SU UN ELEMENTARE PROBLEMA DI ESTREMO

nota di MAURO PICONE, Roma (Italia)

Dedicata a Beppo Levi nel suo ottantesimo compleanno (*)

Assegnati due numeri reali a e b, denoterò con (a, b) l'intervallo chiuso, dell'asse x, di estremi inferiore a e superiore b, e dirò, con Bolza, che un vettore $Y(x)$, a r componenti reali $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_r(x)$, é funzione della x, di classe C' in (a, b), se vi é continuo con la sua derivata $Y'(x)$, che vi é di classe CD' se l'intervallo (a, b) può esser decomposto in un numero finito $\nu(Y)$ di intervalli chiusi $(a, a_1), (a_1, a_2), \ldots, (a_{\nu-1}, b)$ $(a < a_1 < a_2 < \ldots < a_{\nu-1} < b)$, in ciascuno dei quali il vettore riesce di classe C'.

Assegnate $r(r-1)/2$ funzioni reali

$$f_{hk}(x) \equiv f_{kh}(x) \qquad (h, k = 1, 2, \ldots, r),$$

continue nell'intervallo (a, b), prescritti due vettori A e B, rispettivamente di componenti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ e $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r$, detto $\Gamma(A, B)$ l'insieme dei vettori $Y(x)$, funzioni di x di classe CD' in (a, b) e verificanti le condizioni

$$(1) \qquad Y(a) = A, \quad Y(b) = B,$$

é ben elementare il problema della determinazione dell'estremo inferiore della funzione di $Y(x)$:

$$(2_r) \qquad \varphi[Y] \equiv \int_a^b \sum_{h=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} f_{hk}(x)\, y_h'(x)\, y_k'(x)\, dx,$$

(*) Redatta nell'Istituto Nazionale per la Applicazioni del Calcolo.

nell'insieme $\Gamma(A, B)$, eppure esso non é stato ancora risoluto, in tutta generalità, neanche nel caso semplicissimo $r = 1$, in cui il vettore $Y(x)$ si riduce ad una funzione scalare $y(x)$ e si ha

$$(2_1) \qquad \varphi[y] \equiv \int_a^b f(x)\,[y'(x)]^2\,dx.$$

In questa breve nota indicherò qualche risultato in proposito, cominciando, nel seguente n. 1, dal ricordare teoremi ben noti dell'elementare Calcolo delle Variazioni.

1. - Indicherò con F la matrice quadrata

$$\begin{pmatrix} f_{11} \cdots f_{1r} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{r1} \cdots f_{rr} \end{pmatrix},$$

con F_h il vettore che ha per componenti $f_{h1}, f_{h2}, \ldots, f_{hr}$, con f il valore del determinante di F, con FY il vettore prodotto della matrice F per il vettore Y, a r componenti, con $X . Y$ il prodotto scalare di due vettori X e Y, con eguale numero r di componenti. Con questi simboli si può scrivere:

$$\varphi[Y] \equiv \int_a^b Y' . FY'\,dx$$

e affermare che:

I. *Per un'eventuale funzione $Y(x)$ minimante $\varphi[Y]$ in $\Gamma(A, B)$ deve aversi, in tutto (a, b),*

$$(3) \qquad FY' = C,$$

cioè

$$(3) \qquad F_h . Y' \equiv \sum_{k=1}^{r} f_{hk}(x)\, y_k'(x) = c_h, \quad (h = 1, 2, \ldots, r),$$

con C vettore costante, di componenti $c_1, c_2, \ldots, c_r$.

Sussistono i due seguenti elementari teoremi, dei quali conviene ricordare le dimostrazioni, che esporrò.

II. *Se la forma quadratica*

$$(4) \qquad \Lambda \,.\, F \Lambda$$

nel vettore Λ *non è semidefinita positiva in tutto l'intervallo* (a, b), *l'estremo inferiore di* $\varphi[Y]$ *in* $\Gamma(A, B)$ *è* $-\infty$.

