

# UN MODELO OPTICO SEMICLASICO PARA LA DISPERSION DE NEUTRONES DE ALTA ENERGIA POR NUCLEOS (\*)

por CARLOS ALBERTO HERAS (\*\*)

(Comisión Nacional de Energía Atómica, Buenos Aires)

ABSTRACT. - An exact expression for the elastic scattering cross-section is derived under the assumptions of the "black" nucleus model and the validity of the Fraunhofer diffraction formulae which approximate that expression is discussed. A semiclassical correction is introduced to take into account the partial transparency of the nucleus and it is seen that allows a better agreement with experimental data on the scattering of 84-MeV neutrons by *Al*, *Cu* and *Pb*. It also allows the determination of the optical parameters of the nucleus which coincide with those determined with the (quantum) nuclear optical model.

## INTRODUCCION

El éxito reciente del modelo óptico nuclear (1) muestra que se pueden usar conceptos ópticos clásicos para describir la dispersión de partículas por núcleos. La idea fundamental de los modelos ópticos es considerar que el proyectil, una vez en el núcleo, atraviesa un medio con índice de refracción complejo (medio absorbente y refrigente). La aplicación de esta idea a la solución cuántica del problema de dispersión requiere la integración numérica de las ecuaciones con computadoras electrónicas. Además para poder reproducir los datos experimentales dentro de un rango relativamente grande de energía de bombardeo y de masa del blanco, es necesario introducir parámetros cuyo

---

(\*) Recibido el 25 de mayo de 1961.

(\*\*) Este trabajo fue realizado en parte durante la estadía del autor en el Centro Brasileiro de Pesquisas Físicas (Río de Janeiro) con una beca del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas.

número trae aparejado un cierto oscurecimiento de la visión física del problema. Por esta razón se han usado descripciones clásicas y semiclásicas (2) que permiten obtener resultados cualitativos (y a veces cuantitativos) con un mínimo de trabajo computacional y pueden servir para decidir cómo variar los parámetros del modelo óptico nuclear para mejorar el acuerdo con la experiencia.

En la presente nota discutiremos los límites de validez de las fórmulas de difracción tipo Fraunhofer y derivaremos una corrección al modelo de difracción por un núcleo «negro» para tener en cuenta semiclásicamente la transparencia parcial del núcleo.

### 1. LA DISPERSION POR DIFRACCION

Para fijar ideas supondremos dispersión de neutrones con energía  $E = (\hbar^2/2m)k^2$  y no tendremos en cuenta el espín. Los resultados que se obtengan serán válidos para protones en los casos en que la barrera de Coulomb del núcleo tiene efectos despreciables. La amplitud de probabilidad para dispersión está dada exactamente por

$$f(\Theta) = \frac{i}{2k} \sum_{l=0}^{\infty} (1 - \eta_l) (2l+1) P_l(\cos \Theta) \quad (1.1)$$

donde  $\eta_l$ , la amplitud relativa de la  $l$ -sima onda parcial saliente, está relacionada con el respectivo corrimiento de fase  $\delta_l$  por

$$\eta_l = \exp(2i\delta_l) \quad (1.2)$$

Es sabido que en la suma de la ec. (1.1) sólo tienen contribución importante los términos con  $l \leq ka$ , donde  $a$  es el radio del núcleo; por otra parte los corrimientos de fase son en general complejos con una parte imaginaria positiva que es muy grande para energías de bombardeo altas (mayores de 60 Me V, digamos). Para estas energías podemos, desde un punto de vista clásico, considerar que todas las ondas parciales con  $l \leq L \sim ka$  son absorbidas completamente y aquellas con  $l > L$  pasan sin ser

afectadas. Esta es la hipótesis fundamental del modelo del núcleo «negro», es decir, perfectamente absorbente; se expresa matemáticamente por

$$\eta_l = \begin{cases} 0 & \text{para } l \leq L \\ 1 & \text{para } l > L \end{cases} \quad (1.3)$$

Con esta expresión la suma en la ec. (1.1) se hace finita y puede realizarse mediante la fórmula de Christoffel-Darboux los polinomios de Legendre (3); el resultado es

$$f_d(\Theta) = \frac{i}{2k} \frac{L+1}{1 - \cos \Theta} [P_L(\cos \Theta) - P_{L+1}(\cos \Theta)] \quad (1.4)$$

Greider y Glassgold (4) han dado una expresión exacta equivalente a ésta. Sin embargo, a pesar de su simplicidad, no ha sido usada en la representación de datos experimentales. En cambio, se usan fórmulas aproximadas cuya validez no se establece en forma precisa. Como ejemplo del tipo de aproximaciones que se hacen, derivaremos a continuación la fórmula de dispersión por difracción de Fraunhofer dada por Placzek y Bethe (5).

