LOS NUMEROS DERIVONORMADOS DE FUNCIONES VECTORIALES

por PEDRO PI CALLEJA, La Plata (Argentina)

Introducción

Mediante el concepto de número derivonormado (fórmulas [1] y [15]) extendemos los resultados incluídos en el tratado de Bourbaki (1) sobre funciones vectoriales de variable real o compleja, donde se supone la existencia de derivada lateral, mientras que nosotros prescindimos de esta restricción y alcanzamos resultados análogos a los que L. Scheeffer (2) obtuvo para las funciones numéricas mediante los números derivados [2] de Dini (3).

Damos además una demostración original distinta a la de Bourbaki (1), que mucho simplifica también la primitiva de Scheeffer (2) si se aplica a función numérica (4) y que permite generalizar a funciones vectoriales de variable real o compleja el resultado de Scheeffer (2), lo que no se consigue mediante el método de Bourbaki (1). Precisamos además los enunciados de Bourbaki (1), en puntos que éste aplaza para libro posterior de su obra, no aparecido aún.

---

(1) N. BOURBAKI, *Éléments de Mathématique. Première partie: Les structures fondamentales de l'Analyse*. Livre IV: *Fonctions d'une variable réelle*; Chap. I: *Dérivées*; § 2: *Le théorème des accroissements finis* (Act. sci. et ind., nº 1074; Hermann, Paris, 1949).

(2) L. SCHEEFFER, Acta Mathematica, *5*, 1884; págs. 52-283.

(3) U. DINI, *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali* (Pisa, 1878).

(4) Véase Cap. IX, nota V, b_1 de la 2ª ed. de J. REY PASTOR, P. PI CALLEJA, C. A. TREJO, *Análisis matemático* I (2ª edic., Kapeluz, Bs. Aires, 1956).

Incluímos también otra demostración del teorema de incrementos finitos para funciones vectoriales, utilizando el lema de Zygmund (5) adaptado a este caso vectorial.

Bourbaki (1) ya muestra cuán importantes son las propiedades topológicas del cuerpo real R para la validez del teorema de incrementos finitos, recordando que dicha validez puede perderse si se toma la variable independiente sobre un cuerpo valuado K cuaquiera, tal el p-ádico de K. Hensel (6), donde puede darse ejemplo de una función continua no constante que en todo punto tenga derivada nula. Es interesante observar que el teorema de incrementos finitos de funciones vectoriales de variable compleja enunciado mediante los números derivonormados [15] sufre también ahora modificación, representando un caso intermedio entre el de variable real y el de variable p-ádica.

§ 1. — *Diremos que tenemos un espacio vectorial* E *sobre cuerpo (conmutativo)* K, si para $\mathrm{x} \in \mathrm{E}$, $\mathrm{y} \in \mathrm{E}$, $\alpha \in K$ se han definido operaciones unívocas $\mathrm{x}+\mathrm{y} \in \mathrm{E}$, $\alpha\,\mathrm{x} \in \mathrm{E}$, tales que cumplan las condiciones: E_1). Las sumas $\mathrm{x}+\mathrm{y}$ forman un grupo abeliano (o conmutativo); E_2). Rigen las leyes distributivas $\alpha(\mathrm{x}+\mathrm{y})=\alpha\,\mathrm{x}+\alpha\,\mathrm{y}$, $(\alpha+\beta)\,\mathrm{x}=\alpha\,\mathrm{x}+\beta\,\mathrm{x}$, y la ley asociativa $\alpha(\beta\,\mathrm{x})=(\alpha\,\beta)\,\mathrm{x}$ para cualesquiera α y β de K y x e y de E; E_3). Rige la ley unitaria: Para la unidad μ de K es $\mu\,\mathrm{x}=\mathrm{x}$ para todo x de E.

