CAMPOS DE HOMOGENEIDAD

(Resumen)

por A. E. Sagastume Berra

Llamamos *campo de homogeneidad* a un conjunto $H = \{0, 1, a, b, \ldots\}$ que verifica ciertos postulados, que pueden resumirse en lo siguiente: para los elementos $\neq 0$ de H está definida una relación ecuable (es decir, simétrica, reflexiva y transitiva), la de *homogeneidad*, $a H b$ (negación, a no $H b$), en virtud de la cual el conjunto de dichos elementos queda repartido en *clases de homogeneidad* H_α, ninguna vacía y sin elementos comunes. El índice α que sirve para distinguir estas clases se llama el *grado* de H_α o de cualquiera de sus elementos, y estos índices constituyen un conjunto $\Gamma = \{\alpha, \beta, \ldots\}$ que a priori puede ser cualquiera. Se establece además que $0 H a$ y $a H 0$ cualquiera sea a. Que el conjunto $H_\alpha^* = H_\alpha \cup \{0\}$ es, para cualquier α, un grupo abeliano respecto a una operación de suma$_\alpha$ (que para simplificar se indica como *suma*), siendo 0 (elemento común a todos los H_α^*) el elemento unidad de este grupo. Además, se postula que entre los elementos del campo H está defindia una *multiplicación* $a \cdot b$ o ab, conmutatiiva, asociativa, distributiva respecto a todas las sumas $+_\alpha$, con un elemento unidad 1 tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ para todo a, y a la que se imponen además condiciones que significan en último análisis que el conjunto Γ de los grados puede convertirse en un *semigrupo abeliano ordenado positivo*, si $\alpha + \beta$ es el grado de un producto $a_\alpha b_\beta$, siendo a_α de grado α, b_β de grado β. El grado cero 0 (unidad del semigrupo Γ) es el grado de la unidad 1 y de todo elemento homogéneo con 1.

Bajo estas condiciones, se ve que H_0^* es el único de los H_α^* que sea un anillo, siendo un campo de integridad.

Como casos especiales de los campos de homogeneidad tenemos los dos extremos siguientes: 1º, cuando hay sólo una clase de homogeneidad, es decir, todos los elementos son homogéneos. Entonces $\mathrm{H} = H_0{}^*$ se reduce a un campo de integridad con unidad; y 2º, cuando cada elemento solamente es homogéneo consigo mismo (y con el cero). Entonces H es (isomorfo a) un semigrupo abeliano ordenado positivo con el agregado de un elemento cero para la multiplicación.

Se puede considerar a nuestro campo de homogeneidad H sumergido en un campo de integridad, el de los *polinomios* (que fácilmente pueden definirse por procedimientos conocidos) sobre H. Este campo P de los polinomios sobre H corresponde a lo que se ha llamado un *anillo graduado* o *álgebra graduada* [1], si bien con algunas diferencias. Dentro de P, el conjunto P_α de los polinomios que se reducen a un solo término de grado α es un grupo aditivo, isomorfo a $H_\alpha{}^*$ y estos grupos están ligados por la relación $\mathrm{P}_\alpha \mathrm{P}_\beta \subseteq \mathrm{P}_{\alpha+\beta}$. En particular, P_0 es un campo de integridad isomorfo a $H_0{}^*$.

A cada subcampo H′ de H le corresponde un subsemigrupo Γ' de Γ, formado por aquellos grados α' tales que $H_{\alpha'} \cap \mathrm{H}'$ no es vacío, y entonces los subgrupos aditivos $H'_{\alpha'}{}^* = H_{\alpha'}{}^* \cap \mathrm{H}'$ cumplen la condición

$$H'_{\alpha'}{}^* \, H'_{\beta'}{}^* \subseteq H'_{\alpha'+\beta'}{}^* \qquad (1)$$

y además, $1 \in H_0'^*$. Recíprocamente, dados un subsemigrupo Γ' y para cada $\alpha' \in \Gamma'$ un subgrupo $\mathrm{H}'_{\alpha'}{}^*$ de $H_{\alpha'}{}^*$, de modo que $1 \in H_0'^*$ y que los $H'_{\alpha'}{}^*$ cumplan la condición (1), la reunión de los $H'_{\alpha'}{}^*$ es un subcampo H′ de H.

Un *ideal en* H, o simplemente *ideal*, es un subconjunto I de H tal que, si $a, b \in \mathrm{I}$ y $c \in \mathrm{H}$, se tiene:

1) Si $a H b$, entonces $a - b \in \mathrm{I}$;
2) $ac \in \mathrm{I}$.