Infatti, nell'ipotesi del teorema, esistono un punto x_0 di (a, b) e un vettore $\overset{\circ}{\Lambda}$, per i quali si ha $\overset{\circ}{\Lambda} \,.\, F(x_0) \overset{\circ}{\Lambda} < 0$ e quindi, un intervallo (a', b'), interno all'intervallo (a, b), in cui é $\overset{\circ}{\Lambda} \,.\, F(x) \overset{\circ}{\Lambda} < 0$. Assunto, a piacere, un numero naturale n, se $Y(x)$ é una funzione di $\Gamma(A, B)$, lo é anche $Y_n(x)$, così definita:

$$Y_n(x) \begin{cases} = Y(x) & , \text{ per } \ a \leqq x \leqq a', \\ = Y(x) + \overset{\circ}{\Lambda} \operatorname{sen} \dfrac{n\pi(x-a')}{b'-a'} & , \text{ per } \ a' \leqq x \leqq b', \\ = Y(x) & , \text{ per } \ b' \leqq x \leqq b, \end{cases}$$

e risulta

$$\lim_{n \to \infty} \varphi[Y_n(x)] = -\infty.$$

III. *Se la forma quadratica* (4) *è semidefinita positiva in ogni punto dell'intervallo* (a, b) *ed esiste un vettore* $\overset{\circ}{Y}(x)$ *di* $\Gamma(A, B)$ *verificante la* (3), *questo è minimante* $\varphi[Y]$ *in* $\Gamma(A, B)$.

E' subito visto, infatti, che, in tale ipotesi, per ogni vettore $Y(x)$ di $\Gamma(A, B)$, si ha

$$\varphi[Y] - \varphi[\overset{\circ}{Y}] = \varphi[Y - \overset{\circ}{Y}] \geqq 0.$$

IV. *Se la forma quadratica* (4) *è definita positiva in ogni punto dell'intervallo* (a, b), *esiste una funzione* $\overset{\circ}{Y}(x)$ *di* $\Gamma(A, B)$

verificante la (3), *e quindi* (per il teor. prec.) *il minimo di* $\varphi[Y]$ *in* $\Gamma(A,B)$ *é* $\varphi[\overset{\circ}{Y}]$.

Infatti, un vettore U, di classe CD', verificante la (3) e le condizioni $U(a)=U(b)=0$, é identicamente nullo in (a,b), poiché dalla (3) si ricava

$$\int_a^b U' . F U' \, dx = C . \int_a^b U' \, dx = C . (B-A) = 0.$$

Pertanto l'equazione nell'incognito vettore C:

$$\int_a^b F^{-1} \, dx \, C = B - A \text{ (*)}$$

ha una ed una sola soluzione $\overset{\circ}{C}$, ed il vettore

$$\overset{\circ}{Y}(x) = A + \int_a^x F^{-1} \, d\xi \, \overset{\circ}{C}$$

appartiene all'insieme $\Gamma(A,B)$ e verifica la (3).

2. - Osserviamo che se la forma quadratica (4) é semidefinita positiva, ovunque in (a,b), ed é $A=B$, la funzione $\varphi[Y]$ ha minimo in $\Gamma(A,B)$, ed é lo zero, dato dalla funzione costante $Y(x)\equiv A$. Supporremo, pertanto, d'ora in poi

$$A \neq B, \tag{5}$$

(*) Indicati con f_{hk}^{-1} gli elementi della matrice F^{-1}, inversa della F, con

$$\int_a^b F^{-1} \, dx$$

indichiamo la matrice che ha gli elementi $\int_a^b f_{hk}^{-1}(x)\, dx$.

ed in tale ipotesi, il problema al quale ho alluso in principio consiste in ciò:

Supposta la forma quadratica (4) *semidefinita positiva in tutto* (a, b) *e non sempre definita, determinare, in tutta generalità, l'estremo inferiore di* $\varphi[Y]$ *in* $\Gamma(A, B)$.