Un *cuerpo valuado* K es un cuerpo en el que se ha definido una *valuación* mediante una aplicación de K en el conjunto R_+ de números reales no negativos, tal que a cada $\alpha \in K$ corresponde unívocamente un valor $|\alpha| \in R_+$ que cumple: V_1) $|\alpha|=0$ cuando y sólo cuando $\alpha=\vartheta$, donde ϑ es el módulo de la adición en K; V_2) $|\alpha\,.\,\beta|=|\alpha|\,.\,|\beta|$, para cualesquiera α y β de K; V_3) $|\alpha+\beta| \leqq |\alpha|+|\beta|$, para cualesquiera α y β de K (propiedad triangular).

Por dichas condiciones se define una *métrica* en K con *distancia* $\rho(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|$. Recordemos que se da un «distanciamiento» («*écart*» según la terminología de Bourbaki (7))

(5) Citado en S. Saks, *Theory of the integral* (2ª ed., Varsovia, 1937, p.203).

(6) K. Hensel, *Theorie der algebraischen Zahlen* (Teubner, Leipzig, 1903; *Zahlentheorie* (Göschen, Berlin, 1913); Mathematische Zeitschrift, *2*, pág. 433, 1918.

(7)) N. Bourbaki, Obra citada (1). Livre III: *Topologie générale*; Chap.

en un conjunto C si a cada par $\alpha \in C$, $\beta \in C$ corresponde un número real (finito o infinito) $\rho(\alpha, \beta)$ que cumpla: D_1') $\rho(\alpha, \alpha) = 0$ para todo α de C; D_2) $\rho(\beta, \gamma) \leqq \rho(\alpha, \beta) + \rho(\alpha, \gamma)$ para cualesquiera α, β, γ de C (propiedad triangular). De estas dos propiedades *se deducen* fácilmente los teoremas: D_3) $\rho(\alpha, \beta) \geqq 0$ para cualesquiera α y β de C; D_4) $\rho(\alpha, \beta) = \rho(\beta, \alpha)$ para cualesquiera α y β de C (simetría). El recíproco de D_1') puede no cumplirse, es decir, puede ser $\rho(\alpha, \beta) = 0$ con $\alpha \neq \beta$. Pero como la relación $\rho(\alpha, \beta) = 0$ es siempre reflexiva, simétrica y transitiva para un «distanciamiento» en C, resulta una relación de equivalencia que divide al conjunto C en clases cuyo «distanciamiento» subordinado mediante el mismo $\rho(\alpha, \beta)$, donde α es un elemento cualquiera de su clase de «iguales» y β análogamente, cumple ya: D_1) $\rho(\alpha, \beta) = 0$ cuando y sólo cuando $\alpha = \beta$.

Si a cada par α y β de C corresponde unívocamente un número real *finito* $\rho(\alpha, \beta)$ que cumple D_1) y D_2) se tendrá introducida una *distancia* en C. La distancia define en C un *espacio métrico* con una *topología separada* (es decir, según la terminología de Bourbaki[8] que cumpla el axioma de separación de Hausdorff: Dos puntos distintos tienen siempre entornos sin punto común) lo que podía no ocurrir para el «distanciamiento».

Pero además, la métrica introducida en el cuerpo valuado K mediante la distancia $\rho(\alpha, \beta) = |\alpha - \beta|$ define una topología compatible con el grupo aditivo de K y con la estructura de cuerpo de K. Con lo primero queremos decir que $\rho(\alpha, \beta)$ es invariante sobre el grupo aditivo de K (para todo γ de K es $\rho(\alpha + \gamma, \beta + \gamma) = \rho(\alpha, \beta)$) con conservación de entornos en toda traslación γ, y con lo segundo que en dicha topología son continuas $\alpha \,.\, \beta$ y α^{-1} en $\alpha_0 \neq \vartheta$, con ϑ módulo de la adición en K. Pues es

$$|\alpha \beta - \alpha_0 \beta_0| = |(\alpha - \alpha_0)(\beta - \beta_0) + (\alpha - \alpha_0)\beta_0 + \alpha_0(\beta - \beta_0)| \leqq$$
$$\leqq |\alpha - \alpha_0| . |\beta - \beta_0| + |\beta_0| . |\alpha - \alpha_0| + |\alpha_0| . |\beta - \beta_0|,$$

IX: *Utilisation des nombres réels en topologie générale*; § 1: *Génération d'une structure uniforme par une famille d'écarts. Espaces uniformisables.* (Act. sci. et ind., nº 1045; Hermann, Paris, 1948).

