GEOMETRIA DE LA ESFERA EN EL ESPACIO DE HILBERT

por SUSANA Z. DE SOSA PÁEZ y LINA N. MUÑOZ, San Luis (Argentina)
Trabajo de Seminario, bajo la dirección del Prof. J. Rey Pastor

1. - *Bibliografía y notaciones.*

A pesar de habernos dirigido a diversos matemáticos nacionales y extranjeros, no hemos encontrado ninguna monografía ni libro en que se aborde este tema. Ni tampoco nos dieron opinión sobre los resultados probables de los problemas propuestos. Y sin embargo, una vez vencidas las dificultades naturales, las soluciones resultan tan naturales y sencillas que parecerían haber sido conocidas de todos los que se hayan propuesto el tema, incluso las que hemos obtenido por método artificioso y que probablemente se podrán lograr por camino más natural y directo. En consecuencia solamente podemos referirnos a los libros ya clásicos de Vitali y Stone y a algunas publicaciones de Juliá bien conocidas, como conexas a este capítulo que prolonga en dirección promisoria la geometría griega. Mucho agradeceríamos datos bibliográficos sobre el mismo.

He aquí el cuadro de notaciones que usaremos: $a, b, \ldots, x, \ldots =$ puntos del espacio H; $\alpha, \beta, \ldots =$ números reales; producto escalar $= a\,b$.

$E^{-1} =$ *variedad lineal* o hiperplano de orden -1.

Ecuación $\qquad a\,x = \gamma.$ $\qquad$ [1]

$E^{-n} =$ *variedad lineal* o hiperplano de orden $-n$.

Ecuaciones $\qquad a_i\,x = \gamma_i \quad (1 \leqq i \leqq n).$

Sin peligro de confusión usamos el índice $-n$ en lugar del $\infty - n$ preferido por algunos autores.

S^{-1} = *variedad esférica* o hipersuperficie esférica de centro a y radio ρ. Ecuación $|x-a| = \rho$. [2]

Esfera $|x-a| \leqq \rho$. Esfera exterior $|x-a| \geqq \rho$.

Proyección del punto x sobre el espacio E^n:

$$p = \Sigma\,(x\,u_i)\,u_i.$$

Distancia del punto x al espacio E^n:

$$|x-p| = \sqrt{|x|^2 - \sum_{i=1}^{n} |x\,u_i|^2}$$

2. - *Ecuación paramétrica del hiperplano.*

La ecuación [1] representa evidentemente el conjunto de todos los puntos x cuya proyección sobre el vector a es el punto

$$p = a\,\frac{|\gamma|}{|a|^2}. \qquad [3]$$

Tenemos, pues, la ecuación del hiperplano E^{-1} perpendicular al vector a en el punto p. Dado entonces cualquier punto $p = \lambda a\,(\lambda \gtreqless 0)$ la ecuación del hiperplano normal en él es $a\,x = \lambda|a|^2$. Queda así patente el significado de la constante

$$\gamma = \lambda|a|^2. \qquad [4]$$

Paramétricamente puede expresarse dicho hiperplano así, para cada semirrecta de origen O definida por el vector unitario u, el vector x cuya proyección sobre a es $\lambda\,a\,(\lambda \gtreqless 0)$ es:

$$x = u\frac{|x|}{|u|} = u|x| = u\,\frac{|\lambda a|}{\cos(\vartheta - \alpha)}$$

pero siendo $u\,a = |a|\cos(\vartheta - \alpha)$ resulta la ecuación

$$x = u\,\frac{|\lambda a|\;|a|}{ua}$$

o sea:

$$x = \beta u, \quad \beta = \frac{|\lambda|\ |a|^2}{ua} \tag{5}$$

comparándola con [4] salta a la vista la relación entre los parámetros β y γ de las dos ecuaciones del hiperplano: $\beta = \frac{|\gamma|}{ua}$.