Sussistono, in proposito, i teoremi seguenti.

V. *Se esiste un intervallo di* (a, b), *in cui é* $F \equiv 0$, *il minimo di* $\varphi[Y]$ *in* $\Gamma(A, B)$ *é lo zero, ed é conseguito da infinite funzioni di* $\Gamma(A, B)$.

Sia, infatti, nell'intervallo (a', b'), *interno ad* (a, b), $F \equiv 0$. La funzione $Y(x)$ così definita

$$Y(x) \begin{cases} = A \quad , & \text{per} \quad a \leqq x \leqq a', \\ = Z(x), & \text{per} \quad a' \leqq x \leqq b', \\ = B \quad , & \text{per} \quad b' \leqq x \leqq b, \end{cases}$$

ove $Z(x)$ é un'arbitraria funzione di classe CD' in (a', b'), che in a' e b' coincide, rispettivamente, coi vettori A e B, appartiene a $\Gamma(A, B)$ e per essa si ha

$$\varphi[Y] = \int_a^{a'} Y' \,.\, F Y' \,dx + \int_{b'}^{b} Y' \,.\, F Y' \,dx = 0.$$

VI. *Se* F *si annulla in* (a, b) *e non esistono intervalli di* (a, b) *nei quali* $f \equiv \det F$ *é identicamente nullo, la funzione* $\varphi[Y]$ *non ha minimo in* $\Gamma(A, B)$.

Infatti, per una funzione $\overset{\circ}{Y}(x)$, minimante $\varphi[Y]$ in $\Gamma(A, B)$, deve sussistere la (3), in tutto (a, b), e poiché in un punto, di nullità di F, risulta $F \overset{\circ}{Y}{}' = 0$, si avrà, in tutto (a, b),

$$F \overset{\circ}{Y}{}' \equiv 0. \tag{6}$$

Ne segue, in virtù dell'ipotesi, che $\overset{\circ}{Y}{}'(x)$ é identicamente nulla in ogni intervallo di (a, b), in cui é continua, e quindi

$$B-A=\mathring{Y}(b)-\mathring{Y}(a)=\int_a^b \mathring{Y}'(x)\,dx=0,$$

in contraddizione con la (5).

VII. *Se in un punto* x_0, *di nullità di* $F(x)$, *detto* $J(x_0,\varepsilon)$ *l'intervallo comune ai due intervalli* (a, b) *e* $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, *si ha*:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\int_{J(x_0,\varepsilon)}(B-A).F(B-A)\,dx\right)\equiv \tag{7}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{h=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}(\beta_h-\alpha_h)(\beta_k-\alpha_k)\int_{J(x_0,\varepsilon)}f_{hk}(x)\,dx\right)=0,$$

allora l'estremo inferiore di $\varphi[Y]$ *in* $\Gamma(A, B)$ *é lo zero. Sussiste in particolare la* (7) *se tutti gli elementi della matrice* F, *hanno nel punto* x_0 *derivata nulla.*

Siano, infatti, per esempio, x_0 e l'intervallo $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ interni all'intervallo (a, b). La funzione $Y_\varepsilon(x)$, così definita:

$$Y_\varepsilon(x)\begin{cases} =A & ,\ \text{per } a\leqq x\leqq x-\varepsilon,\\ =A+\dfrac{x-x_0+\varepsilon}{2\varepsilon}(B-A), & \text{per } |x-x_0|\leqq\varepsilon,\\ =B & ,\ \text{per } x_0+\varepsilon\leqq x\leqq b,\end{cases}$$

appartiene a $\Gamma(A, B)$ e si ha:

$$\varphi[Y_\varepsilon]=\frac{1}{4\varepsilon^2}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}(B-A)\,.\,F(B-A)\,dx.$$