(8) N. Bourbaki, Obra citada (1). Livre III citado (7); Chap. I: *Structures topologiques*; § 6: *Limites.* (Act. sci. et ind., nº 858-1142, 2e éd.; Hermann, Paris, 1951).

tan pequeño como se quiera con $|\alpha - \alpha_0|$ y $|\beta - \beta_0|$. También es

$$|\alpha^{-1} - \alpha_0^{-1}| = |\alpha^{-1}(\alpha_0 - \alpha)\,\alpha_0^{-1}| = \frac{|\alpha - \alpha_0|}{|\alpha_0| . |\alpha|} \leqq \frac{\varepsilon}{|\alpha_0| . (|\alpha_0| - \varepsilon)}$$

para $0 < |\alpha - \alpha_0| \leqq \varepsilon < |\alpha_0|$.

Un *espacio normado* E sobre un cuerpo valuado K es un espacio vectorial E en el que se ha definido una *norma* mediante una aplicación de E en el conjunto R_+ de números reales no negativos, tal que a cada $x \in E$ corresponde unívocamente una norma $\|x\| \in R_+$ que cumple: N_1) $\|x\| = 0$ cuando y sólo cuando $x = \bar{0}$, siendo $\bar{0}$ el módulo del grupo aditivo E_1) en E; N_2) $\|x + y\| \leqq \|x\| + \|y\|$ para cualesquiera x e y de E (propiedad triangular); N_3) $\|\alpha . x\| = |\alpha| . \|x\|$ para cualesquiera α de K y x de E.

Por dichas condiciones se define una métrica en E de distancia $\rho(x, y) = \|x - y\|$ invariante sobre el grupo aditivo de E y también con αx continua en $K \times E$, pues es

$$\|\alpha x - \alpha_0 x_0\| = \|(\alpha - \alpha_0)(x - x_0) + (\alpha - \alpha_0) x_0 + \alpha_0(x - x_0)\| \leqq$$
$$\leqq |\alpha - \alpha_0| . \|x - x_0\| + |\alpha - \alpha_0| . \|x_0\| + |\alpha_0| . \| - x_0\|,$$

tan pequeño como se quiera con $|\alpha - \alpha_0|$ y $\|x - x_0\|$.

Hemos precisado bien la terminología y contenido de los conceptos a emplear para mostrar el amplio alcance de los resultados obtenidos en los teoremas siguientes.

§ 2. — Dada una función vectorial $f(x)$ de variable real x con valores en un espacio normado E sobre el cuerpo real R, si consideramos la norma del cociente incremental de $f(x)$ en x, podemos definir el *número derivonormado*, siempre existente:

$$[1] \qquad N_+f(x) = \liminf_{y \to x+} \frac{\|f(y) - f(x)\|}{|y - x|} \geqq 0,$$

y análogamente $N^+f(x)$ (con lím sup), $N_-f(x)$, $N^-f(x)$ (a la izquierda).

Respecto a una función numérica $g(x)$ de variable real, designaremos los números derivados de D i n i (3) por

$$[2] \qquad D_+g(x) = \liminf_{y \to x+} \frac{g(y)-g(x)}{y-x},$$

y análogamente $D^+g(x)$ (con lím sup), $D_-g(x)$, $D^-g(x)$ (a la izquierda).

