ALGUNS RESULTADOS RECENTES SOBRE EQUAÇOES DIFERENCIAIS PARCIAIS LINEARES DE COEFICIENTES CONSTANTES

por LEOPOLDO NACHBIN

A teoria das equações diferenciais parciais realizou vários progressos importantes nos últimos quinze anos, em virtude do influxo de novos métodos e idéias. Uma bôa parte do avanço verificado tem girado em tôrno dos trabalhos de Garding, Leray, Schwartz e sua escola. Na presente exposição, abordaremos apenas alguns aspectos que se caracterizam pelo emprego sistemático da Análise Funcional e, mais particularmente, dos espaços vetoriais topológicos, das distribuições e da análise harmônica. Limitar-nos-emos às equações diferenciais parciais lineares de coeficientes constantes no R^n, muito embora os resultados sôbre os quais iremos discorrer sejam em parte conhecidos ou se possa naturalmente conjecturar a sua extensão a equações diferenciais parciais mais gerais, lineares de coeficientes variáveis ou não lineares, no R^n ou em variedades diferenciáveis, ou às equações de convolução, ou às equações diferenciais parciais em uma infinidade de variáveis, ou aos sistemas de equações, ou à análise harmônica.

Indicaremos com E a álgebra topológica das funções complexas infinitamente diferenciáveis no R^n. Representaremos com D a álgebra topológica das funções complexas infinitamente diferenciáveis no R^n de suportes compactos. Notemos que D é uma subálgebra de E mas não uma subálgebra topológica. Indicaremos com D′ o espaço vetorial topológico das distribuições em R^n, ou seja o dual topológico de D. Consideremos, também, o dual topológico E′ de E, que será identificado naturalmente como espaço vetorial ao espaço vetorial das distribuições de suportes compactos em R^n. Finalmente, seja S a álgebra topológica das funções complexas infinitamente diferenciáveis e rapidamente decrescentes no infinito em R^n. Designaremos com S′ o dual topológico de S, que será identificado naturalmente como espaço vetorial a um certo espaço vetorial de distribuições em R^n, que são ditas distribuições temperadas.

Consideremos um operador diferencial parcial $O = \Sigma a_p D^p$, onde $p = (p_1, \ldots, p_n)$ é uma sequência de inteiros positivos, $D^p = \partial^{p_1 + \cdots + p_n} / \partial x_1^{p_1} \ldots \partial x_n^{p_n}$ e o somatório é finito. O opera sôbre os espaços de funções ou de distribuições. Suporemos $O \neq 0$.

O aplica E sôbre E como uma aplicação contínua e aberta. Em virtude da teoria das equações lineares nos espaços vetoriais topológicos e da teoria da dualidade, essa asserção equivale a dizer-se que O aplica E′ homeomorficamente sôbre o subespaço vetorial fechado O(E′) de E′. Esses resultados foram estabelecidos por Malgrande (1954) e, independentemente, por Ehrenpreis (1954).

O aplica D′ sôbre D′ como uma aplicação contínua e aberta. Em virtude da teoria das equações lineares nos espaços vetoriais topológicos e da teoria da dualidade, tal asserção é equivalente a afirmar-se que O aplica D homeomorficamente sôbre o subespaço vetorial fechado O(D) de D. Esses resultados, conjecturados por Schwartz e Malgrange, foram demonstrados por Ehrenpreis (1955).

Chama-se solução elementar de O a toda distribuição E no R^n tal que $O(E) = \delta$, sendo δ a medida de Dirac. O tem ao menos una solução elementar. Tal fato resulta imediatamente do teorema de Ehrenpreis segundo o qual O aplica D′ sôbre D′, mas uma demonstração direta muito simples já havia sido dada anteriormente por Malgrange (1953); cfr. Ehrenpreis (1954). Vários resultados parciais, devidos principalmente a Malgrange, relativos ao comportamento local ou global de uma solução elementar são conhecidos.

Recentemente, Hormander (1958) demonstrou uma conjetura natural de Schwartz, segundo a qual O admite sempre ao menos uma solução elementar temperada. De um modo mais geral, O aplica S′ sôbre S′ como uma aplicação contínua e aberta. Pela teoria das esquações lineares nos espaços vetoriais topológicos e a teoria da dualidade, essa asserção equivale a dizer-se que O aplica S homeomorficamente sôbre o subespaço vetorial fechado O(S) de S.

Tais resultados de Ehrenpreis, Hormander e Malgrange são, através da transformação de Fourier, caso particular do chamado problema da divisão de distribuições, correspondendo à divisão de uma distribuição por um polinômio. Mais recentemente, Lojasiewicz (1958), generalizando resultados prévios de Schwartz e estabelecendo uma conjetura do próprio Schwartz, demonstrou que a divisão de uma distribuição por uma função analítica real é sempre possivel, isto é a equação $T = \varphi S$ admite sempre uma solução S, quaisquer que sejam a distribuição T e a função analitica real φ não identicamente nula.

A teoria clásica das equações elíticas teve um dos seus aspectos fuundamentais extendido de uma maneira importante por Hormander (1955). Classicamente, se o operador fôr de sequunda ordem, isto é $O = \Sigma\, a_{ij}\, \partial^2 / \partial x_i \partial x_j$ mais têrmos de grau 1 e 0, e se os coeficientes forem reais, então O é dito elítico quando a fórma quadrática $\Sigma\, a_{ij}\, t_i\, t_j$ fôr definida (por exemplo positiva), ou seja $\Sigma\, a_{ij}\, t_i\, t_j \geqq 0$ qualquer que seja $\{t_i\}$ e $\Sigma\, a_{ij}\, t_i\, t_j = 0$ implicar $\{t_i\} = 0$. De um modo mais geral, retomando o caso de O de ordem qualquer m e de coeficientes complexos, a definição apropiada de eliticidade consiste em requerer que

$$\sum_{|p| = m} a_p\, t^p \neq 0 \quad \text{se} \quad t \neq 0,$$

onde $|p| = p_1 + \ldots + p_n$ se $p = (p_1, \ldots, p_n)$ e $t^p = t_1^{p_1} \ldots t_n^{p_n}$ se $t = (t_1, \ldots, t_n)$. Os operadores elíticos têm uma propriedade fundamental, que não é característica apenas dêsses operadores mas sim de uma classe mais ampla, que passaremos a definir.

