APLICACION DE LA TRANSFORMACION DE LAPLACE A LA DIFRACCION EN REDES IRREGULARES

por Dietrich Voelker, Mendoza

(Comunicado en la reunión de la U.M.A., Buenos Aires, 3/12/1955)

Consideramos la difracción de la luz, que es producida por un haz homogéneo de rayos paralelos, que inciden ortogonalmente en una pantalla plana vertical con ranuras que están situadas a lo largo de un eje horizontal t, y que son ortogonales a dicho eje. Si suponemos que las ranuras son de altura infinita en ambas direcciones, tenemos independencia de la segunda coordenada, y se tienen sólo haces difractados paralelos al plano horizontal; cada haz está compuesto de rayos paralelos. Observamos la difracción mediante una lente convergente (con extensión infinita por lo menos en la dirección de la segunda coordenada), de modo que el fenómeno se reduce a una recta que pasa por el foco de la lente y es paralela al eje t; cada haz difractado produce un solo punto (1) en la recta.

Las ranuras generalmente se suponen equidistantes (retículo de rayas); nosotros admitimos, más generalmente, que sus distancias varían de una manera determinada. Además admitiremos, en un caso, que los anchos de las ranuras tampoco sean todos iguales. Abandonaremos también la hipótesis, comúnmente hecha, de que la pantalla contenga sólo partes totalmente transparentes (= aberturas) y totalmente no transparentes, sino que presentaremos como transparencia de las aberturas ciertas funciones. Trataremos el problema de cómo, en el caso de un retículo in-

(1) Para evitar que a este punto llegara (por segundo) una energía infinita, deberíamos agregar la condición, de que los haces de luz que pasan por las ranuras, sean limitados por arriba y por abajo, y esto sin difracción (o con difracción despreciable); pero esta consideración es superflua, puesto que integramos sólo a lo largo del eje t, es decir en forma unidimensional, de modo que tomamos en cuenta sólo una capa de altura uno.

finito en la dirección t; debe disminuir la transparencia a lo largo del eje t para que resulten en la recta de observación intensidades de luz finitas. El método usado es la transformación de Laplace, que se obtiene por una pequeña generalización de la integral de Kirchoff.

La integral de Kirchoff, que da la distribución de las amplitudes de la luz difractada, se reduce en nuestro caso, que es nada más que la difracción de Fraunhofer y que es undimensional, a la integral

$$\int e^{-2it(\pi/\lambda)\,\mathrm{sen}\,2\vartheta}\,dt, \tag{1}$$

donde

$\lambda =$ longitud de onda de la luz usada

$2\vartheta =$ ángulo de difracción (ángulo formado por el haz principal y el haz difractado observado)

y donde la integral debe extenderse a todas las ranuras a lo largo del eje t.

Supongamos ahora que no existen ranuras en el semieje negativo de t, y definamos en el semieje positivo una función $F(t)$ que signifique la transparencia de la pantalla, de modo que siempre es $0 \leqq F(t) \leqq 1$. Si usamos aun la abreviatura: $\frac{\pi}{\lambda}\,\mathrm{sen}\,2\vartheta = p$, la integral de Kirchoff se presenta ahora en la forma mas general:

$$\int_0^\infty e^{-2pit}\,F(t)\,dt. \tag{2}$$

Entonces las amplitudes que se producen a lo largo de la recta de observación son

$$a(p) = K\sqrt{I_0}\int_0^\infty e^{-2pit}\,F(t)\,dt, \tag{3}$$

donde I_0 es la intensidad constante de la luz que incide en la pantalla, y K es un factor de proporcionalidad [2]. La función de las amplitudes $a(p)$ depende de las dos variables ϑ y λ.

Usando la terminología de la transformación de Laplace

$$(4) \qquad f(s) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\, dt,$$

podemos escribir la (3) en la forma

$$(5) \qquad a(p) = K\sqrt{I_0}\; f(2pi),$$

y decir que la función f, que determina la función de las amplitudes, es la función transformada, mientras que su función original $F(t)$ es la función de la transparencia.

