. 558-568.

FACULTAD DE INGENIERÍA
San Juan — Argentina.