Para altas energías de bombardeo ( $L \gg 1$ ) puede usarse para los polinomios de Legendre la forma asintótica debida a Hilb (3)

$$P_L(\cos \Theta) = (\Theta/\sin \Theta)^{1/2} J_0[(L + \frac{1}{2})\Theta] + O(L^{-3/2}) \quad (1.5)$$

donde  $J_0$  es la función de Bessel de orden cero. Esta expresión es válida uniformemente para  $0 \leq \Theta \leq \pi - \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ). Poniendo

$z = (L + \frac{1}{2})\Theta$  podemos entonces escribir

$$\begin{aligned} P_L - P_{L+1} &= -(\Theta/\sin \Theta)^{1/2} [J_0(z + \Theta) - J_0(z)] = \\ &= (\Theta/\sin \Theta)^{1/2} \Theta [J_1(z) + \frac{\Theta}{2} J_1'(z) + \frac{\Theta^2}{3!} J_1''(z) + \dots] \end{aligned} \quad (1.6)$$

En esta serie hay que considerar hasta el término que dé un error del mismo orden (o mayor) que el que tiene la expresión (1.5). Puede verse, expresando las derivadas de  $J_1$  en función de  $J_1$  y  $J_0$ , que los términos a partir del último mostrado no tienen sentido. Por otra parte si  $\Theta$  no es suficientemente pequeño la serie puede convergir lentamente restando toda utilidad a la aproximación. No vale la pena discutir el punto de la convergencia puesto que se trata de una aproximación a un resultado de un modelo que es a su vez aproximado.

Para energías muy altas se pueden despreciar términos de orden  $1/L$ ; además con el aumento de la energía, los neutrones dispersados elásticamente se concentran cada vez más en ángulos pequeños alrededor de la dirección de incidencia (el cono de sombra de la óptica ondulatoria tiende al cilindro de sombra de la óptica geométrica). Teniendo en cuenta esto y poniendo  $L = ka$ , se obtiene la fórmula de Placzek-Bethe para la sección eficaz

$$\sigma(\Theta) = k^2 a^4 J_1(z)/z \quad (1.7)$$

$$z = ka\Theta \quad (1.8)$$

que es idéntica a la difracción de Fraunhofer por un disco opaco. Se ve que  $z$  es la transferencia de impulso  $2k \sin \Theta/2$  (en unidades de  $\hbar$ ) multiplicada por el radio del núcleo y tomada para ángulos pequeños.

Por las aproximaciones hechas en su deducción, se ve que la expresión (1.7) es válida sólo para energías muy altas y para ángulos menores que el correspondiente al primer cero de la función de Bessel.

Se usa frecuentemente en la literatura una expresión similar a la (1.7) que puede ser deducida del desarrollo de Macdonal de los polinomios de Legendre en funciones de Bessel (6). En esta expresión se toma el valor exacto  $2k \sin \Theta/2$  de la transferencia de impulso y se reemplaza el radio del núcleo por  $a + \lambda$  ( $\lambda = 1/k$ ). Estas correcciones son un lujo innecesario pues el rango angular de validez de la expresión es el mismo que que antes y en ese rango coincide con (1.7). Sin embargo, como en el factor que multiplica a la función de Bessel el radio

aparece elevado a la cuarta potencia es conveniente corregirlo; de esta manera la expresión aproximada y la exacta tienen el mismo valor en  $\Theta = 0$ .

Para finalizar esta sección daremos una estimación del error con que se determina el radio nuclear a partir de la posición angular del primer mínimo de difracción.