Las intensidades $i(p)$ a lo largo de la recta de observación son

$$(6) \qquad i(p) = \frac{1}{2}\,|a(p)|^2 = \frac{K^2 I_0}{2}\,|f(2pi)|^2.$$

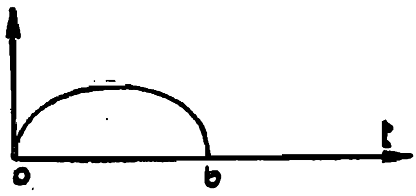
El pasaje de $f(s)$ a $a(p)$ según la (5) es solamente posible si la integral de Laplace (4) converge en $Rs \geqq 0$. Esto se cumple siempre cuando $F(t)$ se anula idénticamente desde un cierto t en adelante (= caso de un retículo finito), pues entonces la integral de Laplace de $F(t)$ (abreviada por $LF(t)$) converge en todo el plano $-\infty < Rs < \infty$, y el pasaje de $f(s)$ a $a(p)$ es posible. Pero en casos de retículos infinitos (en la dirección del eje t) puede ocurrir que $LF(t)$ no converja en el eje imaginario $Rs = 0$, de modo que debemos someter $F(t)$ a una modificación para lograr la convergencia de $LF(t)$ en todo el eje imaginario.

A continuación damos unos ejemplos típicos para las distintas posibilidades que hemos mencionado recién y en la introducción.

---

(2) Este factor no tiene importancia porque generalmente interesa sólo la *distribución* de las amplitudes, y puede omitirse.

1) Una sola ranura, con transparencia no constante.



$$F(t) = 1 - \left(\frac{2t}{b} - 1\right)^{2n}$$

$$(n \text{ entero} > 0)$$

$$L\,F(t) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt = \int_0^b e^{-st}\left[1 - \left(\frac{2t}{b} - 1\right)^{2n}\right] dt$$

$$= \frac{1 - e^{-bs}}{s} - b\,e^{-(b/2)s} \int_0^1 t^{2n} \cosh \frac{b}{2} st\,dt = f(s).$$

La última integral converge para $R\,s = 0$ (y aún para todo s), y las funciones de las amplitudes y de la intensidad resultan finitas:

$$a(p) = f(2pi)$$

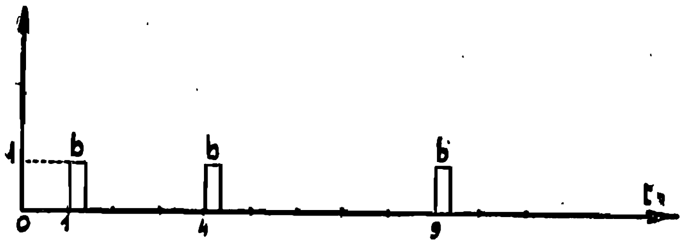
$$i(p) = |f(2pi)|^2 \text{ [3]}.$$

La evaluación de la integral para n pequeño es fácil. Si $n \to \infty$, resulta $f(s) \to \dfrac{1 - e^{-bs}}{s}$, pues la integral se anula. Este caso límite corresponde a una transparencia constante:

$$F(t) = 1 \quad (0 < t < b).$$

2) Ranuras con anchos iguales, pero con distancias crecientes. En los puntos $t = k^2 (k = 1, 2, 3, \ldots)$ están situados los extremos izquierdos de ranuras del ancho b; la transparencia en las ranuras es igual a 1.

[3] En adelante suprimimos los factores constantes, cfr. nota anterior.



$b<3$

$$F(t)=\begin{cases} 1 & \text{si} \quad k^2<t<k^2+b \\ 0 & \text{en los otros } t \end{cases}$$

$$L\,F(t)=\int_0^{\infty} e^{-st}F(t)\,dt=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{k^2}^{k^2+b} e^{-st}\,1\,dt=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-k^2s}-e^{-(k^2+b)s}}{s}$$

$$=\frac{1-e^{-bs}}{s}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-k^2s}=\frac{1-e^{-bs}}{2s}\left[\vartheta_3\left(0,\frac{s}{\pi^2}\right)-1\right],$$

donde ϑ_3 es la tercera función Theta:

$$\vartheta_3(v,x)=\frac{1}{\sqrt{\pi x}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k e^{-(1/x)(v+k)^2}=1+2\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\pi^2k^2x}\cos 2\pi k v.$$