VIII. *La forma quadratica* (4), *essendo sempre semidefinita positiva in ogni punto dell'intervallo* (a, b), *sia definita in* *un insieme I di punti di (a, b), avente per misura $b - a$ e la funzione*

$$|F|\,|F^{-1}|^2\ (*)$$

risulti sommabile in (a, b). Sia $\Gamma^*(A, B)$ l'insieme delle funzioni $Y(x)$, verificanti le (1), assolutamente continue in (a, b), per ciascuna delle quali il prodotto

$$|F|\,|Y'|^2$$

risulti sommabile in (a, b). In tali ipotesi, la funzione $\varphi[Y]$ riesce definita in $\Gamma^*(A, B)$ e vi ha minimo e sempre valore positivo.

Per ogni vettore $Y(x)$ di $\Gamma^*(A, B)$, si ha, infatti,

$$|Y' . F Y'| \leqq |F|\,|Y'|^2$$

e se risultasse

$$\int_a^b Y' . F Y'\,dx = \int_I Y' . F Y'\,dx = 0$$

(*) Per una matrice F, di elementi f_{hk}, poniamo

$$|F| = \sqrt{\sum_{h=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} (f_{hk})^2}.$$

Se F e G sono matrici quadrate dello stesso ordine r e Y é un vettore a r componenti, si ha

$$|F + G| \leqq |F| + |G|, \quad |FG| \leqq |F| \cdot |G|, \quad |FY| \leqq |F|\,|Y|.$$

Poiché FF^{-1} é la matrice unità, risulta

$$1 \leqq |F|\,|F^{-1}|$$

e quindi

$$|F^{-1}| \leqq |F|\,|F^{-1}|^2, \quad \frac{1}{|F|} \leqq |F^{-1}|,$$

e pertanto dalla sommabilità di $|F|\,|F^{-1}|^2$ in (a, b), segue quella di $|F^{-1}|$ e quella di $1/|F|$. Ora $|F|\,|F^{-1}|^2$ é funzione omogenea, di grado -1, negli elementi f_{hk} di F e pertanto, se in un punto isolato x_0 di nullità della F, tali elementi sono rispetto a $|x - x_0|$, tutti infinittesimi d'ordine minore di uno, la funzione $|F|\,|F^{-1}|^2$ risulterá sommabile in un intorno di quel punto.

ne seguirebbe $Y' \equiv 0$ in un insieme di punti *di* I, avente la misura di I e quindi di (a, b) e si avrebbe pertanto

$$B - A = Y(b) - Y(a) = \int_a^b Y'(x)\, dx = 0,$$

in contraddizione con la (5). Essendo F^{-1} sommabile in (a, b), il vettore $\overset{*}{Y}(x)$ definito dall'eguaglianza

$$\overset{*}{Y}(x) = A + \int_a^x F^{-1}\, d\xi \,.\, C, \tag{8}$$

verificante la (3), riesce assolutamente continuo in (a, b), ed avendosi $|F|\,|\overset{*}{Y}'|^2 \leqq |F|\,|F^{-1}|^2\,|C|^2$, sommabile in (a, b) il prodotto $|F|\,|\overset{*}{Y}'|^2$. Esiste uno uno ed un solo vettore $\overset{*}{C}$ per il quale si ha

$$A + \int_a^b F^{-1}\, dx \,.\, C = B, \tag{9}$$

ed invero, un vettore U, assolutamente continuo in (a, b), col prodotto $|F|\,|U'|^2$ ivi sommabile, per cui é

$$F\,U' = C, \quad U(o) = U(b) = 0,$$

verifica l'eguaglianza

$$\int_a^b U' \,.\, F U'\, dx = 0$$

ed avendo, pertanto, quasi ovunque nulla la derivata, é identicamente nullo in (a, b). Il vettore $\overset{*}{Y}(x)$, dato dalla (8) per $C = \overset{*}{C}$, appartiene all'insieme $\Gamma^*(A, B)$ e verificando la (3), per ogni vettore $Y(x)$ di quell'insieme risulta