Supongamos que el primer mínimo de difracción es observado en el ángulo  $\Theta_0$ ; éste debe corresponder al primer cero  $z_0 = 3,83$  de la función de Bessel en la fórmula de difracción de Fraunhofer. Podemos usar en el argumento de la función de Bessel  $z_1 = L_1 \Theta$  o  $z_2 = 2(L_2 + 1) \text{sen } \Theta/2$  determinar  $L_i$  ( $i = 1, 2$ ) por la condición  $z_i = z_0$  y tomar

$$\frac{\Delta a}{a} \approx \frac{L_2 - L_1}{L_1} = \frac{\Theta_0}{3,83} + \frac{1}{3,83} \left( 1 - \frac{\Theta_0/2}{\text{sen } \Theta_0/2} \right)$$

como medida de la imprecisión en la determinación del radio nuclear. Como el paréntesis del segundo miembro puede considerarse nulo (es menor que 0,05 para  $\Theta < 60^\circ$ ), se tiene

$$\frac{\Delta a}{a} \sim \frac{\Theta_0}{3,83}$$

que en los casos de interés da un error porcentual  $< 10\%$ .

## 2. CORRECCION SEMICLASICA POR REFLEXION Y REFRACCION

La expresión exacta (1.4) del modelo de difracción por un núcleo negro tampoco es válida para ángulos relativamente grandes pues siendo una función de Dirichlet(\*) tiene para esos ángulos oscilaciones fuertes que los datos experimentales no muestran. Por otra parte, aún a pequeños ángulos hay otros procesos que contribuyen a la dispersión además de la difracción pues el núcleo no es negro sino traslúcido. La razón del fracaso del modelo del núcleo negro a partir de las cercanías del primer

(\*) O función incompleta en el sentido que  $\lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^L (2l+1) P_l(\cos \Theta) = 4\pi \delta(\cos \Theta - 1)$

mínimo de difracción se debe a que en realidad las  $\eta_l$  (desde el punto de vista clásico) suben gradualmente de un valor pequeño para  $l=0$  a uno para  $l \sim ka$  porque cerca del borde del núcleo las partículas incidentes recorren caminos cada vez más cortos a través del medio absorbente (\*\*). Es sabido que en la óptica electromagnética esta variación gradual de la absorción de la onda incidente trae aparejada la desaparición de los máximos de difracción excepto el principal (\*).

Vamos a tomar ahora en cuenta la transparencia parcial (y variable) del núcleo para las partículas incidentes. Suponemos como antes que  $\eta_l=1$  para  $l > L \sim ka$ . La amplitud para dispersión elástica es

$$f(\Theta) = f_d(\Theta) - (i/2k) \sum_{l=0}^L \eta_l (2l+1) P_l(\cos \Theta) \quad (2.1)$$

donde  $f_d$  (dada por la ec. (1.4)) da cuenta de la difracción y el segundo término da cuenta de los procesos debidos a la absorción incompleta dentro del núcleo: reflexión y refracción. Representando la interacción neutrón-núcleo con un potencial complejo podemos aproximar el segundo término con la suma de amplitudes semiclásicas para reflexión y refracción

$$f_c(\Theta) = R \sqrt{\sigma_R} + T A \sqrt{\sigma_T} \quad (2.2)$$

donde  $\sigma_R$  es la sección eficaz clásica para reflexión por una esfera rígida;  $\sigma_T$  es la sección eficaz clásica para refracción en un pozo de potencial;  $R$  y  $T$  son coeficientes de reflexión y transmisión para el pozo, y  $A$  es un factor que mide la absorción a lo largo de la trayectoria clásica de la partícula dentro del pozo.

Las secciones eficaces clásicas se definen por (7)

$$\sigma(\Theta) = \frac{s(\Theta)}{\sin \Theta} \left| \frac{ds(\Theta)}{d\Theta} \right| \quad (2.3)$$

(\*\*) El mismo efecto tiene una superficie difusa; podemos considerar este caso incluido en nuestras consideraciones hablando de un camino efectivo dentro del medio absorbente.

(\*) Un ejemplo simple es la difracción de la luz por una gota de tinta en un vidrio de reloj.

donde  $s$  es el parámetro de choque, y  $\Theta$  el ángulo clásico de deflexión. Usando un pozo cuadrado de potencial

$$V(r) = \begin{cases} -(V + iW) & r > a \\ 0 & r \leq a \end{cases} \quad (2.4)$$

se obtiene para las secciones eficaces

$$\sigma_R = a^2/4$$

$$\sigma_T = \frac{a^2}{4} \frac{n^2}{x} \frac{(n-x)(nx-1)}{(1+n^2-2nx)^2} \quad (2.5)$$

donde

$$x = \cos \Theta/2 \quad (2.6)$$

y

$$n^2 = 1 + V/E \quad (2.7)$$

es el índice de refracción.