Tendremos entonces el siguiente *teorema de incrementos finitos para funciones vectoriales de variable real*:

T e o r. 1.—*Sea* $\mathrm{f}(x)$ *una función vectorial definida y continua en un intervalo cerrado y acotado* $I = [a; b]$ *del cuerpo* R *de números reales que toma sus valores en un espacio normado* E *sobre* R; *sea* $g(x)$ *una función numérica, continua y creciente en* I, *tal que en el complemento de un conjunto numerable* A *respecto de* $[a; b)$ *se cumpla*

$$[3] \qquad N_+\mathrm{f}(x) \leqq D_+g(x),$$

no siendo ambos miembros de [3] *simultáneamente infinitos en dicho complemento. Entonces es*

$$[4] \qquad \|\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(a)\| \leqq g(b) - g(a).$$

Si además, existe al menos un punto de $[a; b)$ *donde sea*

$$[5] \qquad N_+\mathrm{f}(x) < D_+g(x),$$

entonces es

$$[6] \qquad \|\mathrm{f}(b) - \mathrm{f}(a)\| < g(b) - g(a).$$

En dicho teorema se puede sustituir en [3] o [5] $N_+\mathrm{f}(x)$ y $D_+g(x)$ por $N^+\mathrm{f}(x)$ y $D^+g(x)$ o también por $N_-\mathrm{f}(x)$ y $D_-g(x)$ o por $N^-\mathrm{f}(x)$ y $D^-g(x)$ en $(a; b]$ a menos de un conjunto numerable; en donde existan las derivadas laterales, será

$$\|\mathrm{f}'_+(x)\| = N_+\mathrm{f}(x) = N^+\mathrm{f}(x), \quad g'_+(x) = D_+g(x) = D^+g(x),$$

pudiéndose efectuar en las hipótesis [3] o [5] las correspondientes sustituciones.

En el teorema análogo, Bourbaki (1) exige esta existencia de las derivadas laterales de las funciones $\mathrm{f}(x)$ y $g(x)$ y aplaza para libro posterior de su obra, no aparecido aún, precisar el caso de igualdad que aquí resolvemos por procedimiento muy sencillo.

Primera demostración del teorema 1. — Demostremos por nuestro método que en las condiciones de hipótesis de la primera parte del teorema es absurdo suponer que es

$$\|\mathrm{f}(b)-\mathrm{f}(a)\|>g(b)-g(a).$$

Pues en dicho caso, existirían números positivos $K>0$ y $p>0$, tales que para todo k del intervalo $(0; K)$ sería:

$$\|\mathrm{f}(b)-\mathrm{f}(a)\|>g(b)-g(a)+k(b-a)+p.$$

Si consideramos la función numérica, continua en $[a; b]$:

[7] $$\varphi(x,k)=\|\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(a)\|-g(x)+g(a)-k(x-a)-p,$$

se cumple $\varphi z,k)<0$, $\varphi(b,k)>0$ y por un teorema clásico de Bolzano sobre funciones continuas, existirá al menos un punto x de $(a; b)$ donde $\varphi(x,k)=0$. Para cada k de $(0; K)$ existirá un bien determinado punto c de $(a; b)$ que sea extremo superior de los puntos de $(a; b)$ donde $\varphi(x,k)=0$ y por la conservación de signo de una función continua en el entorno de un punto donde no es nula, habrá de ser $\varphi(c,k)=0$. Además, se conservará $\varphi(x,k)>0$ para todo x de $(c; b)$, pues es $\varphi(b,k)>0$ y no puede anularse $\varphi(x,k)$ en $(c; b)$. Esto implica que c pertenece al conjunto numerable A, pues si c perteneciera al complemento de A respecto de $[a; b)$ y fuese $D_+g(c)=+\infty$, existiría algún x de $(c; b)$ que cumpla

$$\frac{\|\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(c)\|}{x-c}\leqq N_+\mathrm{f}(c)+1\leqq\frac{g(x)-g(c)}{x-c}.$$