La integral de Laplace converge evidentemente a la derecha del eje imaginario $Rs=0$ (la abscisa de convergencia es $=0$); pero no converge en todos los puntos del eje mismo; por ej., no converge en el origen $s=0$, donde la integral de Laplace se hace infinita. Por tanto, la intensidad en $s=0$, o bien en $p=0$ (lo que significa $\vartheta=0$ y en consecuencia el haz de los rayos primarios) es infinita, de acuerdo con el hecho de que la energía total que pasa por segundo por las ranuras entre las alturas 0 y 1 (4), también es infinita.

Para obtener valores finitos hay que modificar $F(t)$ de tal manera que la integral de Laplace converja por lo menos en todo el eje imaginario $Rs=0$. Por ej., es suficiente multiplicar la transparencia $F(t)$ por $e^{-\varepsilon t}(\varepsilon>0)$ (5), es decir amortiguarla.

---

(4) Ver nota 1.

(5) También serviría un factor $O\left(\frac{1}{t^{\varepsilon}+1}\right)$ $(\varepsilon>0,$ pues la integral de Laplace de una función integrable y $O\left(\frac{1}{t^{\varepsilon}+1}\right)$ $(\varepsilon>0)$ converge en el eje imaginario $Rs=0$.

Entonces la abscisa de convergencia de $LF(t)$ se traslada (según las reglas conocidas) en ε a la izquierda; en el caso presente la abscisa de convergencia es $-\varepsilon$, y la convergencia está asegurada en el eje imaginario: todas las intensidades $i(p)$ resultan finitas.

Ahora tenemos:

La transparencia

$$F(t)=\begin{cases} e^{-\varepsilon t} & \text{si} \quad k^2<t\leq k^2+b \\ 0 & \text{en los otros } t \end{cases};$$

su transformada

$$f(s)=\frac{1-e^{-b(s+\varepsilon)}}{2(s+\varepsilon)}\left[\vartheta_3\left(0,\frac{s+\varepsilon}{\pi^2}\right)-1\right];$$

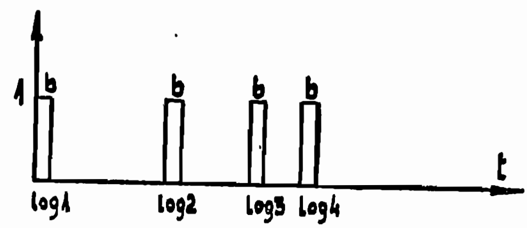
la función de las amplitudes

$$a(p)=\frac{1-e^{-b(2pi+\varepsilon)}}{2(2pi+\varepsilon)}\left[\vartheta_3\left(0,\frac{2pi+\varepsilon}{\pi^2}\right)-1\right];$$

y la intensidad que corresponde a 2ϑ

$$i(p)=|a(p)|^2.$$

3) Ranuras con anchos iguales, pero con distancias decrecientes. En los puntos $t=\log k (k=1,2,3,\ldots)$ están situados los extremos izquierdos de las ranuras de ancho b; la transparencia en las ranuras la imponemos primeramente igual a 1.



Este ejemplo tiene la complicación de que —cuando es $\log(k+1)-\log k\leqq b$, o bien $k\geqq\frac{1}{e^b-1}$ — las ranuras se superponen. Sin embargo no se puede decir que desde ese k en adelante resulte en realidad una sola ranura, infinita en la dirección $t \to \infty$, porque esta «ranura» tiene saltos de la transparencia. Desde $t = k \geqq \frac{1}{e^b - 1}$ en adelante, la transparencia crece (6) en forma complicada y rápida por la sumación de un número de transparencias cada vez más grande. Esto no ocurrió en el ejemplo anterior (ej. 2) y hace esperar, que esta vez la amortiguación tendrá que ser más fuerte que en el ejemplo 2).