En el cálculo de  $\sigma_T$  no hemos considerado efectos de la parte imaginaria del potencial que son muy pequeños excepto en el entorno del ángulo correspondiente a incidencia rasante.

Los coeficientes  $R$ ,  $T$ , y  $A$  han sido calculados en la forma usual por las condiciones de contorno que satisface una onda plana incidente sobre un potencial en dos dimensiones de la forma (2.4) («zanja» de potencial). Esta aproximación es equivalente a reemplazar la superficie esférica del núcleo por su plano tangente y es válida para altas energías (mayores de  $\sim 40$  MeV) y no muy cerca de la incidencia rasante. Las fases de los coeficientes de reflexión y de trasmisión se ajustan luego para dar la diferencia de camino de los rayos en la esfera que representa al núcleo. Despreciando frente a la unidad pequeños efectos de la parte imaginaria del potencial, se tiene

$$R(\Theta) = - \frac{(n^2 - x^2)^{1/2} - \sin \Theta/2}{(n^2 - x^2)^{1/2} + \sin \Theta/2} e^{-2 i k a \operatorname{sen} \Theta/2} \quad (2.8)$$

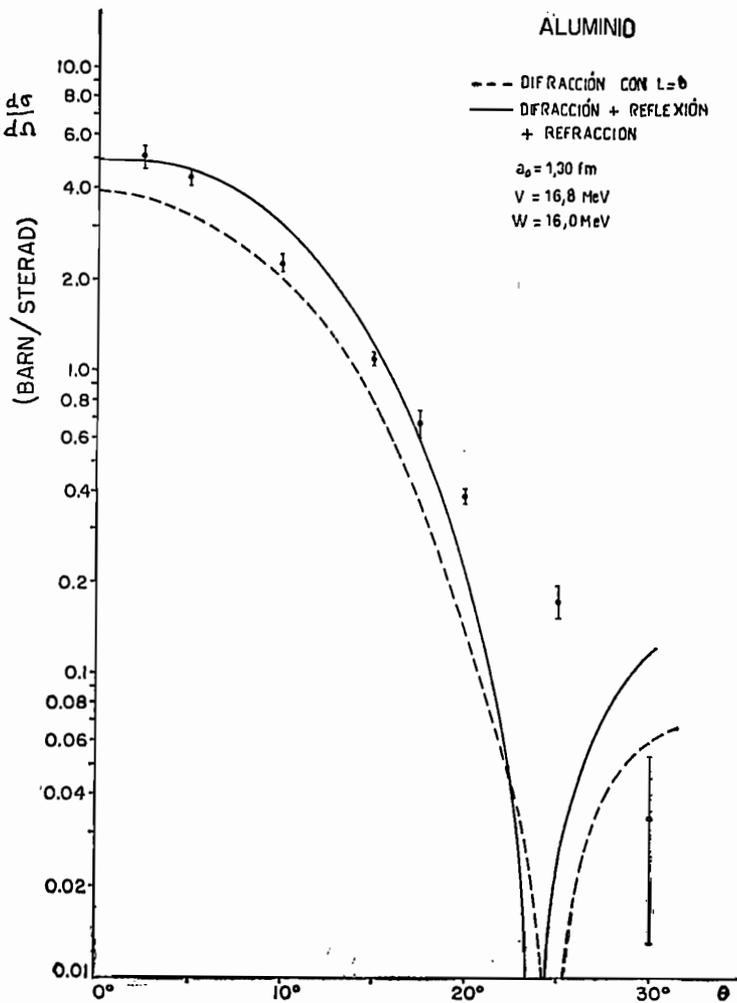
$$T(\Theta) = \frac{4n}{(n^2 - 1)^2} (nx - 1)(n - x) e^{-2ika(1+n^2-2nx)^{1/2}} \quad (2.9)$$

$$A = \exp -ka \frac{W}{nE} \frac{n-x}{(1+n^2-2nx)^{1/2}} \quad (2.10)$$

donde  $n$  y  $x$  están dados por las ecs. (2.6 y 7).

