DETERMINAZIONE DELL'INTEGRALE POSITIVO MINIMO NELL'EQUAZIONE DI M. HUKUHARA

Nota di G. SANSONE ed R. CONTI, Firenze (Italia)

1. Nello studio delle caratteristiche di un sistema

$$d\xi/dt = X(\xi, \eta), \quad d\eta/dt = Y(\xi, \eta), \tag{1}$$

interessa (¹) di stabilire se l'equazione

$$x\,y' = A\,y^k + B(x), \tag{2}$$

con $A > 0$, $k > 1$, costanti, e con $B(x)$ funzione continua in $0 \leqq x \leqq x_0$, $(x_0 > 0)$,

$$B(0) = 0; \quad B(x) > 0 \quad \text{per} \quad 0 < x \leqq x_0,$$

ammette soluzioni $y(x)$ tali che sia

$$\begin{cases} y(x) > 0 \quad \text{per} \quad 0 < x < x_0, \\ \lim\limits_{x \to 0+} y(x) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

M. Hukuhara (loc. cit. in (¹)), estendendo precedenti risultati di E. R. Lonn e di H. Forster, ha provato che:

(¹) Cfr. anche per la bibliografia: M. HUKUHARA, Sur la forme des courbes intégrales dans le voisinage d'un point singulier d'une équation différentielle ordinaire du premier ordre, Proc. Phys. Math. Soc. of Japan, (3), *21* (1939), pp. 183-190.

Condizione necessaria e sufficiente affinchè l'equazione (2) *ammetta soluzioni soddisfacenti le* (3) *è che esista (almeno) una funzione* $\eta(x)$, *continua insieme con la derivata* $\eta'(x)$ *in* $(0, x_0)$ *e tale che sia ivi*

$$\frac{A}{x}\left[\int_0^x \frac{B(u)}{u\eta(u)}\,du\right]^{k-1} \leqq \frac{\eta'(x)}{\eta^k(x)}.$$

Scopo di questa breve Nota è quello di completare questo risultato, mostrando (n. 2) come tra le soluzioni soddisfacenti le (3) ve ne sia una «minima» e facendo vedere (n. 3) come tale «integrale positivo minimo» si possa costruire mediante l'algoritmo delle approssimazioni successive.

Questi complementi potranno giovare allo studio delle caratteristiche del sistema (1) al quale la (2) è collegata.

2. Notiamo che essendo per ipotesi $A > 0$, $B(x) > 0$ per $0 < x \leqq x_0$, ogni soluzione di (2) che passi per un punto della semistriscia

$$S:\quad 0 < x \leqq x_0, \quad 0 < y$$

è rappresentabile, finchè resta in S, da una funzione $y(x)$ decrescente con x.

Sia $y = \bar{y}(x)$ una soluzione di (2) soddisfacente le (3): ogni soluzione $y = \varphi(x)$ uscente da un punto di S posto aldisopra della curva $y = \bar{y}(x)$ soddisfa anch'essa le (3).

Infatti $\varphi(x)$ può esser prolungata a sinistra di tale punto fino ad $x = 0$, restando (aldisopra di $y = \bar{y}(x)$, in virtù del teorema di unicità, e quindi) in S; perciò esiste, finito

$$l = \lim_{x \to 0+} \varphi(x) \geqq 0.$$

E' subito visto che $l = 0$, poichè se fosse $l > 0$ avremmo

$$\varphi'(x) = A\,\frac{\varphi^k(x)}{x} + \frac{B(x)}{x} > A\,\frac{\varphi^k(x)}{x} > \frac{Al^k}{x},$$

quindi, se $0<\varepsilon<x$,

$$\varphi(x)-\varphi(\varepsilon)>Al^k\log\frac{x}{\varepsilon}>0,$$

e per $\varepsilon\to 0+$ cadremmo in assurdo.

L'insieme dei punti della retta $x=x_0$ da cui escono soluzioni di (2) soddisfacenti le (3) è perciò una semiretta, la cui origine, $P^*=(x_0,y^*)$ ha ordinata $y^*\geqq 0$. Necessariamente è $y^*>0$, poichè le soluzioni uscenti da punti $(x,0)$ interni al segmento $0\leqq x\leqq x_0$, $y=0$, prolungate a destra tagliano la retta $x=x_0$ in un punto di ordinata positiva.

La soluzione $y=y^*(x)$ di (2) uscente da P^* soddisfa anche essa le (3), poichè se ciò non fosse dovrebbe incontrare il segmento ora detto dell'asse x in un punto Q interno e allora le soluzioni uscenti da punti $(x,0)$ compresi tra l'origine 0 e Q taglierebbero la retta $x=x_0$ aldisopra di P^* senza esser soluzioni soddisfacenti le (3).

Chiameremo «*integrale positivo minimo*» la soluzione $y=y^*(x)$.

3. Sia $y=\bar{y}(x)$ una soluzione di (2) soddisfacente le (3); avremo

$$0\leqq\frac{B(x)}{x}\leqq\bar{y}'(x),\qquad 0\leqq\frac{\bar{y}^k(x)}{x}\leqq\bar{y}'(x),$$

e perciò esistono finiti i due integrali

$$\int_0^x\frac{B(u)}{u}\,du,\ \int_0^x\frac{\bar{y}^k(u)}{u}\,du,$$

e la $\bar{y}(x)$ è soluzione dell'equazione integrale

$$\bar{y}(x)=A\int_0^x\frac{\bar{y}^k(u)}{u}\,du+\int_0^x\frac{B(u)}{u}\,du. \tag{4}$$

In particolare l'integrale positivo minimo $y^*(x)$ soddisfa la (4).

Costruiamo allora una successione $\{y_n(x)\}$, $(n=0,1,2,\ldots)$, di funzioni in $0 \leqq x \leqq x_0$, con la seguente legge

$$
(5) \qquad
\begin{aligned}
y_0(x) &= \int_0^x \frac{B(u)}{u}\,du, \\
y_{n+1}(x) &= A \int_0^x \frac{y_n^k(u)}{u}\,du + \int_0^x \frac{B(u)}{u}\,du.
\end{aligned}
$$

E' subito visto che è in $0 < x \leqq x_0$

$$0 < y_0(x) < y_1(x) < \ldots < y_n(x) < \ldots < y^*(x),$$

cosicchè esiste in $0 \leqq x \leqq x_0$

$$y_\infty(x) \equiv \lim_{n\to\infty} y_n(x)$$

ed avremo

$$y_\infty(x) \leqq y^*(x), \qquad 0 \leqq x \leqq x_0.$$

Ma dalle (5), passando al limite per $n \to \infty$, sotto il segno di integrale, si ha che $y_\infty(x)$ è soluzione della (4), quindi, per derivazione, della (2); poichè $y_\infty(x)$ tende a zero per $x \to 0+$ ed è positiva per $0 < x \leqq x_0$, cioè soddisfa le (3), sarà anche

$$y_\infty(x) \geqq y^*(x), \qquad 0 \leqq x \leqq x_0.$$

Confrontando con la disuguaglianza precedente si ha $y_\infty(x) = y^*(x)$; cioè l'algoritmo (5) permette la costruzione effettiva dell'integrale positivo minimo $y^*(x)$ della (2).