$$\varphi[Y] - \varphi[\overset{*}{Y}] = \varphi[Y - \overset{*}{Y}] \geqq 0.$$

IX. *La matrice F sia nulla in un insieme di punti di (a, b), avente misura zero, e la forma quadratica* (4) *sempre definita positiva altrove, risultando $|F|\,|F^{-1}|^2$ sommabile in (a, b). In tali ipotesi la funzione $\varphi[Y]$ non ha* (teor. VI) *minimo in $\Gamma(A, B)$ e vi ha l'estremo inferiore positivo $\varphi[\overset{*}{Y}]$, ove $\overset{*}{Y}(x)$ é il vettore dato dalla* (8), *con C soluzione della* (9).

Poiché l'insieme $\Gamma(A, B)$ é contenuto nell'insieme $\Gamma^*(A, B)$ si ha intanto, per ogni funzione $Y(x)$ di $\Gamma(A, B)$,

$$\varphi[Y] \geqq \varphi[\overset{*}{Y}] > 0.$$

Il teorema sarà perciò dimostrato se costruiremo una successione $Y_n(x)$ di vettori di $\Gamma(A, B)$ per i quali si abbia

$$\lim_{n\to\infty} \varphi[Y_n] = \varphi[\overset{*}{Y}]. \tag{10}$$

Sia $P_n(x)$ un vettore, con componenti polinomi nella x, per cui sussista l'eguaglianza:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |F|\,|\overset{*}{Y}{}' - P_n|^2\, dx = 0. \tag{11}$$

Essendo $1/|F|$ sommabile in (a, b), ed avendosi

$$\int_a^b |\overset{*}{Y}{}' - P_n|\, dx = \int_a^b \frac{1}{|F|^{1/2}}\, |F|^{1/2}\, |\overset{*}{Y}{}' - P_n|\, dx \leqq$$

$$\int_a^b \frac{dx}{|F|} \int_a^b |F|\, |\overset{*}{Y}{}' - P_n|^2\, dx,$$

risulta

$$\lim_{n\to\infty} \left(B - A - \int_a^b P_n(x)\, dx \right) = \tag{12}$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b \overset{*}{Y}{}'(x)\, dx - \int_a^b P_n(x)\, dx \right) = 0.$$

Introdotto il vettore

$$(13) \qquad C_n = \frac{1}{b-a}\left(B - A - \int_a^b P_n(x)\,dx\right),$$

la funzione

$$Y_n(x) = A + C_n(x-a) + \int_a^x P_n(\xi)\,d\xi$$

appartiene all'insieme $\Gamma(A, B)$, e si ha

$$\varphi[Y_n] - \varphi[\overset{*}{Y}] = \varphi[Y_n - \overset{*}{Y}] = \int_a^b (Y'_n - \overset{*}{Y}')\,.\,F(Y'_n - \overset{*}{Y}')\,dx \leqq$$

$$\int_a^b |F|\,|\overset{*}{Y}'_n - Y'_n|^2\,dx \leqq \int_a^b |F|\,|P_n + C_n - \overset{*}{Y}'|^2\,dx \leqq$$

$$2\int_a^b |F|\,|P_n - \overset{*}{Y}'|^2 + 2|C_n|^2 \int_a^b |F|\,dx,$$

donde la (10), in base alle (11), (12) e (13).