La sección eficaz para dispersión elástica es entonces

$$\sigma(\Theta) = |f_d|^2 + |f_c|^2 + \text{términos de interferencia.} \quad (2.11)$$



El cómputo ha sido hecho para ajustar los datos experimentales de Bratenahl et al. (8) sobre dispersión elástica de neutrones de 84 MeV por Al, Cu y Pb. Expresando el radio nuclear en la forma  $a = a_0 A^{1/3}$  se tiene tres parámetros para ajustar:  $a_0$ ,  $V$  y  $W$ . Para determinar el rango de variación de  $a_0$  se calculó

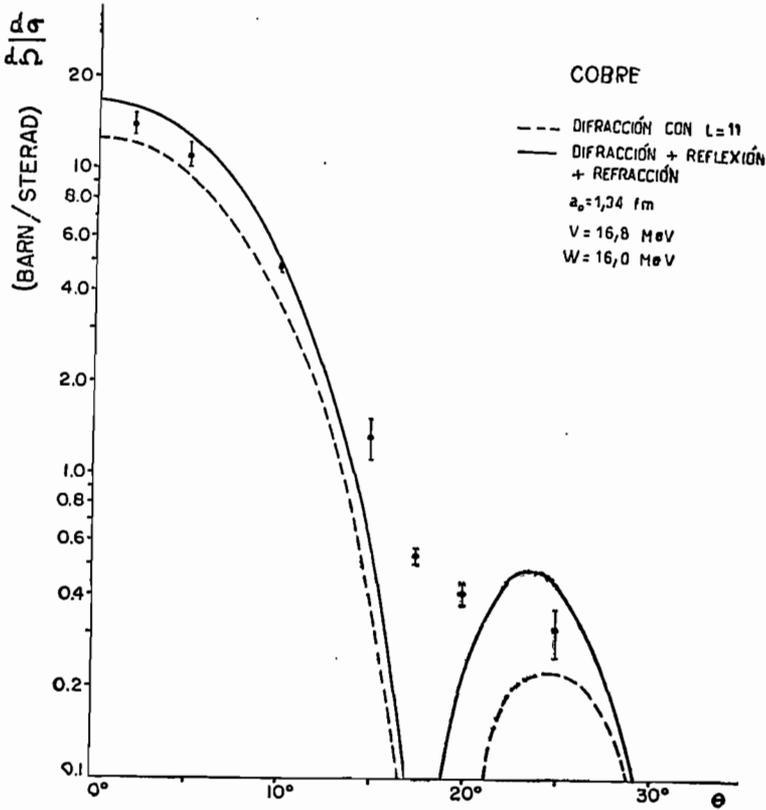


Fig. 2

primeramente la sección eficaz de difracción  $f_d$ ; poniendo  $L = ka$  los datos experimentales quedaron incluidos entre las curvas teóricas para  $a_0 = 1,30 \text{ fm}$  (\*) y  $a_0 = 1,46 \text{ fm}$  con variaciones de núcleo a núcleo menores que 3%. Para los mayores valores

(\*) De acuerdo con la recomendación de la Unión Internacional de Física pura y aplicada, Ottawa, 1960 (Nuclear Physics 23 (1961) 697)  
 $1 \text{ fm} = 1 \text{ femtómetro} = 10^{-13} \text{ cm}$ .

de  $a_0$  no fue posible encontrar un juego de valores de  $V$  y  $W$  único para los tres núcleos y además era necesario usar valores de  $W$  muy pequeños en contradicción con las propiedades empíricas conocidas de la materia nuclear. Para los menores valores de

