SULLA CHIUSURA DEI SISTEMI ORTONORMALI DI FUNZIONI

Nota di FRANCESCO G. TRICOMI, Torino (Italia)

Dedicata al Prof. Dr. Beppo Levi nel suo 80º compleanno

1. - La verifica che un certo sistema ortonormale $\{\varphi_n\}$ di funzioni, sia pure di una sola variabile x, è *chiuso* (e quindi anche *completo*) non è sempre cosa agevole. Pertanto fu molto apprezzata, dai non molti che ne presero conoscenza, una Nota del 1921 di G. Vitali[1], che riduceva tale verifica a quella del fatto che una certa, ben determinata serie di funzioni, avesse una data somma. Precisamente la condizione necessaria e sufficiente affinchè il sistema $\{\varphi_n\}$, ortonormale nell' intervallo (a, b), fosse chiuso, risultava essere il verificarsi dell'identità

$$(1) \qquad \Delta(\xi) = \xi - a - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_a^{\xi} \varphi_n(x)\, dx \right]^2 = 0, \qquad (a \leqq \xi \leqq b).$$

Tuttavia anche la condizione di Vitali non è sempre d'immediata verifica e, per esempio, nel caso del *sistema trigonometrico*:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \ldots,$$

ortonormale nell'intervallo $(0, 2\pi)$, bisogna, in sostanza, far

(1) G. VITALI, *Sulla condizioni di chiusura di un sistema di funzioni ortogonali*, Rend. R. Acc. Naz. Lincei (5) *30*, 498-501 (1921).

vedere che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\xi}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2}\xi + \frac{\xi^2}{4}, \qquad (0 \leqq \xi \leqq 2\pi),$$

ciò che è, certo, elementare ma non facilissimo. Conseguentemente mi pare molto notevole (e mi sorprende che non sia da tutti conosciuta) la semplificazione apportata nel 1945 dal Dalzell (²), che ridusse la verifica a quella del fatto che una certa serie *di costanti* abbia una determinata somma. Per esempio, nel caso del sistema trigonometrico, applicando il criterio di Dalzell, tutto si riduce a far vedere che sussiste la classica formula

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \pi^2/6.$$

La presente breve Nota si propone di richiamare l'attenzione sulle precedenti condizioni di chiusura, mostrando anche come esse possano agevolmente generalizzarsi con l'introdurre certe funzioni arbitrarie, che possono far talora comodo. In particolare nel n. 4 farò vedere come la condizione di Vitali così generalizzata fornisce una via, che mi sembra fra le più semplici, per dimostrare la completezza dei polinomi di Laguerre.

2. - Cominciando dalla condizione di Vitali, per ottenere l'accennata generalizzazione, non c'è che da ricordare (³) come la (1) non sia altro che l'equazione di Parseval per la generica funzione del sistema $\{\varepsilon_\xi(x)\}$ essendo

$$\varepsilon_\xi(x) = \begin{cases} 1, & (\text{per} \quad a \leqq x \leqq \xi) \\ 0, & (\text{per} \quad \xi < x \leqq b); \end{cases}$$

sistema che comprende in sè (limitandosi a considerare i soli valori *razionali* di ξ) un classico sistema (non ortogonale) completo di funzioni.

(²) D. P. Dalzell, *On the completness of a series of normal orthogonal functions*, J. London Math. Soc. *20*, 87-93 (1945).

(³) Ved. p. es. le mie recentissime *Vorlesungen über Orthogonalreihen.* (Grundlehren d. math. Wissenschaften, Bd. *76*, Springer-Verlag, 1955) § 1. 11.

Invero, considerato che nulla cambia di sostanziale se, in luogo del sistema $\{s_\xi(x)\}$, si considera il sistema $\{s_\xi(x)\, g(x)\}$, dove $g(x)$ è una qualunque funzione a quadrato sommabile in (a, b); la (1) potrà rimpiazzarsi con la nuova condizione necessaria e sufficiente

$$\Delta'(\xi) = \int_a^\xi g^2(x)\, dx - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_a^\xi g(x)\, \varphi_n(x)\, dx \right]^2 = 0. \tag{2}$$

Più generalmente ancora se, invece di considerare ortonormalità *semplice*, si considera ortonormalità rispetto ad una certa *funzione-peso* $p(x)$, si ha corrispondentemente

$$\Delta^*(\xi) = \int_a^\xi p(x)\, g^2(x)\, dx - \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_a^\xi p(x)\, g(x)\, \varphi_n(x)\, dx \right]^2 = 0. \tag{3}$$

3. - La semplificazione di Dalzell discende dall'osservazione che, comunque, è sempre $\Delta(\xi) \geqq 0$, ciò che permette di sostituire alla condizione $\Delta(\xi) \equiv 0$ l'altra che sia *zero* il suo integrate preso fra i limiti a e b.