$F(t)$ tiene en nuestro caso la representación

$$F(t) = [e^t] - [e^{t-b}],$$

donde el símbolo $[x]$ significa el máximo entero $\leqq x$.

Pero para obtener su transformada $f(s)$, usamos más cómodamente la definición original de $F(t)$ y tenemos:

$$L\,F(t) = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\log k}^{\log k + b} e^{-st}\,dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-s \log k} - e^{-s(\log k + b)}}{s}$$

$$= \frac{1 - e^{-bs}}{s} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-s \log k} = \frac{1 - e^{-bs}}{s} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{s^k}$$

$$= \frac{1 - e^{-bs}}{s} \zeta(s) = f(s),$$

donde $\zeta(s)$ es la función Zeta de Riemann. La abscisa de convergencia de $L\,F(t)$ es $\geqq 1$, pues $\zeta(1)$ tiene en $s = 1$ un polo (de primer orden).

Para determinar la abscisa de convergencia se tiene

$$e^t - 1 < [e^t] \leqq e^t$$

$$e^{t-b} - 1 < [e^{t-b}] \leqq e^{t-b}$$

y en consecuencia

$$e^t - 1 - e^{t-b} < [e^t] - [e^{t-b}] < e^t - (e^{t-b} - 1).$$

---

(6) Transparencias más grandes que 1 no tienen sentido físico. Si intervienen formalmente, debe ser interpretadas como "transferencias" que no sólo dejan pasar toda la luz incidente, sino que además aumentan su intensidad.

A causa de $e^t - e^{t-b} = e^t(1 - e^{-b})$, la función $F(t) = [e^t] - [e^{t-b}]$ se comporta, si $t \to \infty$, como $C \cdot e^t$, lo que implica que la abscisa de convergencia de $L\,F(t)$ tiene el valor 1.

Por tanto, para lograr convergencia de $L\,F(t)$ en $R\,s > 0$, $F(t)$ debe ser multiplicada por e^{-t}. Pero entonces subsiste la divergencia en $s = 0$. Logramos convergencia en todo el eje imaginario $R\,s = 0$, multiplicando $F(t)$ por $e^{-(1+\varepsilon)t}$ $(\varepsilon > 0)$ (7).

La condición, puesta por la Física, de que la transparencia sea $\leqq 1$, se cumple a causa de

$$e^{-t} F(t) < 1 - e^{-b} + e^{-t}$$

desde $t = b$ en adelante. Pero si $t < b$ y si además $b > \log 2$, la función $e^{-t} F(t)$ toma en el intervalo $\log 2 < t < b$ valores mayores que 1. Pero son $\leqq \frac{3}{2}$, pues en el intervalo vale

$$1 - e^{-b} + e^{-t} \leqq 1 + e^{-t} \leqq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

En consecuencia bastaría multiplicar la función $e^{-t} F(t)$ por el factor $\frac{2}{3}$; pero si se desea una modificación sólo local, debería restarse la función $\phi(t)$ igual a $\frac{1}{2}$ en el intervalo e igual a 0 en el intervalo complementario.

La función $e^{-(1+\varepsilon)t} F(t) = F_1(t)$ tiene la transformada

$$f_1(s) = \frac{1 - e^{-b(s+1+\varepsilon)}}{s+1+\varepsilon}\, \zeta\,(s + 1 + \varepsilon).$$

La integral de Laplace converge en $R\,s > -\varepsilon$, de modo que tenemos convergencia en el eje imaginario $R\,s = 0$, y las funciones de las amplitudes $a(p)$ y de la intensidad $i(p)$ dan siempre valores finitos.