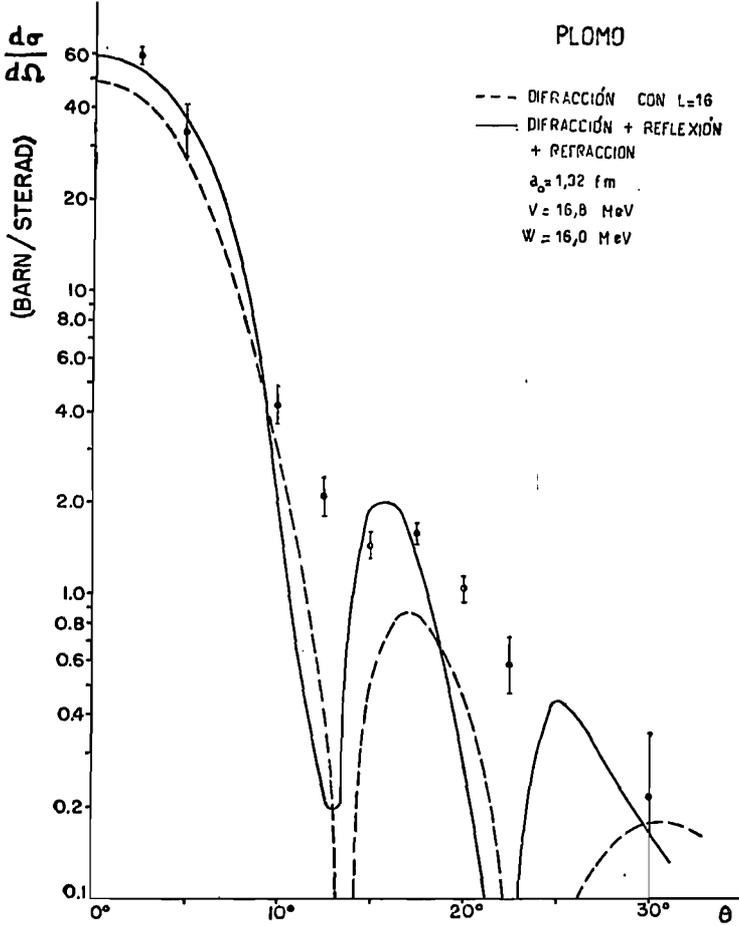


Fig. 3

$a_0$ ,  $V = 16,8$  MeV y  $W = 16$  MeV representan razonablemente los datos experimentales de los tres núcleos considerados. Estos valores son prácticamente los mismos que los determinados con el modelo óptico nuclear (\*). Los resultados se muestran en las

(\*) Ver por ejemplo el artículo de Bjorklund en la segunda cita de referencia (1).

figuras 1, 2 y 3 junto con los datos experimentales y las curvas correspondientes a difracción. Debe notarse que las curvas teóricas no han sido normalizadas.

Se ve que la corrección semiclásica no es capaz de «lavar» las oscilaciones fuertes de la difracción. Para pequeños ángulos la corrección permite no sólo un mejor ajuste de los datos experimentales sino también la determinación de los parámetros ópticos del núcleo. No se ha intentado un acuerdo mejor entre teoría y experiencia considerado que el modelo no es lo suficientemente refinado como para justificar el trabajo.

#### B I B L I O G R A F I A

- [1] H. FESHBACH, *Ann. Rev. Nuclear Sci.* 8 (1958) 49.  
— *Proc. Int. Conf. on the Nuclear Optical Model*, The Florida State Univ., Tallahassee, 1959.
- *Proc. Int. Conf. on Nuclear Structure*, Kingston, Univ. of Toronto Press, 1960.
- [2] L. F. SCHIFF, *Phys. Rev.* 103 (1956) 443.  
— R. M. EISEBERG, I. E. MCCARTHY y R. A. SPURRIER, *Nuclear Physics* 10 (1959) 583.  
— I. E. MCCARTHY, *Nuclear Physics* 11 (1959) 574.  
— K. W. FORD y J. A. WHEELER, *Annals of Physics* 7 (1959) 259.
- [3] A. ERDELYI et al., *Higher Transcendental Functions*, McGraw-Hill, New York, 1953, cap. 10.
- [4] K. R. GREIDER y A. E. GLASSGOLD, *Annals of Physics* 10 (1960) 100.
- [5] G. PLACZEK y H. A. BETHE, *Phys. Rev.* 57 (1940) 1075.
- [6] G. N. WATSON, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge, 1944, p. 158.
- [7] H. GOLDSTEIN, *Classical Mechanics*, Addison Wesley, 1950, cap. 3.
- [8] A. BRATENAHL, S. FERNBACH, R. H. HILDEBRAND, C. E. LEITH y B. J. MOYER, *Phys. Rev.* 77 (1950) 597.