(Si en la hipótesis interviniese $D^+g(c)=+\infty$, al emplear $N^+\mathrm{f}(c)$

no simultáneamente infinito con $D^{+}g(c)$, podríamos establecer la misma desigualdad entre los miembros extremos). Si en cambio fuese finito $D_{+}g(c)$, al cumplirse por [3] la $N_{+}\mathrm{f}(c) \leqq D_{+}g(c)$ sería

$$\liminf_{x \to c+} \frac{\|\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(c)\|-(g(x)-g(c))}{x-c} \leqq N_{+}\mathrm{f}(c) - D_{+}g(c) \leqq 0,$$

y por tanto, en este caso como en el anterior, para $k > 0$ existiría *algún* x de $(c;\, b)$ que cumpiese

$$[8] \qquad \|\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(c)\| \leqq g(x)-g(c)+k(x-c).$$

(Obsérvese que con el método de demostración de Bourbaki [1] se habría de establecer la anterior [8] para *todo* x de un entorno a la derecha de c y no sólo para *algún* x de dicho entorno, por lo que dicho método no es aplicable a nuestra hipótesis de sustituir los límites que dan las derivadas laterales por los respectivos límites de oscilación).

Así pues, si c perteneciese al complemento de A respecto de $[a;\, b)$, en dicho punto x de $(c;\, b)$ por la condición $N_2)$ de § 1, la [8] y cumplirse $\varphi(c,k)=0$, sería $\|\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(a)\| \leqq \leqq \|\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(c)\| + \|\mathrm{f}(c)-\mathrm{f}(a)\| \leqq g(x)-g(c)+k(x-c)+g(c)- - g(a)+k(c-a)+p = g(x)-g(a)+k(x-a)+p$, es decir, por [7], en dicho punto x de $(c;\, b)$ sería $\varphi(x,k) \leqq 0$ que contradice la conclusión a que habíamos llegado de conservarse $\varphi(x,k)>0$ para todo x de $(c;\, b)$.

Sentado que c pertenecería al conjunto numerable excepcional A, si ahora consideramos para $k_1 \neq k_2$ y un mismo punto x la diferencia

$$\varphi(x,k_1)-\varphi(x,k_2)=(k_1-k_2)\,(x-a),$$

ésta no puede anularse para $x \neq a$. Como para todo k de $(0;\, K)$ es $\varphi(a,k)<0$, si $\varphi(c,k_1)=0$, no podrá corresponder a $k_2 \neq k_1$ el mismo $c(k_1)$. Así habríamos establecido una correspondencia biunívoca entre el intervalo *continuo* $(0;\, K)$ y un conjunto $c(k)$ contenido en el conjunto *numerable* A, lo que es absurdo, con lo que queda demostrado [4].

Si se verificase

$$[9] \qquad \|\mathfrak{f}(b)-\mathfrak{f}(a)\| = g(b)-g(a),$$

entonces para todo x e y tales que $a \leqq x < y \leqq b$, sería también

$$[10] \qquad \|\mathfrak{f}(y)-\mathfrak{f}(x)\| = g(y)-g(x),$$

pues en caso de ser $\|\mathfrak{f}(y)-\mathfrak{f}(x)\| < g(y)-g(x)$, de esto, la aplicación de [4] a los intervalos $[a; x]$, $[y; b]$ y la propiedad triangular N_2 (§ 1), resultaría

$$\|\mathfrak{f}(b)-\mathfrak{f}(a)\| \leqq \|\mathfrak{f}(b)-\mathfrak{f}(y)\| + \|\mathfrak{f}(y)-\mathfrak{f}(x)\| + \|\mathfrak{f}(x)-\mathfrak{f}(a)\| <$$
$$< g(b)-g(y)+g(y)-g(x)+g(x)-g(a) = g(b)-g(a),$$

contrariamente a [9].

Por tanto, si en lugar de [6] se verifica [9], por [10] aplicado a la definición [1] de $N_+\mathfrak{f}(x)$ y a la [2] de $D_+g(x)$, sería $N_+\mathfrak{f}(x) = D_+g(x)$ en todo punto de $[a; b)$ contrariamente a lo supuesto en [5] y así quede también demostrada la última parte del teorema 1.

