SOBRE EL MOVIMIENTO VORTICOSO DE FORMA CILÍNDRICA

por ANTONIO CAMURRI RIGHI
(Universidad de Concepción, Chile)

1. *Vórtice cilíndrico.*

Como es sabido las características fundamentales del movimiento vorticoso son:

1) La existencia de una velocidad angular $\bar{\omega} = \dfrac{1}{2} \bar{\nabla} \Lambda \bar{V}$

2) El carácter solenoidal del vector $\bar{\omega}$, es decir $\bar{\nabla} \cdot \bar{\nabla} \Lambda \bar{V} = 0$

3) La existencia consiguiente de tubos de flujo, o vórtices de intensidad:

$$J = \iint_\sigma \bar{\nabla} \Lambda \bar{V} \cdot \bar{n} d_\sigma$$

que iguala la circulación Γ de la velocidad $\bar{V}$ misma.

Sobre la base de las características susodichas, consideremos un vórtice de forma cilíndrica, que gira alrededor de su eje con velocidad angular constante, en el interior de un fluido perfecto no sometido a fuerzas de masa.

Los elementos fluidos además de tener el movimiento rotatorio susodicho, se trasladarán y se deformarán como enseña la cinemática de los cuerpos deformables y en la hipótesis que el movimiento se desarrolle en planos perpendiculares al eje del vórtice, será posible reducirlo a un movimiento plano.

Es conveniente en esta investigación elegir dos sistemas de referencia planos: uno Oxy fijo y el otro Ox_1y_1 rígidamente coligado con el vórtice, es decir rotante con su misma velocidad angular $\bar{\omega}$.

Con referencia a dichos sistemas podemos escribir las obvias fórmulas cinemáticas:

$$\begin{cases} V_x = V_{1x} - \omega y \\ V_y = V_{1y} + \omega x \end{cases} \tag{1}$$

donde el índice (1) se refiere lógicamente al sistema móvil.

Introduciendo la función de corriente $\psi(x, y)$, es posible expresar las (1) del modo siguiente:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial y} &= V_{1x} - \omega y \\ -\frac{\partial \psi}{\partial x} &= V_{1y} + \omega x \end{aligned}\right. \tag{2}$$

Indicando por

$$J(x, y) = \frac{1}{2}(\overline{\nabla} \Lambda \overline{V})_z \tag{3}$$

la intensidad del vórtice en el punto $P(x, y)$, podemos expresar las ecuaciones de la fluidodinámica de Euler, en la forma siguiente:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}\right) - 2\,J V_y + \omega\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} y - \frac{\partial V_x}{\partial y} x\right) - \omega V_y = 0 \\ &\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2}\right) + 2\,J V_x + \omega\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} y - \frac{\partial V_y}{\partial y} x\right) + \omega V_x = 0 \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Para la resolución del sistema (4) es necesario disponer de la condición de contorno que se reduce, en el caso del vórtice considerado, a la existencia de una velocidad relativa $\overline{V_1}$ puramente tangencial, es decir desde el punto de vista matemático tiene que ser constante en el contorno el potencial Ψ^* de que depende la velocidad $\overline{V_1}$ misma:

$$\Psi^* = \psi(x, y) + \frac{1}{2}\omega\,(x^2 + y^2) = 0 \text{ (const.)} \tag{5}$$

Un análisis de la región exterior al vórtice permite ver inmediatamente que siendo allí el movimiento irrotacional, la función de corriente $\psi(x, y)$ debe ser armónica, es decir

$$\Delta^2 \psi = 0 \tag{6}$$

y en los puntos de la superficie lateral del vórtice debe satisfacer la ecuación (5).

En cambio en la región interior al vórtice se deduce de la ecuación (3) que debe valer la relación

$$\nabla^2 \psi = -(\overline{\nabla} \Lambda \overline{V})_z \tag{7}$$

y en el contorno todavía la condición (5).

Multiplicando las ecuaciones (4) respectivamente por dx y dy, sumando miembro a miembro e introduciendo la función de corriente $\psi(x, y)$ se obtiene:

$$d\left(\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}\right)+(2\,J+\omega)\,d\psi-\omega\left[\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\,x-\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\,y\right)dx+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\,y-\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial y}\,x\right)dy\right]=0 \qquad (8)$$

Indicando además por

$$H=\frac{p}{\rho}+\frac{V^2}{2}+\omega\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\,x+\frac{\partial\psi}{\partial y}\,y\right) \qquad (9)$$

$$\Psi^{*}=\psi+\frac{1}{2}\,\omega\,(x^2+y^2) \qquad (10)$$

y tomando en consideración la (7) se puede expresar la (8) en la forma más abreviada:

$$d\mathrm{H}+2\,J\,d\Psi^{*}=0 \qquad (11)$$

Combinando la (7) con la (10) se obtiene fácilmente la ecuación diferencial

$$\nabla^2\Psi^{*}+2\,(J-\omega)=0 \qquad (12)$$

que resuelta nos permitirá obtener la función $\Psi^{*}(x, y)$ y de la (10) la $\psi(x, y)$ y por lo tanto la velocidad $\overline{V}$ de la partícula fluida.

