# SOBRE LAS CUERDAS DE UNA CURVA CONVEXA

por L. A. Santaló, La Plata (Argentina)

Dedicado cordialmente al Prof. Beppo Levi en su 80 aniversario

1. *Introducción.* Sea $K$ una curva plana convexa y cerrada cuyas tangentes ó rectas de apoyo tengan todas un solo punto de contacto. Consideremos dos rectas de apoyo que formen entre sí un ángulo constante $\vartheta$ (ángulo que comprende a $K$ en su interior). Sean $P, Q$ los puntos de contacto y $c = PQ$ la cuerda que los une.

Supuesto variable el par de rectas de apoyo, pero formando entre sí siempre el ángulo constante $\vartheta$, J. W. Green [2], [3] ha estudiado diversas desigualdades entre $c$ y otras caracteríscas de $K$, principalmente la anchura $\Delta$ y el diámetro $D$, limitándose en general al caso $\vartheta = \pi/2$.

En esta nota vamos a obtener otras desigualdades análogas las cuales relacionan: a) Las cuerdas $c$ con el radio de curvatura mínimo de $K$ (desigualdad (2.4)); b) El valor medio de las longitudes de $c$ con la longitud de $K$ (desigualdad (3.1)). Obtenemos también la desigualdad (4.1) que generaliza al espacio la (3.1).

2. *Acotación respecto el mínimo radio de curvatura.* Supongamos en este número que $K$ tenga radio de curvatura continuo en cada punto, el cual satisfaga la desigualdad

$$r \geqq r_0 \tag{2.1}$$

siendo por tanto $r_0$ el radio de curvatura mínimo.

Supongamos dos tangentes que formen entre sí el ángulo $\vartheta$ (ángulo que comprende a $K$ en su interior); sean $P, Q$ los puntos de contacto y $A$ su punto de intersección. Cada tangente a $K$ en los puntos del arco $PQ$ interior al triángulo $PQA$ queda determinado por el ángulo $\varphi$ que forma con $PA$. Sea $ds$ el elemento de arco de $K$ correspondiente al punto de contacto de la tangente correspondiente al ángulo $\varphi$. La proyección de $ds$ sobre $PA$ en la dirección paralela a $QA$ vale

$$dx = \frac{\operatorname{sen}(\vartheta+\varphi)}{\operatorname{sen}\vartheta}\, ds = \frac{\operatorname{sen}(\vartheta+\varphi)}{\operatorname{sen}\vartheta}\, r\, d\varphi .$$

Por tanto, según (2.1)

$$(2.2) \qquad a = AP = \int_0^{\pi-\vartheta} \frac{\operatorname{sen}(\vartheta+\varphi)}{\operatorname{sen}\vartheta}\, r\, d\varphi \geqq \frac{r_0}{\operatorname{sen}\vartheta}(1+\cos\vartheta).$$

Análogamente, la proyección de $ds$ sobre $AQ$ paralelamente a $AP$ vale

$$dy = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\vartheta}\, ds = \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\vartheta}\, r\, d\varphi$$

y por tanto

$$(2.3) \qquad b = AQ = \int_0^{\pi-\vartheta} \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen}\vartheta}\, r\, d\varphi \geqq \frac{r_0}{\operatorname{sen}\vartheta}(1+\cos\vartheta).$$

Por otra parte, siendo $c = PQ$, se tiene $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\vartheta$. Aplicando directamente (2.2) y (2.3) si $\cos\vartheta \leqq 0$, o bien teniendo en cuenta que $2ab \leqq a^2 + b^2$ y por tanto $c^2 \geqq (a^2+b^2)(1-\cos\vartheta)$ para $\cos\vartheta > 0$, de (2.2) y (2.3) se deduce, para cualquier $\vartheta$,

$$c^2 \geqq 2 r_0^2 (1+\cos\vartheta) = 4 r_0^2 \cos^2\frac{\vartheta}{2}.$$

Se tiene así la desigualdad

$$(2.4) \qquad c \geqq 2 r_0 \cos\frac{\vartheta}{2}.$$

La igualdad, para todas las cuerdas, solo puede tener lugar si ella vale para (2. 2) y (2. 3), lo cual exige $r = \text{cte.}$, o sea, que $K$ sea una circunferencia.