§ 3. — El anterior teorema 1 puede demostrarse siguiendo el método de Zygmund (5), mediante el lema previo:

Teor. 2. — *Sea* $\mathfrak{f}(x)$ *una función vectorial definida y continua en un intervalo cerrado y acotado* $I=[a; b]$ *del cuerpo* R *de números reales que toma sus valores en un espacio normado* E *sobre* R *y sea* $h(x)$ *una función numérica, continua y creciente en* I. *Si los valores funcionales*

$$[11] \qquad F(x) = \|\mathfrak{f}(x)-\mathfrak{f}(a)\| - h(x) + h(a),$$

donde

$$[12] \qquad N_+\mathfrak{f}(x) \geqq D_+h(x),$$

no contienen ningún intervalo no-degenerado, entonces se conserva

[13] $$F(x) \leqq 0$$

en I.

En dicho teorema, se puede en [12] sustituir $N_+\mathrm{f}(x)$ y $D_+h(x)$ $N^+\mathrm{f}(x)$ y $D^+h(x)$, o por $N_-\mathrm{f}(x)$ y $D_-h(x)$, o por $N^-\mathrm{f}(x)$ y $D^-h(x)$.

Para demostrarlo, sea S el subconjunto de I donde se cumpla [12], suponiendo por hipótesis que el conjunto funcional $F(S)$ no contiene ningún intervalo no-degenerado. Vamos a ver que llegamos a una contradicción si suponemos que existe un punto x_1 de $(a; b]$ tal que $F(x_1) > 0$. Pues en el intervalo no-degenerado $(0; F(x_1))$ existiría siempre un valor y_0 no perteneciente a $F(S)$ y sea x_0 el extremo superior de los puntos del intervalo $[a; x_1]$ donde $F(x) \leqq y_0$. Como $F(a) = 0$ y $0 < y_0 < F(x_1)$, por la continuidad de $F(x)$ debe ser $a < x_0 < x_1$ y $F(x_0) = y_0$, conservándose $F(x) > y_0$ para todo x de $(x_0; x_1]$. Entonces, para este intervalo, por [11] sería:

$$\|\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(a)\| - h(x) + h(a) > \|\mathrm{f}(x_0) - \mathrm{f}(a)\| - h(x_0) + h(a),$$

de donde por la propiedad triangular N_2) (§ 1) se deduce:

$$\|\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(x_0)\| \geqq \|\mathrm{f}(x) - \mathrm{f}(a)\| - \|\mathrm{f}(x_0) - \mathrm{f}(a)\| > h(x) - h(x_0),$$

que al ser aplicada a las definiciones [1] y [2] daría $N_+\mathrm{f}(x_0) \geqq D_+h(x_0)$ es decir, por [12], el punto x_0 pertenecería a S, en contradicción con que $y_0 = F(x_0)$ no pertenece a $F(S)$.

Observaremos que si la condición [12] se formula para números derivados a la izquierda, tomaríamos como x_0 el extremo inferior de los puntos del intervalo $[a; x_1]$ donde $F(x) \geqq y_0$, obteniendo también $F(x_0) = y_0$, conservándose $F(x) < y_0$ para todo x de $[a; x_0)$.

Mediante este teorema 2, podemos ahora desarrollar la siguiente:

Segunda demostración del teorema 1. — Sea para el número real $k > 0$ la función $h(x) = g(x) + kx$. Entonces, la condición [3] implica $N_+\mathrm{f}(x) < D_+h(x)$ a cumplirse en el complemento de un conjunto numerable A respecto de $[a; b)$ y por tanto, se verifica la condición [12] a lo más en un conjunto numerable, cuyo transformado por [11] no podrá contener ningún intervalo no-degenerado. Por tanto, podrá aplicarse el teorema 2 y por [13] será

$$[14] \qquad \|\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(a)\|-g(x)+g(a)-k(x-a)\leqq 0$$

en I. Esto prueba, que en I debe ser

$$\|\mathrm{f}(x)-\mathrm{f}(a)\|\leqq g(x)-g(a),$$

cumpliéndose en particular la tesis [4], pues en caso contrario, podría hallarse un $k>0$ suficientemente pequeño para el que se daría la desigualdad opuesta a la [14].

