EL TEOREMA DE ZORN Y LA EXISTENCIA DE FILTROS E IDEALES MAXIMALES EN LOS RETICULADOS DISTRIBUTIVOS

por GREGORIO KLIMOVSKY

El objeto de este trabajo (1) es demostrar que los dos siguientes enunciados son lógicamente equivalentes al teorema de Zorn (y, por consiguiente, al axioma de elección):

E_1: *En todo reticulado distributivo con primer elemento, todo filtro está contenido en un ultrafiltro.*

E_2: *En todo reticulado distributivo con último elemento, todo ideal está contenido en un ideal maximal.*

Para discutir esta equivalencia, vamos a suponer conocidas las nociones de «reticulado», «reticulado distributivo», «álgebra de Boole», «filtro», «ideal», «ultrafiltro» (o «filtro máximal») e «ideal maximal», así como todas las nociones habitualmente ligadas a aquéllas (2).

Es conocido el hecho de que el teorema de completidad de Gödel-Malcev para el cálculo proposicional bivalente general (3) es equivalente a la afirmación de que, en toda álgebra de Boole, todo filtro está contenido en un ultrafiltro. Si la presunción de que el teorema de completicidad de Gödel-Malcev es más débil que el teorema de Zorn resulta cierta, entonces el paso dado trasladando la existencia de ultrafiltros desde las álgebras de

(1) Presentado en la reunión de la UNIÓN MATEMÁTICA ARGENTINA del 22 de mayo de 1957.

(2) Por ejemplo, véase [5].

(3) o sea, el teorema que afirma que un conjunto consistente de fórmulas del cálculo proposicional ''clásico'' —o bivalente— es satisfactible. Ver [2]. La palabra ''general'' involucra que el número cardinal de las variables proposicionales puede ser cualquiera. Ver [4].

Boole hasta los reticulados distributivos con primer elemento constituye una generalización más fuerte que la afirmación original.

Vamos a ocuparnos exclusivamente del enunciado E_1, ya que el enunciado E_2 afirma lo mismo que el E_1, pero empleando términos duales.

La demostración de que en todo reticulado con primer elemento (y no sólo en los distributivos) todo filtro está contenido en un filtro maximal se efectúa fácilmente si se utiliza el teorema de Zorn como hipótesis, y no nos ocuparemos de ella por ser bien conocida. Por consiguiente, nos limitaremos a demostrar que el enunciado E_1 implica lógicamente al teorema de Zorn.

En otro trabajo (4) hemos demostrado que el teorema de Zorn es equivalente al enunciado siguiente:

G: *En toda álgebra de Boole A, todo conjunto C de elementos de A, no contradictorio* (5) *en A, que esté contenido en un subconjunto B cualquiera de A, estará contenido en otro subconjunto C′ de B, que también es no contradictorio en A, pero al que no puede añadirse ningún otro elemento de B sin que deje de ser no contradictorio en A.*

Para nuestro propósito bastará probar, pues, que el enunciado E_1 implica al enunciado G.

Sea entonces A un álgebra de Boole, B uno cualquiera de sus subconjuntos, y C un subconjunto de B que es no contradictorio en A. Si B tampoco es contradictorio en A, la demostración de G se logra haciendo $C' = B$. Resta por lo tanto considerar el caso en que B es contradictorio en A.

Consideremos el subreticulado D engendrado por B en A, es decir, el conjunto D de todos los elementos de A que cumplen las siguientes condiciones:

1) Los elementos de B están en D;

2) si a y b son elementos de D, $a \frown b$ es elemento de D (6);

(4) Ver [3].

(5) Un subconjunto de un reticulado distributivo con primer elemento "cero" 0 es contradictorio si contiene un subconjunto finito cuyo ínfimo es 0.

(6) Los signos «$\frown$» y «$\smile$» denotan las operaciones de ínfimo y supremo, respectivamente.

3) si a y b son elementos de D, $a \smile b$ es elemento de D;

4) ningún otro objeto es elemento de D, salvo en virtud de 1), 2) y 3).

Es obvio que para todo elemento de D existe al menos un subconjunto finito de B tal que, aplicando un número finito de veces las operaciones $\frown$ y $\smile$ a partir de elementos de tal subconjunto, resulta el elemento dado. Naturalmente, un mismo elemento puede obtenerse así a partir de diversos subconjuntos tales y, aún para cada uno de los subconjuntos puede haber diversas maneras de construir el elemento. Pero, por ser A un reticulado distributivo (ya que es un álgebra de Boole), en cada uno de esos casos el elemento podrá expresarse bajo la forma polinómica o «canónica»:

$$\overset{h}{\underset{m=1}{\smile}} \ \overset{j(m)}{\underset{n=1}{\frown}} \ a_{m,n}$$

donde h y $j(m)$ son números naturales no nulos, y los $a_{m,n}$ son elementos de B. Como B es contradictorio, el elemento O del álgebra de Boole A es también elemento de D, pues puede obtenerse como ínfimo de un número finito de elementos de B. Cuando consideremos una cualquiera de las expresiones canónicas que corresponden a un elemento nulo de D, supondremos suprimidos todos los monomios iguales a O.