Tenemos así el

Teorema I. *Sea $K$ una curva plana, convexa y cerrada con radio de curvatura $r$ continuo en cada punto. Sea $r_0$ el mínimo de $r$. Entre $r_0$ y la longitud $c$ de la cuerda que une los puntos de contacto de dos tangentes cualesquiera que formen entre sí un ángulo $\vartheta$, existe la relación* (2. 4). *Si el signo igual vale para cualquier par de tangentes de ángulo $\vartheta$, $K$ es una circunferencia.*

3. *Acotaciones respecto la longitud.* Sea $O$ un punto interior a $K$ y $h = h(\varphi)$ la función de apoyo de $K$ respecto $O$. Supongamos las rectas de apoyo correspondientes a los valores $\varphi$ y $\varphi + \pi - \vartheta$; ellas forman entre sí un ángulo $\vartheta$. Las coordenadas cartesianas del punto de contacto $P$ respecto un sistema de ejes de origen $O$ y cuyo eje $x$ es el que sirve de origen para los ángulos $\varphi$, se sabe que son

$$x_0 = h \cos \varphi - h' \operatorname{sen} \varphi$$

$$y_0 = h \operatorname{sen} \varphi + h' \cos \varphi .$$

Análogamente, las coordenadas del punto de contacto $Q$ de la recta de apoyo correspondiente a $\varphi + \pi - \vartheta$, poniendo $h_1 = h(\varphi + \pi - \vartheta)$, son

$$x_1 = - h_1 \cos(\vartheta - \varphi) - h_1' \operatorname{sen}(\vartheta - \varphi)$$
$$y_1 = h_1 \operatorname{sen}(\vartheta - \varphi) - h_1' \cos(\vartheta - \varphi).$$

De aquí

$$c^2 = (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2$$
$$= [(h_0 + h_1 \cos\vartheta + h_1' \operatorname{sen}\vartheta) \cos\varphi - (h_0' - h_1 \operatorname{sen}\vartheta + h_1' \cos\vartheta) \operatorname{sen}\varphi]^2$$
$$+ [(h_0' - h_1 \operatorname{sen}\vartheta + h_1' \cos\vartheta) \cos\varphi + (h_0 + h_1 \cos\vartheta + h_1' \operatorname{sen}\vartheta) \operatorname{sen}\varphi]^2$$
$$= (h_0 + h_1 \cos\vartheta + h_1' \operatorname{sen}\vartheta)^2 + (- h_0' + h_1 \operatorname{sen}\vartheta - h_1' \cos\vartheta)^2.$$

Aplicando la desigualdad

$$a^2+b^2 \geqq \frac{1}{2}(a+b)^2$$

resulta

$$c^2 \geqq \frac{1}{2}[(h_0-h_0')+(h_1-h_1')\cos\vartheta+(h_1'+h_1)\operatorname{sen}\vartheta]^2$$

de donde

$$\int_0^{2\pi} c\,d\varphi \geqq \frac{L}{\sqrt{2}}(1+\operatorname{sen}\vartheta+\cos\vartheta)$$

siendo $L$ la longitud de $K$.

Por tanto, llamando $\bar{c}$ al valor medio de las cuerdas $c$ correspondientes al ángulo $\vartheta$, resulta

$$\bar{c} \geqq \frac{L}{2\sqrt{2}\,\pi}(1+\operatorname{sen}\vartheta+\cos\vartheta). \tag{3.1}$$

Si se quiere introducir el área $F$ de $K$, basta utilizar la desigualdad isoperimétrica para tener

$$\bar{c} \geqq \sqrt{\frac{F}{2\pi}}(1+\operatorname{sen}\vartheta+\cos\vartheta). \tag{3.2}$$

Respecto la anchura $\Delta$ de $K$, siendo $L \geqq \pi\Delta$, resulta

$$\bar{c} \geqq \frac{\Delta}{2\sqrt{2}}(1+\operatorname{sen}\vartheta+\cos\vartheta) \tag{3.3}$$

que para $\vartheta=\pi/2$ comprende a la desigualdad de Green [2].