L'osservazione si può estendere alla funzione $\Delta^*(\xi)$ che compare nella (3), tenendo conto che

$$\int_a^\xi p(x)\, g(x)\, \varphi_n(x)\, dx$$

è il generico *coefficiente di Fourier* della funzione $g(x)\, s_\xi(x)$ rispetto al sistema $\{\varphi_n\}$ ortonormale in (a, b) rispetto alla funzione-peso $p(x)$. Invero la disuguaglianza di Bessel permette allora di asserire che

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_a^\xi p(x)\, g(x)\, \varphi_n(x)\, dx \right]^2 \leqq$$

$$\int_a^b p(x)\, g^2(x)\, s_\xi^2(x)\, dx = \int_a^\xi p(x)\, g^2(x)\, dx,$$

ciò che equivale appunto a dire che $\Delta^*(\xi) \geqq 0$.

Conseguentemente, detta $q(x)$ una qualsiasi funzione *sempre positiva* in (a, b) e tale che il prodotto $q(\xi)\,\Delta^*(\xi)$ risulti integrabile; tanto vale asserire che la funzione $\Delta^*(\xi)$, che è continua [4], è identicamente *zero*, quanto asserire che

$$\int_a^b q(\xi)\,\Delta^*(\xi)\,d\xi = 0. \tag{4}$$

Questa è, in sostanza, la condizione generalizzata di Dalzell che volevasi qui stabilire. Essa assume la sua forma definitiva osservando che —per un ben noto teorema di Dini sull'uniforme convergenza di una serie di funzioni non negative avente per somma una funzione continua— l'integrazione della serie che compare in $\Delta^*(\xi)$ si può eseguire termine a termine, ottenendo così la nuova condizione necessaria e sufficiente di chiusura:

$$\int_a^b q(\xi)\,d\xi \int_a^\xi p(x)\,g^2(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b q(\xi) \left[\int_a^\xi p(x)\,g(x)\,\varphi_n(x)\,dx\right]^2 d\xi, \tag{5}$$

che per $p \equiv q \equiv g \equiv 1$ si riduce a quella di Dalzell.

4. - Come applicazione della (2) con $g(x) \not\equiv 1$ dimostriamo che i *polinomi di Laguerre* $L_n^{(\alpha)}(x)$ o, meglio, le corrispondenti funzioni normalizzate:

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{n!}{\Gamma(\alpha+n+1)}}\,L_n^{(\alpha)}, \qquad (\alpha > -1;\, n = 0, 1, 2, \ldots),$$

formano, rispetto alla funzione peso

$$p(x) = e^{-x}\,x^{\alpha},$$

un sistema ortonormale *chiuso* nell'intervallo fondamentale $(0, \infty)$.

---

(4) Per la dimostrazione (nel caso di Δ, ma il caso di Δ^* è perfettamente analogo) v. p. es. TRICOMI op. cit. (3) p. 30.

Assumendo all'uopo $g(x)=e^x$ e tenendo conto che, per una nota formula sui polinomi di Laguerre, è

$$\int_0^\xi x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x)\,dx=\frac{1}{\alpha+n+1}\,\xi^{\alpha+1} L_n^{(\alpha+1)}(\xi),$$

tutto è ridotto a dimostrare che

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{\Gamma(\alpha+n+1)}\left[\frac{1}{\alpha+n+1}\,\xi^{\alpha+1} L_n^{(\alpha+1)}(\xi)\right]^2=\int_0^\xi e^x x^\alpha\,dx$$

cioè che

$$(6)\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(\alpha+n+1)\Gamma(\alpha+n+2)}\,[L_n^{(\alpha+1)}(\xi)]^2=\xi^{-2(\alpha+1)}\,\gamma_1(\alpha+1,\xi),$$

avendo fatto uso della notazione γ_1 per la *funzione gamma incompleta* «con esponenziale positivo» ([5]). Ma, salvo le diverse notazioni, la (6) non è altro che uno sviluppo ottenuto nel 1936 da Erdélyi ([6]) generalizzando uno precedente dello scrivente; quindi la chiusura dei polinomi di Laguerre può considerarsi come un'immediata conseguenza dello sviluppo in parola ([7]).

([5]) TRICOMI, *Funzioni ipergeometriche confluenti* (Roma, Cremonese, 1954) Cap. IV.

([6]) A. ERDÉLYI, *Sulla generalizzazione di una formula di Tricomi*, Rend. R. Acc. Naz. Lincei (6) *29*, 347-350 (1936). V. pure Sitzungsber. Akad. d. Wiss. zu Wien IIª, Bd. *147*, 513-520 (1938), form. (3) a p. 514.

([7]) Per altre dimostrazioni v. op. cit. ([3]) § 6.5 e G. SANSONE (e G. VITALI) *Moderna teoria d. funz. di var. reale* Pte. II (3ª Ed. Bologna, Zanichelli (1952) pp. 351-383.