Determinando $H(x, y)$ mediante (11), será posible finalmente calcular de la (9) la presión p en cada punto interior al vórtice. En otros términos el conjunto de las ecuaciones (9), (10), (11) y (12) permite determinar los elementos cinemáticos y energéticos del vórtice considerado, es decir la presión y la velocidad en cada punto.

2. *Vórtices cilíndricos particulares.*

Para fijar las ideas sobre algunos casos particulares, supongamos ante todo que la intensidad $J(x, y)$ del vórtice sea igual a una constante J_0 en todos sus puntos, es decir el vórtice sea homogéneo.

En este caso de la (11), combinada con la (9) y (10) se obtiene fácilmente

$$\frac{p_i}{\rho} + \frac{V_i^2}{2} + \omega\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x}x \times \frac{\partial\psi_i}{\partial y}y\right) + 2J_0\left[\psi + \frac{1}{2}\omega(x^2 - y^2)\right] = 0_i \tag{1}$$

donde el índice i indica que la (1) vale para los puntos interiores al vórtice. Determinada la función de corriente $\psi(x, y)$ de modo tal que satisfaga las relaciones (6) y (7) del § 1, respectivamente en los puntos exteriores e interiores al vórtice y a la condición de contorno (5), es fácil determinar mediante la (1) la presión en cada punto interior.

Consideremos ahora el caso en que la intensidad J sea una función lineal de Ψ, y precisamente

$$J(x, y) = J_0 + \frac{1}{2}\lambda\Psi \tag{3}$$

siendo J_0 y λ constantes. Introduciendo una nueva función W definida por

$$W = \frac{2(J_0 - \omega)}{\lambda} + \Psi \tag{4}$$

y eligiendo sobre el contorno el valor constante Ψ_0 de Ψ de modo tal que el valor correspondiente de W sea nulo, se deduce de (4)

$$\Psi_0 = -\frac{2(J_0 - \omega)}{\lambda}$$

y la ecuación (12) del § 1 asume la forma

$$\nabla^2 W + \lambda W = 0 \tag{5}$$

siendo $W = 0$ sobre el contorno, como ya se fijó

La ecuación (5) presenta la misma forma de la de Schrödinger de la mecánica cuántica y como enseña la teoría de este tipo de ecuaciones diferenciales, habrá infinitos autovalores del parámetro λ, en correspondencia de los cuales se tienen infinitas autofunciones W.

Observemos además que la ecuación (11) del §1 asume en este caso la forma

$$dH + (2J_0 + \lambda\Psi)\, d\Psi = 0$$

de donde integrando

$$H + 2\,J_0\,\Psi' + \frac{1}{2}\lambda\Psi'^2 = \text{const.} \qquad (6)$$

Reemplazando en la (6) en lugar de la Ψ', la expresión que se deduce de la (4) y en lugar de H, la expresión equivalente (9) del § 1, será posible determinar la velocidad y la presión en todos los puntos interiores al vórtice.

El caso particular que acabamos de tratar queda subordinado, desde el punto de vista fenoménico, a la posibilidad de existencia de un vórtice similar.

Para resolver este aspecto de naturaleza fenoménica, es conveniente emplear coordenadas polares y en base a la conocida expresión del operador laplaciano en dichas coordenadas, la (5) asume la forma

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\,\frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 W}{\partial\,\theta^2} + \lambda W = 0 \qquad (7)$$

con la condición del contorno $W = 0$ para $r = a$ (radio del vórtice) y se ve con un simple cálculo que la (7) queda resuelta por funciones de la forma:

$$W = A_k J_k\,(\sqrt{\lambda}\,r)\ \text{sen}\ (k\theta + \alpha_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (8)$$

donde A_k, α_k son constantes y $J_k(\sqrt{\lambda}\,r)$ representa la función de Bessel de primera especie y de orden k.

Siguiendo el procedimiento que hemos ya indicado a propósito de la ecuación (5) ,es posible determinar la velocidad y la presión p en los puntos interiores al vórtice y constatar que la presión resulta positiva en cada punto de la masa fluida en movimiento, conforme a las exigencias experimentales.

Nos limitamos a expresar en forma descriptiva estas conclusiones, porque la parte matemática se reduciría a hacer simples reemplazos materiales, partiendo de la fórmula (8) sobre las ecuaciones (4) y (6) de este párrafo y sobre las (9) y (10) del §1.