O é dito hipo-elítico se, toda vez que $O(S) = T$, onde S e T são distribuições no R^n e T fôr uma função infinitamente diferenciável num aberto de R^n, então S será também uma função infinitamente diferenciável nêsse mesmo aberto. Um teorema básico, que remonta a Serge Bernstein, sendo um ingrediente fundamental do chamado método da projeção ortogonal de Weyl, afirma-nos que todo operador elítico é hipo-elítico.

Se E fôr uma solução elementar de O e êsse operador fôr hipo-elítico, como $\delta = 0$ no complementar da origem, então

E será infinitamente diferenciável no complementar da origem. Reciprocamente, se O admitir uma solução elementar que seja infinitamente diferenciável no complementar da origem, então O será hipo-elítico. E' dessa fórma que constatamos que alguns operadores clássicos são hipo-elíticos, através de uma solução elementar conhecida.

A caracterização direta dos operadores hipo-elíticos foi conseguida por Hormander. Seja p o polinômio em n variáveis tal que

$$O = p\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right),$$

onde o denominador i é incluido por conveniência. Então
$\Lambda(p) = \{s \in R^n;\ p(x+s) = p(x)$ qualquer que seja $x \in R^n\}$ é um subespaço vetorial de R^n. O polinômio p é dito completo quando $\Lambda(p) = 0$, o que significa que, em têrmos de qualquer base em R^n, o polinômio sempre depende de todas as variáveis. Para que O seja hipo-elítico é necessário e suficiente que p seja completo e que sejam satisfeitas as duas condições equivalentes seguintes:

(1) se $\xi, \eta \in R^n$, então $p(\xi + i\eta) \to \infty$ quando $\xi \to \infty$ e η permanece fixo.

(2) dado $A \geqq 0$, existe $k \geqq 0$ tal que $p(\xi + i\eta) \neq 0$ desde que $\xi, \eta \in R^n$, $|\eta| \leqq A$ e $|\xi| \geqq k$.

Outras fórmas equivalentes dessas condições foram, também, indicadas por Hormander.

INSTITUTO DE MATEMATICA PURA E APLICADA
CENTRO BRASILEIRO DE PESQUISAS FISICAS
RIO DE JANEIRO

REFERENCIAS

BROWDER, F., *Regularity theorems for solutions of partial differential equations*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 43, pp. 234-236 (1956).

EHRENPREIS, L., *Solution of some problems of division*, I, Amer. Journ. Math., vol. 76, pp. 883-903 (1954).

— — *Solution of some problems of division*, II, Amer. Journ. Math., vol. 77, pp. 286-292 (1955).

— — *The division problem for distributions*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 41, pp. 756-758 (1955).

— — *Completely inversible operators*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 41, pp. 945-946 (1955).

— — *Solution of some problems of division*, III, Amer. ourn. Math., vol. 78, pp. 685-715 (1956).

— — *General theory of elliptic equations*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, vol. 42, pp. 39-41 (1956).

GARDING, L. & MALGRANDE, B., *Opérateurs différentiels partiellement hypoelliptiques*, Comptes Rendus Acad. Sci. París, vol. 247, pp. 2083-2085 (1958).

GARDING, L., *Some trends and problems in liner partial differential equations*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Edinburgh, 1958, pp. 87-102, Cambridge (1960).

HORMANDER, L., *On the theory of general partial differential operators*, Acta Math., vol. 94, pp. 161-248 (1955).

— — *On the division of distributions by polynomials*, Arvik for Mathematik, vol. 3, pp. 555-568 (1958).

— — *Differentiability properties of solutions of systems of differential equations*, Arkiv for Mathematik, vol. 3, pp. 527-535 (1958).

— — *On interior regularity of the solutions of partial differential equations*, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. 11, pp. 197-218 (1958).

— — *On the regularity of the solutions of boundary problems*, Acta Math., vol. 99, pp. 225-264 (1958).

JOHN, F., *General properties of solutions of liner elliptic partial differential equations*, Proc. Symp. Spectral Theory and Differential Problems, Oklahoma, pp. 113-175 (1951).

— — *Plane waves and spherical means applied to partial differential equations*, New York, (1955).

LAX, P. D., *On Cauchy's problem for hyperbolic equations and the differentiability of solutions of elliptic equations*, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. 8, ps. 615-633 (1955).

LOJASIEWICZ, S., *Division d'une distribution par une fonction analytique de variables réelles*, Comptes Rendus Acad. Sci. París, vol. 246, pp. 683-686 (1958).

— — *Sur le problème de la division*, Studia Mathematica, vol. 18, pp. 87-136 (1959).

MALGRANGE, B., *Equations aux dérivées partielles à coefficients constans. 1. Solutions élémentaires.* Comptes Rendus Acad. Sci. París, vol. 237, pp. 1620-1622 (1953).

— — *Equations aux dérivées partielles à coefficients constants. Equations avec second membre.* Comptes Rendus Acad. Sci. París, vol. 238, pp. 196-198 (1954).