La última conclusión [6] se deduce de [5] como antes.

§ 4. — Como corolario del teorema 1, obtenemos el siguiente teorema, mucho más general que el incluído en Bourbaki [1], donde se exige la existencia y anulación de una derivada lateral:

Teor. 3. — *Para que una función vectorial* $\mathrm{f}(x)$ *definida y continua en un intervalo I del cuerpo real R, con valores en un espacio normado* E *sobre R sea constante en I, basta que* $N_+\mathrm{f}(x)$ *dado por* [1] *se anule en todos los puntos del complemento de un conjunto numerable A respecto de I.* (En el enunciado puede sustituirse $N_+\mathrm{f}(x)$ por $N^+\mathrm{f}(x)$ o $N_-\mathrm{f}(x)$ o $N^-\mathrm{f}(x)$).

Pues si en el teorema 1 se toma para $g(x)$ la constante 1, se verifica la hipótesis [3] y por [4] se cumplirá $\|\mathrm{f}(b)-\mathrm{f}(a)\|\leqq 0$; como la norma es siempre (§ 1) un número real no negativo, de ahí se deduce que $\|\mathrm{f}(b)-\mathrm{f}(a)\|=0$, es decir, por la condición N_1) (§ 1) será $\mathrm{f}(b)=\mathrm{f}(a)$. El razonamiento subsiste para todo par de puntos de I y así queda demostrado el teorema 3.

§ 5. — Extendamos los teoremas 1 y 3 al campo complejo para lo que introducimos ahora para funciones vectoriales de variable independiente dada en el cuerpo C de números complejos z, el *número derivonormado*, siempre existente:

$$[15] \qquad \overline{N}\,\mathrm{f}(z)=\limsup_{\zeta\to z}\frac{\|\mathrm{f}(\zeta)-\mathrm{f}(z)\|}{|\zeta-z|}\geqq 0,$$

y análogamente $\underline{N}\mathrm{f}(z)$ con lím inf en lugar de lím sup.

Pero como ahora, en los teoremas a obtener no serán intercambiables estos números derivonormados superior e inferior, introduzcamos también el *número derivonormado radial*

$$[16] \qquad N_\vartheta \mathrm{f}(z) = \underset{-\pi<\vartheta\leqq\pi}{\operatorname{extr\,sup}} \left(\liminf_{t\to 0+} \frac{\|\mathrm{f}(z+te^{i\vartheta})-\mathrm{f}(z)\|}{t} \right)$$

$(t$ positivo$)$.

Tendremos entonces:

Teor. 4. — *Sea* $\mathrm{f}(z)$ *una función vectorial definida y continua en un recinto (abierto) convexo* R *del cuerpo* C *de números complejos, que toma sus valores en un espacio normado* E *sobre* C. *Si definiendo* $\overline{N}\mathrm{f}(z)$ *por* [15] *se tiene* $\overline{N}\mathrm{f}(z)\leqq m$ *para todos los puntos* z *del complemento de un conjunto numerable* A *respecto de* R, *entonces es*

$$[17] \qquad \|\mathrm{f}(b)-\mathrm{f}(a)\| \leqq m\,|b-a|$$

para todo par de puntos a *y* b *de* R. *Esta conclusión subsiste si en lugar de* $\overline{N}\mathrm{f}(z)\leqq m$, *se presupone la condición menos restringida* $N_\vartheta\mathrm{f}(z)\leqq m$, *donde* $N_\vartheta\mathrm{f}(z)$ *se define por* [16].

En cambio (cfr. teorema 1), la conclusión no subsiste si en lugar de $\overline{N}\mathrm{f}(z)\leqq m$ se tiene $\underline{N}\mathrm{f}(z)\leqq m$. Por ejemplo, si se hace corresponder a $z=x+iy$ su parte imaginaria $y=\mathrm{f}(z)$, entonces es $\underline{N}\mathrm{f}(z)=0$ (basta hacer que $\zeta\to z$ sobre horizontal) y para $y_2>y_1$ se tiene $\|\mathrm{f}(x_2+iy_2)-\mathrm{f}(x_1+iy_1)\|=y_2-y_1>0$, en lugar de ser $\leqq 0$.