De la definición de D resulta que este conjunto es un reticulado distributivo (respecto de las operaciones $\frown$ y $\smile$ de A) con primer elemento O.

Sea ahora C el subconjunto de B antes aludido. Por ser $C \subset B$ y $B \subset D$ (por la condición 1) de la definición de D) será $C \subset D$. Notemos que C es no contradictorio en el reticulado D (pues de lo contrario O podría expresarse en D —y por consiguiente en A— como ínfimo de elementos de C, lo que se opone a la no contradicción de C en A). Sea F el filtro engendrado por C en D, o sea, el conjunto de todos los elementos de D que sigan a ínfimos de un número finito no nulo de elementos de C; F existe y es propio en D, en virtud de la no contradicción de C en D. Pero, como hemos adoptado E_1 como hipótesis, resulta F estar a su vez contenido en un filtro maximal U de D. Notemos que $C \subset U$, por ser $C \subset F$. Definamos ahora $C' = U \frown B$. Vamos a mostrar que C' es aquél conjunto cuya existencia se afirma en el enunciado G.

Comencemos por notar que $C' \subset B$ en virtud de su definición. Además, como $C \subset U$ y $C \subset B$ será también $C \subset U \frown B$, o sea $C \subset C'$. Más aún, C' resulta ser no contradictorio en A, por no serlo en D ya que es subconjunto del filtro maximal U.

Queda por ver que C' no puede ampliarse en B sin dejar de ser no contradictorio en A. Para ello, consideremos un elemento cualquiera k de B que no esté en C'; tal elemento debe existir pues B contiene a C', pero B es contradictorio A mientras que C' no. Pero si k no $\in C'$, debe ser k no $\in U$, pues de lo contrario, al ser $k \in B$, sería $k \in U \frown B = C'$. Pero k es un elemento de D —pues $B \subset D$—. Luego k es un elemento del reticulado D que no pertenece al ultrafiltro U. Ello significa, debido a una conocida propiedad de los filtros maximales, que debe existir algún elemento p de U tal que $p \frown k = 0$. Consideremos uno cualquiera de tales p, y consideremos una cualquiera de sus formas canónicas. Se tendrá:

$$\left(\bigsmile_{m=1}^{h} \bigfrown_{n=1}^{j(m)} a_{m,n} \right) \frown k = 0$$

Pero como D es un reticulado distributivo, será

$$\bigsmile_{m=1}^{h} \bigfrown_{n=1}^{j(m)} (a_{m,n} \frown k) = 0.$$

Pero, para que un supremo sea igual a 0, deben ser iguales a 0 todos sus términos, de donde resulta que para todos los m desde 1 hasta h se tiene:

$$\bigfrown_{n=1}^{j(m)} (a_{m,n} \frown k) = 0.$$

Pero, por otro conocido teorema (7), en un reticulado distributivo todo filtro maximal es primo. Luego U es primo en D, o sea, si a y b son D y $a \smile b \in U$, $a \in U$ o $b \in U$. Como los $a_{m,n} \in D$ (pues $a_{m,n} \in B$), resulta $\bigfrown_{n=1}^{j(m)} a_{m,n}$ ser un D. Por con-

(7) Ver [5], pág. 111.

siguiente, alguno de los términos del supremo que nos da la expresión canónica de p debe ser elemento de U. Supongamos que sea $\overset{j(i)}{\underset{n-1}{\frown}} a_{i,n}$, donde $1 \leqq i \leqq h$. Será entonces $\overset{j(i)}{\underset{n-i}{\frown}} a_{i,n} \frown k = 0$. Pero observemos que cada uno de los $a_{i,n}$, por ser elementos de D que siguen a $\overset{j(i)}{\underset{n-1}{\frown}} a_{i,n}$, que es un elemento del filtro U, deben ser también elementos de U. Pero, como son además elementos de B —por definición de «forma canónica»—, resulta ser elementos de C'. Luego C', ampliado con k, se hace contradictorio en D y, por consiguiente, en A, pues contiene un número finito de elementos cuyo ínfimo con k es O. En consecuencia, C' no puede ampliarse en B sin dejar de ser no contradictorio en A, como queríamos demostrar.

SEMINARIO DE LÓGICA MATEMÁTICA.

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES DE BUENOS AIRES.

BIBLIOGRAFIA

[1] K. GÖDEL: *Die Vollständigkeit der Axiome der logischen Funktionenkalküle.* Monatschefte für Mathematik und Physik 37 (1930), p. 349-360.

[2] L. HENKIN: *Boolean representation through propositional calculus.* Fundamenta Mathematicae XLI, Fasc. 1 (1954), p. 89-96.

[3] G. KLIMOVSKY: *Tres enunciados equivalentes al teorema de Zorn.* Contribuciones científicas de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Bs. As., serie matemática, vol. II, Nº 1 (1956).

[4] A. MALCEV: *Untersuchungen aus dem Gebitq der mathematischen Logik.* Recueil Mathematique, n.s. 1 (1936), p. 323-336.

[5] A. MONTEIRO: *Filtros e Ideais.* Librería Boffoni. Tomos 1 y 2. Río de Janeiro 1948.