3. - *Homotecia respecto de O.*

Si la razón es γ, es decir, $\frac{|x'|}{|x|} = \lambda$. El homotético del hiperplano $ax = \alpha$ es un hiperplano paralelo a él; en el caso $\alpha = 0$ resultan coincidentes. La figura homotética de la variedad esférica $(x-a)^2 = \rho^2$ es otra S^{-1}; si $a = 0$, la variedad esférica homotética es concéntrica a la dada y de radio $\lambda\rho$; si $\rho = a$ su homotética es también otra variedad esférica con centro λa y que pasa por O.

Inmediatamente se generalizan las conocidas propiedades de la homotecia en E^n.

4. - *Potencia y polaridad.*

Procediendo como en la geometría de E^n, dada la variedad esférica S^{-1} y el punto arbitrario p, las secantes $x = p + \lambda u$ (λ = real) trazadas por p, definidas por sendos vectores unitarios u determinan en S^{-1} pares de puntos dados por dos valores λ_1, λ_2 reales o imaginarios raíces de la ecuación:

$$\lambda^2 + 2\lambda(p-a)\,u + (p-a)^2 - \rho^2 = 0 \tag{6}$$

y la potencia de p viene definida así:

$$\pi = \lambda_1 \lambda_2 = (p-a)^2 - \rho^2 \gtreqqless 0 \tag{7}$$

según que p sea interior a S^{-1}, esté en la variedad, o sea exterior.

Este número π figura en los problemas de polaridad, que generalizan la clásica teoría desarrollada en geometría proyectiva para E^n.

En efecto, llamando x al conjugado armónico de p respecto de las dos intersecciones definidas por λ_1 y λ_2, el valor de λ que le corresponde es: $\lambda = \frac{2\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2+\lambda_1}$ resulta, pues, en forma paramétrica el hiperplano polar de p dado por la ecuación

$$x = p - \frac{\pi}{(p-a)u} u \qquad [8]$$

siendo de notar que también en el caso de intersecciones imaginarias el punto x es real.

Todas las propiedades proyectivas bien conocidas de la geometría de E^n subsisten; así por ejemplo, la reciprocidad de los puntos conjugados, resultando como figura polar del espacio lineal P^n un hiperplano P^{-n}.

5. - *Hiperplanos radicales.*

Dadas dos variedades esféricas $(r=1,2)$ el lugar de los puntos que tienen igual potencia respecto de ambas es el hiperplano R_{12}:

$$x(a_2 - a_1) = \frac{a_2{}^2 - a_1{}^2}{2} + \frac{\rho_1{}^2 - \rho_2{}^2}{2} \qquad [9]$$

perpendicular a la línea de centros.

Según las posiciones de S_1^{-1} y S_2^{-2} caben tres casos distintos, que conducen a dos tipos de haces.

Primer caso, si $|a_1 - a_2| > \rho_1 + \rho_2$ las variedades esféricas y también las esferas son exteriores entre sí y su hiperplano radical R_{12} separa éstas y a todas las del haz en dos familias sin puntos comunes, pudiendo considerarse el plano radical como límite común de ambos conjuntos.

Segundo caso, si $\rho_1 - \rho_2 < |a_1 - a_2| < \rho_1 + \rho_2$ todas las variedades del haz tienen común una variedad esférica S^{-2}, situada en el hiperplano radical R_{12}.

En el tercer caso $|a_1 - a_2| < \rho_1 - \rho_2$ una esfera está contenida en la otra, las variedades esféricas son del tipo primero con la sola diferencia de que los datos S_1^{-1} y S_2^{-1} están situados de un mismo lado de R_{12}, mientras que en el primero están separados por él.

También para los sistemas de variedades esféricas de centros a_r y radios ρ_r se generaliza la noción de recta radical, plano radical, etc.

Dado un sisteema de n variedades esféricas $r=1,2,\ldots,n$ se prueba fácilmente que la figura radical de este sistema es la variedad lineal $E^{-(n-1)}$ que resulta perpendicular al espacio $E^{(n-1)}$ determinado por los centros de dichas variedades esféricas.