Para demostrar el teorema 4 basta aplicar el teorema 1 a la función

$$\mathrm{F}(t)=\frac{1}{b-a}\mathrm{f}(a+t(b-a)) \quad \text{para} \quad 0\leqq t\leqq 1$$

y tomar $g(t)=mt$, pues se cumple [3] (para límites superiores) en el complemento de la intersección con A del segmento que une a y b, ya que si $N^+\mathrm{F}(t)$ está dada por [1] (con lím sup en lugar de lím inf) y se tiene en cuenta [15], se verifica en dicho complemento

$$N^{+}\mathrm{F}(t) = \limsup_{\tau \to t+} \frac{\|\mathrm{F}(\tau)-\mathrm{F}(t)\|}{\tau - t} =$$

$$= \limsup_{\tau \to t+} \frac{\|\mathrm{f}(a+\tau(b-a))-\mathrm{f}(a+t(b-a))\|}{|b-a|.(\tau-t)} \leqq \overline{N}\,\mathrm{f}(a+t(b-a)) \leqq m;$$

entonces, de [4] se deduce inmediatamente para $\|\mathrm{F}(1)-\mathrm{F}(0)\|$ la tesis [17] que queríamos demostrar. La demostración anterior subsiste si se aplica la condición $N_{\vartheta}\mathrm{f}(z) \leqq m$, sin más que sustituir $N^{+}\mathrm{F}(t)$ por $N_{+}\mathrm{F}(t)$, lím sup por lím inf y $\overline{N}\,\mathrm{f}(a+t(b-a))$ por $N_{\vartheta}\mathrm{f}(a+t(b-a))$. En cambio, falla para $\underline{N}\,\mathrm{f}(a+t(b-a))$.

Obsérvese que en Bourbaki (1) se exige en la hipótesis del teorema que $\mathrm{f}(z)$ sea derivable en R.

Teor. 5. — *Para que una función vectorial* $\mathrm{f}(z)$ *definida y continua en un recinto (abierto)* R *del cuerpo* C *de números complejos, que toma sus valores en un espacio normado* E *sobre* C, *sea constante, basta que* $\overline{N}\,\mathrm{f}(z)$ *definido por* [15] *sea nulo en el complemento de una parte numerable de* R. *También* $\mathrm{f}(z)$ *se reduce a una constante si en lugar de* $\overline{N}\,\mathrm{f}(z)$ *se supone solamente que* $N_{\vartheta}\mathrm{f}(z)$ *definido por* [16] *es nulo en el complemento de una parte numerable de* R.

Este teorema es más general que el incluído en Bourbaki (1), donde se exige la existencia y anulación de la derivada de $\mathrm{f}(z)$ en todo punto de R.

En contraste con lo que ocurre para las funciones vectoriales de variable real (§ 4), aquí la conclusión no subsiste, si en lugar de $\overline{N}\,\mathrm{f}(z)=0$ (o $N_{\vartheta}\mathrm{f}(z)=0$) se considera $\underline{N}\,\mathrm{f}(z)=0$. Por ejemplo, si a $z=x+iy$ se hace corresponder su parte imaginaria $y=\mathrm{f}(z)$, resulta una función continua para la que es $\underline{N}\,\mathrm{f}(z)=0$ en todo punto de R y la función no es constante.

Para demostrar el teorema 5, consideremos que sea a un punto cualquiera de R; el conjunto Q de puntos z de R donde $\mathrm{f}(z)=\mathrm{f}(a)$ es *cerrado* porque $\mathrm{f}(z)$ es continua; por aplicación del teorema 4 con $m=0$, a un entorno abierto convexo contenido en R de un punto cualquiera de Q, se ve que Q es también *abierto*; luego Q es idéntico a R.