Si $b > \log 2$, $F_1(t)$ y $f_1(s)$ pueden ser multiplicadas por el factor $\frac{2}{3}$. Si se desea restar de $F_1(t)$ la función

(7) o por otra función integrable que sea $O\,(e^{-(1+\varepsilon)t})$ o $O\left(\frac{e^{-t}}{t^{1+\varepsilon}}\right)$.

$$e^{-\varepsilon t}\phi(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\varepsilon t} & \text{si} \quad \log 2<t<b\\ 0 & \text{en los otros} \quad t,\end{cases}$$

hay que restar de la transformada $f_1(s)$ la función

$$\frac{\frac{1}{2^{s+\varepsilon}}-e^{b(s+\varepsilon)}}{2(s+\varepsilon)}.$$

La integral de Laplace de la función $e^{-\varepsilon t}\phi(t)$ converge en todo el plano de las s. —

De los ejemplos 2) y 3) se llega fácilmente al siguiente resultado: si las ranuras tienen la transparencia constante 1 y anchos iguales, pero distancias entre sí distintas (en otras palabras: si se trata de una estructura análoga a los líquidos), $F(t)$ tiene como transformada la serie de Dirichlet:

$$f(s)=\frac{1-e^{-bs}}{s}\sum_k e^{-l_k s},$$

donde los l_k son los extremos izquierdos de las ranuras, y b su ancho.

En los casos en que el número de ranuras y la extensión del retículo son infinitos, se cumple siempre la condición:

$$0\leqq l_1<l_2<l_3<\ldots\rightarrow\infty;$$

pero si se quiere evitar superposiciones de las ranuras, tiene que agregarse la condición: $l_{k+1}>l_k+b$.

Bajo esta última condición, la serie de Dirichlet converge por lo menos en $Rs>0$, pues se tiene:

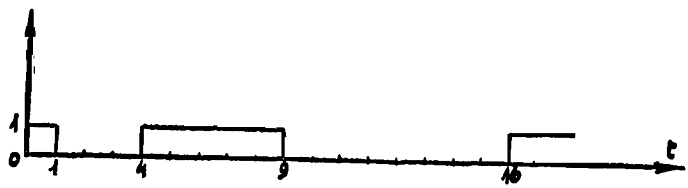
$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}e^{-l_k s}\right|\leqq\sum_{k=1}^{\infty}\left|e^{-l_k s}\right|=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-l_k Rs}<\sum_{k=1}^{\infty}e^{-(l_1+(k-1)b)Rs}$$
$$=e^{-(l_1-b)Rs}\sum_{k=1}^{\infty}e^{-kbRs}.$$

La última suma es una serie geométrica y converge si $Rs>0$.

Es evidente que también la integral de Laplace converge bajo nuestras condiciones por lo menos en el mismo semiplano, pues es $F(t)\leqq 1$, y $L1$ converge en $Rs>0$. —

4) Ranuras con anchos y distancias crecientes.

Los extremos izquierdos de las ranuras están situados en los puntos $t=0, 4, 16, \ldots, (2k)^2, \ldots$ y los extremos derechos en los puntos $t=1, 9, 25, \ldots, (2k+1)^2, \ldots$. La transparencia en las ranuras se supone primeramente igual a 1.



Pero esta función de transparencia, que es

$$F(t)=\begin{cases} 1 \quad \text{si} \quad (2k)^2 < t < (2k+1)^2 \\ 0 \quad \text{en los otros } t \end{cases}$$

no sirve, porque su integral de Laplace diverge en $s=0$:

$$\int_0^\infty F(t)\, dt = \infty .$$

Por consiguiente debemos aplicar otra vez una amortiguación, y se ve fácilmente que basta la misma del ejemplo 2), es decir la multiplicación de $F(t)$ por el factor $e^{-\varepsilon t}(\varepsilon > 0)$ (8). Entonces se tiene

$$F(t)=\begin{cases} e^{-\varepsilon t} \quad \text{si} \quad (2k)^2 < t \leq (2k+1)^2 \\ 0 \qquad \text{en los demás puntos;} \end{cases}$$

y el cálculo da el resultado

$$f(s)=\frac{1+\vartheta_0(0, \frac{s+\varepsilon}{\pi^2})}{2(s+\varepsilon)},$$

---

(8) Pues $L\, e^{-\varepsilon t}$ converge en $\Re\, s > -\varepsilon$. Serviría también el factor $\frac{1}{t^{1+\varepsilon}}$, ver pág. 5, nota al pie (5).

donde

$$\vartheta_0(v,x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k e^{-\pi^2 k^2 x}\cos 2\pi k v$$

$$= 1 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-(1/x)(v+1/2+k)^2}.$$

(función Theta del orden cero).