Evidentemente, en el primer miembro de las desigualdades anteriores se puede sustituir el valor medio de $c$ por el valor máximo de $c$.

Tenemos así el

Teorema II. *Sea $K$ una curva plana, convexa y cerrada cuyas rectas de apoyo tengan todas un solo punto de contacto. Sean $L$ la longitud, $F$ el área y $\Delta$ la anchura de $K$. Entre las cuerdas que unen los puntos de contacto de dos rectas de apoyo que formen entre sí un ángulo $\vartheta$ (por el lado que contienen a $K$), existen algunas que cumplen las acotaciones* (3.1), (3.2) y (3.3).

4. *Caso del espacio.* Sea $K$ una superficie convexa y cerrada del espacio cuyos planos de apoyo tengan todos un solo punto de contacto. Consideremos dos planos de apoyo que formen entre sí un ángulo $\vartheta$; sea $d\Omega$ el elemento de área sobre la esfera unidad correspondiente a la dirección de la recta $r$ de intersección de los dos planos. Proyectemos $K$ sobre un plano normal a $r$; si $c$ es la longitud de la cuerda de $K$ que une los puntos de contacto de los planos de apoyo y $c_p$ la cuerda proyectada, es $c \geqq c_p$. De aquí, integrando sobre la esfera unidad y entre $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$,

$$\int c \, d\Omega \, d\varphi \geqq \int c_p \, d\Omega \, d\varphi = 2\pi \int \bar{c}_p \, d\Omega.$$

Si $L$ es la longitud de la curva convexa proyección de $K$, según (3.1) tendremos por tanto

$$\int c \, d\Omega \, d\varphi \geqq \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + \operatorname{sen} \vartheta + \cos \vartheta) \int_E L \, d\Omega$$

donde la última integración está extendida a toda la esfera unidad.

Es conocida la fórmula [1, p. 67]

$$\int_E L \, d\Omega = 2\pi M$$

siendo $M$ la integral de curvatura media de $K$. Por tanto se tiene

$$\bar{c} \geqq \frac{M}{4\pi\sqrt{2}} (1 + \operatorname{sen} \vartheta + \cos \vartheta). \tag{4.1}$$

Si se quiere introducir el área, teniendo en cuenta la desigualdad de Minkowski $M^2 \geqq 4\pi F$, resulta

$$\bar{c} \geqq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{F}{2\pi}}\,(1+\operatorname{sen}\vartheta+\cos\vartheta). \tag{4.2}$$

Tenemos así el

Teorema III. *Sea $K$ una superficie convexa y cerrada del espacio cuyos planos de apoyo tengan todos un sólo punto de contacto. Sean $M$ su integral de curvatura media y $F$ su área. Entre las cuerdas que unen los puntos de contacto de dos planos de apoyo que formen entre sí un ángulo $\vartheta$ (por el lado que contienen a $K$), existen algunas que cumplen las acotaciones* (4.1), (4.2).

## BIBLIOGRAFIA


(1) T. Bonnesen – W. Fenchel, *Theorie der Konvexen Körper*, Berlin, 1934.

(2) J. W. Green, *On the chords of a convex curve I*, Portugaliae Mathematica, vol. 10, 1951, págs. 121-123.

(3) — — *On the chords of a convex curve, II*, Portugaliae Mathematica, vol. 11, 1952, págs. 51-55.



FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICO-MATEMÁTICAS, La Plata.
COMISIÓN NACIONAL DE LA ENERGÍA ATÓMICA, Buenos Aires.