6. - *Inversión respecto de O.*

Si la potencia es λ, es decir, $|x|\,|x'|=\lambda$ se calcula inmediatamente $x'=\dfrac{\lambda}{\|x\|}x$. El inverso del hiperplano $ax=0$ es, pues, el mismo; pero si el hiperplano es: $ax=\alpha$ resulta la variedad esférica de centro $\dfrac{\lambda a}{2\alpha}$ y radio $\dfrac{\lambda a}{2\alpha}$, es decir, la que pasa por O.

La figura inversa de la variedad esférica de centro a y radio ρ es la variedad esférica con centro $a'=\dfrac{\lambda a}{a^2-\rho^2}$ y radio $\rho'=\dfrac{\lambda\rho}{a^2-\rho^2}$.

Si $\rho=a$ resulta un hiperplano que no pasa por O.

7. - *Proyección estereográfica.*

Dada la variedad esférica S^{-1} de ecuación $x^2=1$, tomando el punto s como punto de vista sobre S^{-1}, si x es un punto cualquiera de S^{-1} su proyección sobre el hiperplano tangente en el polo opuesto $-s$, cuya ecuación es $Sx'=1$ es el punto $x'=s+2\dfrac{x-s}{1-xs}$ llamado proyección estereográfica de x, pero preferimos proyectar sobre el hiperplano diametral adoptando como proyección estereográfica de x el punto

$$x'=s+\frac{x-s}{1-xs}. \qquad [10]$$

La proyección estereográfica de la variedad esférica S^{-2} intersección de S^{-1} con el hiperplano $a\,x = \alpha^2$, es otra variedad esférica S'^{-2} de centro

$$q' = s + \frac{a - \alpha^2 s}{\alpha^2 - sa} \quad \text{y radio} \quad \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 - sa} + \mu. \qquad [11]$$

Este centro q' de S'^{-2} es la proyección estereográfica del punto q polo del hiperplano secante respecto de S^{-1}. Omitimos el largo cálculo elemental que prueba esta relación; y abreviamos el que demuestra la conservación de ángulos. Basta considerar en x sobre la variedad esférica dos puntos $x_1 \to x$, $x_2 \to x$, y sus homólogos $x_1' \to x'$, $x_2' \to x'$ en el hiperplano de proyección; llamando $d_1 = x_1 - x$, $d_2 = x_2 - x$, de la fórmula de transformación [10] se deduce la equivalencia:

$$\frac{|d_1'|}{|d_1|} \sim \frac{|d_2'|}{|d_2|} \sim \frac{2}{\rho^2} \quad \text{donde} \quad \rho = |x - s|. \qquad [11]$$

Sin restringir la generalidad puede suponerse $d_1' = \delta\, u_1$, $d_2' = \delta\, u_2$ siendo $|u_1| = |u_2| = 1$, $\delta \to 0$ y simplificando la fórmula

$$d_1'\, d_2' = \delta^2 \cos \alpha' = \frac{d_1 d_2 (1 - sx)^2 - [2(1 - sx) - (x - s)^2](sd_1)(sd_2)}{(1 - sx_1)(1 - sx_2)(1 - sx)^2} \quad [12]$$

mediante la igualdad $1 - s\,x = \frac{1}{2}|x - s|^2 = \frac{\rho^2}{2}$ y la equivalencia [11] resulta

$$\delta^2 \cos \alpha' \sim \frac{4 d_1 d_2}{\rho^4} \sim \delta^2 \cos \alpha$$

luego:

$$\alpha' = \alpha.$$

8.- *Distancia de un punto a la variedad lineal E^{-n}.*

Sea la variedad lineal E^{-n} de ecuaciones:

$$E^{-n} : a_i\, x = \gamma_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

el espacio $E^n : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \models x$ que pasa por el origen, resulta perpendicular a dicha variedad lineal; la ortogonalidad es consecuencia inmediata de ser a_i perpendicular a $a_i x = \gamma_i$.