3. - Per esempio, la funzione

$$\varphi(y) = \int_0^1 x^\mu \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx,$$

ove μ designa un numero reale positivo, non ha minimo (teor. VI) nell'insieme $\Gamma(\alpha, \beta)$ delle funzioni di classe CD' nell'intervallo $(0, 1)$ verificanti le condizioni

$$y(0) = \alpha \quad y(1) = \beta, \quad \text{con} \quad \alpha \neq \beta,$$

e all'estremo inferiore, il teor. VII assegna il valore zero, se

$\mu > 1$ (*), ed il teor. IX il valore $(1-\mu)(\beta-\alpha)^2$, se $\mu < 1$. Per $\mu = 1$, posto, per ogni ε positivo e minore di uno,

$$y_\varepsilon(x) \begin{cases} = \alpha & , \quad \text{per} \quad 0 \leqq x \leqq \varepsilon, \\ = \dfrac{\alpha-\beta}{\log \varepsilon} \log x + \beta, & \text{per} \quad \varepsilon \leqq x \leqq 1, \end{cases}$$

si definisce una funzione dell'insieme $\Gamma(\alpha, \beta)$, per la quale riesce

$$\varphi[y_\varepsilon] = \frac{(\alpha-\beta)^2}{-\log \varepsilon},$$

e pertanto l'estremo inferiore di $\varphi[y]$ é ancora lo zero.

4. - I teoremi del n. 2 cono ben lungi, evidentemente, dall'esaurire la questione generale ivi posta. In essi non trova risposta, per esempio, la domanda: Se la matrice F non é mai nulla nell'intervallo $(0,1)$, ed essendo la forma quadratica (4) sempre semidefinita positiva, ma non sempre definita, non esiste un vettore Y di $\Gamma(A,B)$ verificante la (3), quanto vale l'estremo inferiore di $\varphi[Y]$ in $\Gamma(A,B)$?. La condizione (3) é, com'é ben noto, necessaria affinché la funzione $Y(x)$ dell'insieme $\Gamma^*(a,b)$, dia il minimo valore alla funzione $\varphi[Y]$ nell'insieme stesso e pertanto, se, ferme restando tutte le altre ipotesi del teor. VIII, viene a mancare quella delle sommabilità in (a,b) di $|F^{-1}|$ e quindi di $|F|\,|F^{-1}|^2$, quel minimo non esiste, e si domanda: Che valore ha, allora, l'estremo inferiore di $\varphi[Y]$ in $\Gamma^*(A,B)$?.

A proposito di tal genere di questioni, vien fatto di pensare se non sia il caso di dedicarsi anche alla determinazione dell'estremo inferiore per quei problemi importanti del Calcolo delle Variazioni per i quali si é trovato che il ricercato minimo non esiste.

Che dire, per esempio, del problema (che, nel caso particolare $f(x,y) \equiv 1$, fu risoluto de Beppo Levi, in una classica

(*) Ciò per $\mu = 2$, fu già detto da Weierstrass [cfr. la Sue *Mathematische Werke*, t. II, p. 49].

Memoria) della determinazione dell'estremo inferiore della funzione

$$\varphi[u] = \iint_D f(x, y) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy,$$

in un insieme di funzioni reali $u(x, y)$, continue nel dominio D del piano (x, y), con le loro derivate parziali prime, assumenti valori prescritti sulla frontiera di D, nell'ipotesi che l'assegnata funzione reale $f(x, y)$, continua e non negativa del dominio D, vi abbia punti di zero?.

E perché non si considerano, altresì, funzioni puntuali $\phi[Y]$, ad un qualsivoglia numero q di componenti $\varphi_1[Y]$, $\varphi_2[Y], \ldots, \varphi_q[Y]$, funzioni di un vettore Y a r componenti, definite in un certo insieme, per determinare particolari domini dello spazio euclideo, a q dimensioni, che ne contengano il coinsieme? Per esempio, per determinare strati ipersferici, di detto spazio, con centro nell'origine, godenti di quelle proprietà? Per quest'ultimo compito si ricade nella ricerca degli estremi inferiore e superiore della funzione reale $|\phi[Y]|$, ricerca che —nonostante ciò— per $q > 1$ non mi consta che sia stata fino ad oggi intrapresa.

Non ha bisogno, certo, d'essere rilevata l'importanza della risoluzione di problemi di tal sorta per applicazioni non soltanto scientifiche, ma anche tecniche.