Siendo la abscisa de convergencia $= -\varepsilon$, resultan (finitas)

$$a(p) = f(2pi)$$

$$\text{e} \quad i(p) = |a(p)|^2. —$$

Respecto a ejemplos de retículos con extensión infinita; pero sin amortiguación de la transparencia, mencionamos sólo que son fáciles de construir, y que basta hacer disminuir los anchos de las ranuras como por ej. $\frac{1}{2^k}$ o como $\frac{1}{k^\alpha}$ $(\alpha > 1)$. —

En cuanto a la realización experimental de estos o semejantes ejemplos, caben las consideraciones siguientes.

Si pensamos sólo en la extensión de las redes a lo largo del eje t, no hay problemas:

Casos con un número finito de ranuras permiten una realización fácil por modelos, los casos con un número infinito de ranuras (y extensión infinita del retículo en la dirección $t \to \infty$) lo permiten sólo aproximadamente; el valor de la aproximación aumenta con las extensión de las redes usadas en el experimento, y con la amortiguación aplicada a las ranuras lejanas que son suprimidas en el modelo.

Si $b = \text{const.}$ y los l_k son equidistantes (retículo normal), el modelo representa una estructura cristalina, y la serie de Dirichlet se reduce a una serie geométrica.

Si $b = \text{const.}$ y si las distancias entre los l_k tienen una distribución determinada, el modelo representa la estructura de los líquidos.

Si tanto b como las distancias entre los l_k varían, el modelo representa la estructura de sustancias altopolimerizadas micelares.

Estas comparaciones valen en los casos de retículos finitos.

Si el número de las ranuras y la extensión del retículo son infinitos, molesta la amortiguación, si es necesario imponerla a las transparencias. —

Más difícil presenta el problema de la realización experimental, si pensamos en la extensión de las redes en la otra dirección, ortogonal a *t*.

En los libros de texto se llega a la forma unidimensional de la integral de Kirchoff, siempre partiendo de la suposición de ranuras de alturas infinitas en ambas direcciones. Bajo esta condición teórica, se tiene independencia de la otra coordenada y la integral unidimensional es aplicable. En cuanto a la realización experimental, se cree que la aproximación es tanto mejor, cuanto más altas sean las ranuras.

Pero dicha suposición, de que el caso infinito sea el límite de los casos finitos, no es cierta, como puede deducirse fácilmente de los trabajos de otros autores sobre otro tema (9).

Por lo tanto hay que buscar otras soluciones, y para destacar las dificultades a superar, hemos detallado en la introducción del presente trabajo las consecuencias de la suposición de ranuras infinitas, comúnmente hecha en la literatura.

Las condiciones implicadas han sido:

1) la posibilidad de producir haces de luz homogéneos de extensión considerable;

2) la posibilidad de producir haces de luz que son formados por rayos paralelos sólo a una dirección;

además las condiciones triviales:

3) la existencia de ranuras de altura infinita;

4) la existencia de haces de luz homogéneos con energía infinita, es decir de corte infinita;

5) la existencia de lentes con extensión infinita.

Una solución del problema fue dada por Born (10), que logra

---

(9) R. Hosemann y D. Joerchel, *Zeitschrift für Physik* 138 (1954), pág. 209; Boersch, ibid, 131 (1951), pág. 78.

(10) M. Born, *Optik*, § 48, Springer, Berlín, 1933.

una muy buena aproximación experimental del caso unidimensional, empleando en lugar de una fuente «puntiforme» de luz, una que tiene la forma de un alambre largo (ranura de iluminación larga) paralelo a las ranuras de difracción, también muy largas.

Pero se puede obtener de otra manera la distribución de las intensidades que corresponde al caso unidimensional, incluso para un retículo irregular de ranuras; de esto nos ocuparemos en otra oportunidad.

Para terminar, me es grato deber expresar mi agradecimiento al Dr. Guillermo Bibl por haberme invitado a trabajar con él en este campo, donde colabora como físico, y por haber contribuido mucho a la presente comunicación.