La intersección y_0 de E^{-n} y E^n determina el vector $(x_0 - O)$ que por pertenecer a E^n es perpendicular a E^{-n}, luego $|x_0|$ es la distancia del origen a E^{-n} y su expresión es:

$$|x_0| = \sum_{r=1}^{n} a_s \frac{\sum_{r=1}^{n} \gamma_r - \Omega_{r,s}}{\delta_1^2 \delta_2^2 \ldots \delta_n^2 \Theta} \qquad [13]$$

donde: $\delta_i = |a_i|$, Θ es el determinante de orden n formado por los $\cos(a_i a_j) = \omega_{ij}$ y $\Omega_{r,s}$ se deduce del determinante $\|\delta_i \delta_j \omega_{ij}\|$ suprimiendo la fila r y la columna s.

Es claro que si el punto dado es q en la expresión anterior, deberá sustituirse $x - q$ en lugar de x.

9.- *Intersección de variedades esféricas.*

Dado un sistema de n variedades esféricas $(x - a_r)^2 = \rho_r^2$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$ con centros a_r linealmente independientes estos determinan un espacio lineal E^{n-1} expresado por la ecuación paramétrica $y = \sum_{r=1}^{n} \lambda_r a_r$ $\quad (\sum_{r=1}^{n} \lambda_r = 1)$.

Todo punto y de E^{n-1} definido por un sistema de valores λ_r es centro del conjunto $\{x\}$ de puntos reales o imaginarios comunes a las n variedades esféricas, pues calculando las distancias resulta al cabo de simplificaciones elementales:

$$(y_0 - x)^2 = (\sum_{r=1}^{n} \lambda_r a_r)^2 + \sum_{r=1}^{n} \lambda_r \beta_r \qquad [14]$$

como cuadrado del radio.

Estas distancias, iguales a $|y - x|$ que llamaremos radio del centro y_0, tienen como valor mínimo:

$$\rho_\lambda^2 = \left(\sum_{r=1}^{n-1} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \Xi_{i,r}}{\delta_1^2 \delta_2^2 \ldots \delta_{n-1}^2 \Theta_{n-1}} \delta_r + \alpha_n \right)^2 +$$

$$+ \sum_{r=1}^{n-1} \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i \Xi_{i,r}}{\delta_1^2 \delta_2^2 \ldots \delta_{n-1}^2 \Theta_{n-1}} \cdot (\beta_r - \beta_n) + \beta_n$$

llamando:

$$\beta_n = \rho_n^2 - a_n^2; \quad \gamma_i = \left[\frac{\beta_n - \beta_i}{2} - a_n(a_i - \bar{a}_n)\right]; \qquad [15]$$

$\delta_i = |a_i - a_n|$; Θ_{n-1} es el determinante de orden $n-1$ formado por los valores $\Theta_{i,j} = \cos\arg(a_i - a_n)(a_j - a_n)$ y $\Xi_{i,r}$ resulta del determinante $\|\delta_k\,\delta_l\,\Theta_{kl}\|$ suprimiendo la fila i la columna r.

10. - *Isometría.*

Demostrando que ese valor mínimo es alcanzado precisamente por el punto y_0, intersección de E^{n-1} con la variedad x situada en la variedad lineal $R = E^{-(n-1)}$ isomorfa con H, y como en ese espacio es x una variedad esférica de centro y_0, resulta que las variedades esféricas x intersecciones de las S_r^1 son isomorfas (isométricas) con las S^{-1} y si bien todas estas variedades esféricas, son iguales desde el punto de vista topológico, considerando a S^{-1} como un subespacio de H y a S^{-n} como un subespacio de $E^{-(n-1)}$, esta igualdad no existe cuando se mira a S^{-n} no ya como un subespacio de $E^{-(n-1)}$ sino como un subconjunto de puntos pertenecientes a H, pues de este modo tienen propiedades distintas, una de ellas es la que acabamos de demostrar en páginas anteriores y que nos muestra que, mientras la variedad esférica S^{-1} tiene un solo centro, la variedad S^{-2}, tiene una línea de centros, y en general la variedad S^{-n} tiene un espacio E_{n-1} de centros.

Acerca de la distinción entre isometría interna y externa, así como sobre el artificio de ampliar la definición de espacio de Hilbert adoptando una sucesión de coordenadas indefinida en ambos sentidos, volveremos en otro trabajo.