La *congruencia* de dos elementos a, b de H según el módulo I, $a \equiv b$ (mód. I), puede definirse así: se verificará tal

3

[1] Véase por ejemplo: C. CHEVALLEY: *Théorie des groupes de* LIE, Tome II: *Groupes algébriques* (Publications de l'Institut Mathématique de l'Université de Nancago). Actualités Sc. et Ind. Nº 1152, Paris. HERMANN & Cie., 1951, Cap. I, § 2.

relación cuando, y solamente cuando, sea $a H b$ y además $a - b \in$ I. Cuando ambos elementos son $\neq 0$, esta noción se reduce a la común en teoría de los grupos, de congruencia respecto al subgrupo $I_\alpha^* = \mathrm{I} \cap H_\alpha^*$ al que pertenecen ambos.

Esta relación, reflexiva y simétrica, no es transitiva. Para restablecer la transitividad recurrimos a la relación de *congruencia-estrella* (mód. I), definida así: $a \equiv^* b$ (mód. I) cuando: o bien a y b son distintos de cero y $a \equiv b$ (mód. I) en el sentido definido antes, o bien, si uno de los elementos es cero, el otro también lo es. Estas congruencias-estrella tienen la ventaja de poder sumarse y multiplicarse miembro a miembro (siempre que, en la operación de suma, los elementos que se suman sean homogéneos) y permiten por tanto definir el *campo de restos módulo* I $\overline{\mathrm{H}} = \mathrm{H} - \mathrm{I} = \{\bar{0}, \bar{a}, \bar{b}, \ldots\}$ con la relación de homogeneidad $\bar{a}\, \bar{H}\, \bar{b}$ si y solamente si $a\, H\, b$ y las operaciones $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a+b}$, $\bar{a} \,.\, \bar{b} = \overline{ab}$. En otros términos, el campo $\overline{\mathrm{H}}$ es *homomorfo* a H, en el sentido de la definición que sigue.

Un campo H′ se llama *homomorfo* al campo H si existe una correspondencia unívoca entre los elementos de H y los de H′, de modo de conservar la relación de homogeneidad y las operaciones de suma y multiplicación:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } a \longrightarrow a', \ b \longrightarrow b', \text{ entonces:} \\ a H b \text{ implica } a' H' b' \text{ y viceversa,} \\ a H b \text{ implica } a + b \longrightarrow a' + b' \\ \qquad\qquad ab \longrightarrow a' b' \end{array}\right\} . \qquad (2)$$

Como de ordinario, el isomorfismo es el caso particular en que el homomorfismo sea biunívoco, de modo que en la correspondencia inversa también se conservan la homogeneidad y las operaciones. El homomorfismo se indica con $\mathrm{H} \longrightarrow \mathrm{H}'$, el isomorfismo con $\mathrm{H} \cong \mathrm{H}'$.

En un homomorfismo, en general, el semigrupo Γ' de los grados de H′ es ordenadamente isomorfo a Γ.

Con estas nociones, se puede completar el resultado anterior, demostrando que las imágenes homomorfas de H son (salvo isomorfismos), solamente los campos de restos antes definidos. Es decir, que se verifica el

Teorema fundamental del homomorfismo: *Todo campo de restos* $\overline{\mathrm{H}} = \mathrm{H} - \mathrm{N}$ *módulo un ideal* N *es homomorfo a* H. *Recíprocamente, si* H′ *es una imagen homomorfa de* H, *entonces* $\mathrm{H}' \cong \overline{\mathrm{H}} = \mathrm{H} - \mathrm{N}$, *siendo* N *el ideal de los elementos que en el homomorfismo tienen por imagen el* 0′ *de* H′.

Actualmente se están estudiando más en detalle los ideales, que pueden ponerse en correspondencia biunívoca con los *ideales homogéneos* o *H*-ideales, que son ideales (en el sentido ordinario) en P, con la propiedad de que si un polinomio P pertenece a un tal ideal, también pertenecen a él todas las componentes homogéneas de P.

Los resultados de que aquí se da cuenta, así como las investigaciones que siguen, serán publicadas in extenso en la «Revista» de la Facultad de Ciencias Físicomatemáticas de La Plata.

FACULTAD DE CIENCIAS FISICOMATEMÁTICAS
La Plata, Agosto 1959.